



## SOME REMARKS ON COLLAPSE-MODELS OF CAVITATION BUBBLES

Zdeněk BAYER\*

**Summary:** The paper refers to the Rayleighs ( $R$ -) and Rayleigh-Plessets models of cavitation bubble dynamics. For the latter one the influence of the state of water, water vapor, air and of their physical properties as well as their constants is checked up. E.g. the influence of the Poisson constant on amplitude and velocity of bubble-diameter is checked up. On the base of  $R$ -model the bubble-compression with heat transfer is studied, a simple analytical model of such process is presented and compared with the polytropic compression. It is shown that a) the differences of pressures and temperatures may be small but they increase rapidly with increasing volume-change of the bubble, and b) the laws of heat transfer may also co-influence the process course.

**Key words:** Cavitation, dynamic model, bubble-compression, process with heat extraction

### 1. MODELÝ DYNAMIKY KAVITAČNÍCH BUBLIN

Rovnice popisující dynamickou rovnováhu kavitačních bublin prošly poměrně dlouhým vývojem. Přes jejich dnešní dokonalost sotva lze tvrdit, že tento děj je jimi popsán zcela uspokojivě. Jako příklad lze uvést, že pro zmíněné rovnice je společné to, že počítají s „životem“ bublinky od jejího počátečního stavu ( $\rho_0$ ), daného jejím průměrem ( $R$ ) a dalšími podmínkami, které lze z této skutečnosti zčásti vyvodit a zčásti také odhadnout a které jej – spolu s použitým modelem definují. Vymezení této počáteční neurčitosti patří k nelehkým problémům. O některých dalších aspektech těchto dynamických modelů pojednává předložený příspěvek.

Ve zmíněném vývoji lze konstatovat několik důležitých etap. První významnou z nich charakterizuje rovnice předpokládající existenci plynu v bublině o tlaku  $p_0 \neq p_\infty$  (v kapalině v relativně dostatečné vzdálenosti). V případě zmenšování se bubliny ( $p_0 < p_\infty$ ) platí, že práce vykonaná kapalinou ( $W$ ) se spotřebuje jednak na zvýšení její kinetické energie ( $E$ ), jednak na kompresi plynného obsahu bublinky ( $C$ ). Pro jednotlivé energie pak platí [1,2]

$$W = p_\infty (4\pi/3)(R_0^3 - R^3) ; E = 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2 , C = C_0 C_i , C_0 = p_0 (4\pi/3) R_0^3 , \quad (1)$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny,  $\dot{R} = \partial R / \partial t$ ,  $t$  je čas a výraz  $C_i$  záleží na bližších podmínkách komprese plynu; krajními případy jsou komprese adiabatická a izotermická, jako případ obecný se uvažuje děj polytropický. Po úpravě je v bezrozměrných veličinách

$$W = E + C \Rightarrow 3\rho \dot{R} / (2p_0) = A(\omega - 1) - \omega C_i ; A = p_\infty / p_0 , \omega = V_0 / V = (R_0 / R)^3 . \quad (2)$$

\* Doc. Ing. Zdeněk Bayer, CSc., ÚT AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8 / ÚJEP, Ústí nad Labem

Předností této Rayleighovy (dále „R“) rovnice je, že umožňuje svou relativní jednoduchostí analytické odvození řady zajímavých důsledků. Nevýhodou pak např. to, že v daném tvaru neuvažuje některé důležité skutečnosti (např. setrvačné síly, přenos hmoty a tepla mezi obsahem bublinky a okolní kapalinou) a vlastností v ději zúčastněných medií (vazkost, povrchové napětí, tepelnou vodivost, specifické tepelné kapacity). Tyto a další nedostatky se snažili napravit další autoři a rovnice. Hovoří se pak zpravidla o rovnici Rayleighově–Plessetově, jejíž jeden z tvarů je

$$[R(\partial \dot{R} / \partial t) + 3 \dot{R}^2 / 2] \rho - 4 \mu \dot{R} / R = p_v(T) + p_g(R_o/R) - p_l - p_A(t) + 2\sigma/R, \quad (3)$$

kde  $T$ ,  $\mu$  a  $\sigma$  jsou absolutní teplota plynu, dynamická viskozita a povrchové napětí kapaliny a indexy  $v$ ,  $g$ ,  $l$  značí páru, plyn, kapalinu a  $p_A$  časově obecně proměnný budící tlak.

Rovnici je nutno řešit numericky. Pomocí ní byla orientačně analyzována řada separátních a souhrnných vlivů. Představu o nich dává tabulka 1. Do ní není zahrnut vliv hustoty páry, který se za uvažovaných podmínek ukázal jako zanedbatelný. Postupně vždy silnějším vlivem působí veličiny  $\rho$ ,  $p_v$ ,  $p_A$  a zcela nejsilněji se uplatnila teplota obsahu bublinky ovlivňující veličiny  $p_v$ ,  $\rho_v$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ . Z látkových vlastností se nejslaběji projevil vliv  $\mu$ , dále pak  $\sigma$  a nejsilněji vliv Poissonovy konstanty  $\kappa$ . Průměrný vliv na maximální amplitudu  $\vartheta_R$  byl přitom zhruba třikrát slabší než vliv na příslušnou rychlost  $\vartheta_{R\bullet}$ .

**Tab.1. Relativní vliv některých fyzikálních vlastností a parametrů vývoje kavitační bubliny**

Veličina	$\mu$ , Pa.s	$\rho$ , m3/kg	$\sigma$ , N/m	$n^{1)}$	$p_v$ , b	$p_A$ , b	$T^{2)}$ , K	$\Phi_a$ řádku
Střední	0.00275	1000	0.115	4/3	0.06	0.93	311.15	–
$\vartheta_R$	–	0.408	0.231	0.30	0.358	0.735	1.059	0.454
$\vartheta_{R\bullet}$	0.102	1.278	0.625	1.35	0.546	1.17	3.19	1.360
$\Phi_g$	0.0509 <sup>3)</sup>	0.228	0.380	0.406	0.442	0.928	1.84	0.703

$\Phi_{a,g}$  – průměr a–aritmetický, g–geometrický, <sup>1)</sup> polytropický exponent,  
<sup>2)</sup> superpozice všech vlivů způsobených teplotou, <sup>3)</sup>  $\Phi_a$

Také k rov. (3) lze mít určité výhrady, mj. proto, že neuvažuje již zmíněnou výměnu hmoty a tepla. První částí problému je věnována řada prací autorů Maršík, Zima [3,4] zabývajících se odvozením dalších členů R–P rovnice respektujících difusi a analýzou příslušného vlivu. Prvním krokem ke druhé části je následující stručná úvaha o možnostech přesnějšího respektování výměny tepla, pro jednoduchost vycházející z R–rovnice (2). Aplikace na jiné modely by však neměla být v principu obtížná.

## 2. KOMPRESSE KAVITAČNÍ BUBLINY PROVÁZENÁ ODVODEM TEPLA

Možnost výměny tepla v průběhu existence bubliny je až dosud respektována zavedením obecného polytropického exponentu  $n$  ( $1 < n < \kappa$ ). Může se sice zdát podivné, že by děj definovaný např. hodnotou  $n=4/3$  měl probíhat identicky jako adiabatický u plynu s toutéž hodnotou  $\kappa=n$  a jako polytropický u jednoatomového plynu ( $\kappa=5/3$ ) a s intenzivní výměnou tepla, ale tak tomu přirozeně není. Pro polytropický děj platí

$$\beta = q_o/w_a = (\kappa - n)/(\kappa - 1), n = \kappa - \beta(\kappa - 1), C_n = (\tau - 1)/(n - 1), \tau = \omega^{n-1}, \pi = \omega^n, \Delta S/c_v = C_o \beta (1 - \kappa) \ln(\omega), \quad (4)$$

kde  $q, w$  je teplo odvedené v průběhu komprese a  $w$  příslušná kompresní práce. První z těchto rovnic umožňuje rovnice stavových změn, rovnicí pro práci a také rov. (2) formulovat jako funkce veličin  $\kappa, \beta$  a upozorňuje, že u polytropické změny je relativní intenzita okamžitého tepelného toku v průběhu celého děje – komprese – konstantní. To je nepochybně předpoklad dosti odvážný a lze jej patrně připustit jen při nepříliš velkých změnách objemu bublinky. Otázkou je, jak je tomu při velkých změnách. Poslední rovnice pak dokládá samozřejmou skutečnost, že svrchu zmíněná identita je jen zdanlivá.

Řešení R–rovnice s uvažováním této změny pro  $A=\text{konst.}$  ukázalo, že zatímco pokles teplotního poměru s růstem veličiny  $\beta$  je téměř lineární, veličiny  $\omega, \pi$  rostou progresivně exponenciálně a rostou také exponenciálně s růstem tlakového poměru  $A$ . Proto by nezanedbatelné mohly být i důsledky změn intenzity tepelného toku v průběhu děje. Pro posouzení této možnosti bylo ověřováno několik jednoduchých modelů komprese s jinak definovaným odvodem tepla v průběhu děje. Z nich je dále uveden model „3“ charakterizovaný odvodem tepla lineárně závislým na změně vnitřní energie a na rozdílu okamžité a okolní teploty, což vede k výrazům pro stavovou změnu a relaci mezi veličinami  $\beta$  a  $\varepsilon$

$$-dq=c.(T-T_0).du, \quad \omega^{\kappa-1}=\tau^{1-\varepsilon} \cdot \exp[\varepsilon(\tau-1)], \quad c=\varepsilon/T_0, \\ \pi=\tau.\omega, \quad \varepsilon=2\beta/[(\tau-1)(1-\beta)], \quad \beta=\varepsilon(\tau-1)/[2+\varepsilon(\tau-1)] \quad (5a)$$

a dále k vyjádření práce, odvedeného tepla a změny entropie

$$C_3=(\tau-1)[1+\varepsilon(\tau-1)/2]/(\kappa-1), \quad Q_0=C_0\varepsilon(\tau-1)^2/2/(\kappa-1), \quad \Delta S/(c_v T_0)=C_0[(\kappa-1)\ln(\omega)-\ln(\tau)] \quad (5b)$$

Lze ukázat, že oba modely dávají velmi zřetelně odlišné průběhy dějů. Proto způsob jejich porovnání je zajímavým tématem, což tím spíše platí pro porovnání obou dějů za podmínek odpovídajících modelům dynamiky bublin. Poměrně jednoduché je to u R–modelu (2), v němž není druhá derivace a to ještě v případě, že hledáme jen extrémní hodnotu amplitudy objemu. Pak pro podmínku  $\dot{R}=0$  vymizí levá strana rov. (2) a za předpokladu dalších podmínek  $A=\text{konst}$  a  $\beta=\text{konst}$  dostaneme pro oba modely implicitní rovnice  $\omega_p(A,\beta)=0$ ,  $\omega_s(A,\beta)=0$  a jejich řešením nejprve hledané hodnoty  $\omega_p$ ,  $\omega_s$  a potom ostatní veličiny stavu.

### 3. NĚKTERÉ VÝSLEDKY A ZÁVĚRY

Rozdíly při tomto způsobu porovnání jsou až překvapivě malé, je ovšem třeba uvážit, že přitom poměry tlaků, kompresní práce i odvedená tepla se liší a dále, že zde je velmi progresivní závislost na veličině  $A$ . Absolutní velikost objemových, tlakových a teplotních poměrů dokládají obr.1, kde  $\pi_m=\pi/A$  a  $A=10$ , obr.2 pro tlakový poměr  $\pi_m$  a obr.3 pro teploty. Na obr.4 pak je průběh rozdílů tlaků a teplot obou modelů pro  $A=10$ . Porovnání s obr.1 ukazuje, že oba vrcholy jsou posunuty vždy směrem k vyšším absolutním hodnotám příslušných veličin.

Poznamenejme, že komplikovanější dynamické modely bublin nevedou k tak extrémním absolutním hodnotám a lze soudit, že tomu tak je v důsledku jednak tlumících efektů viskozity a popř. difuze a nepochybně také setrvačnosti v R–modelu neuvažované. Naproti tomu souhlasně by mělo působit povrchové napětí.

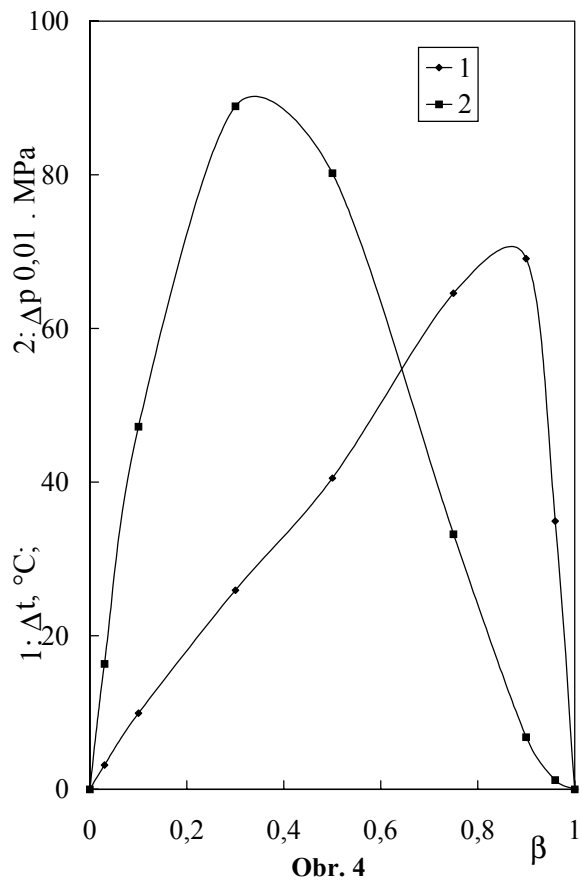
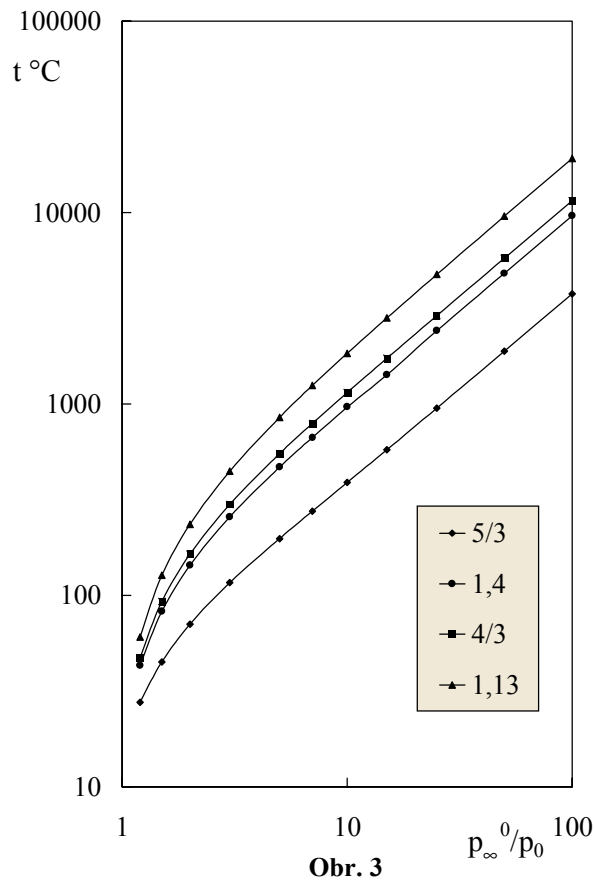
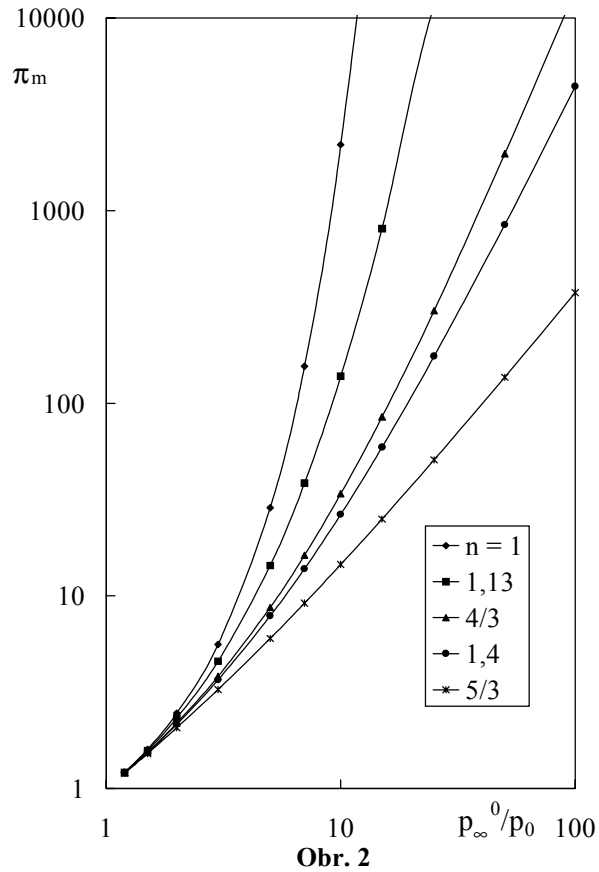
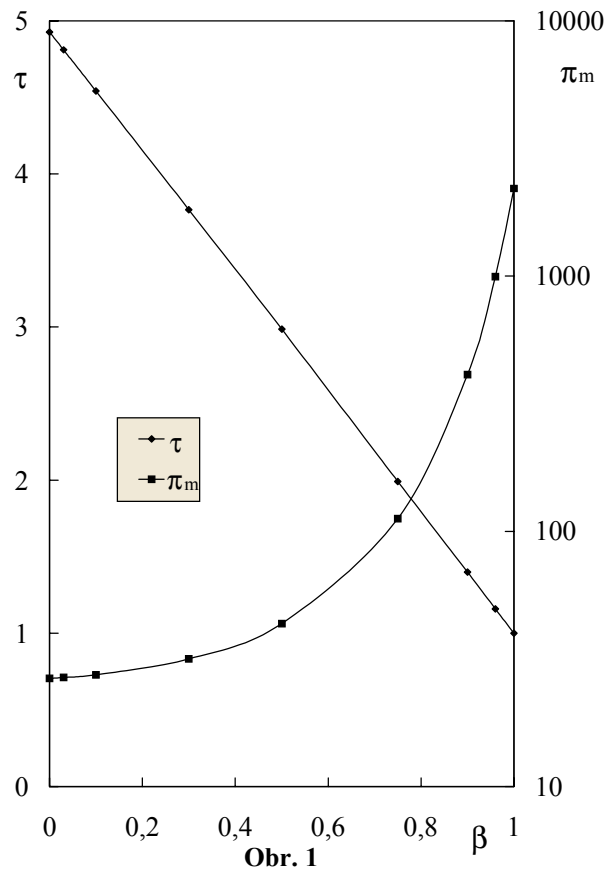
Je možno dodat, že model komprese s odvodem tepla lze formulovat daleko podrobněji a přirozeně tím i přesněji. Pokud však máme na mysli případné začlenění do rov. (1) s výhodou analytického řešení, jsou možnosti podobných modelů dosti omezeny podmínkou, aby vztahy pro infinitezimální termodynamickou změnu a kompresní práci byly integrovatelné elementárně a alespoň z jedné z nich bylo možno explicitně vyjádřit další stavovou veličinu. Předložený model po této stránce sice vyhovuje, ale není jisto, zda za uvedených podmínek představuje nejvhodnější řešení. Stejně tak je třeba dále propracovat metodu porovnání modelů kompresí s odvodem tepla.

U složitějších modelů dynamiky bublin vyžadujících tak jako tak numerické řešení je možno kromě aplikace vztahů (5) uvažovat o odvodu tepla během komprese značně obecněji. Pro sdílení tepla konvekcí lze např. vyjít z kritériálního vztahu

$$Nu \cong \text{konst.} \cdot Re^x \cdot Pr^y, \quad x \approx 0.6, \quad y \approx 0.4, \quad (6a)$$

kde  $Nu$ ,  $Re$  a  $Pr$  jsou Nusseltovo, Reynoldsovo a Prandtlovo číslo a exponenty  $x$  a  $y$  se mohou od uvedených hodnot i dosti lišit. Pokud je však budeme předpokládat, lze pro konstantu  $c$  v rov. (5a) zahrnující součinitel přestupu tepla násobený povrchem bublinky počítat s funkcí

$$c \approx \text{konst.} \cdot (\dot{R} \cdot c_p \cdot \lambda)^{0.5} / (v^{0.2} \cdot R^{1.5}) \quad (6b)$$



Dostává se nám tak a) upozornění, že při velkých objemových změnách při kompresi bubliny může být závislost na teplotě či jiné stavové veličině ještě silnější než jak bylo uvažováno, b) skutečnost, že dochází k výměně tepla se může promítnout i do současné představy o vlivu stavu a fyzikálních vlastností látek na průběh děje a c) vodítka, jak se při návrhu dalších modelů komprese či expanze kavitačních bublin orientovat.

*Problém byl řešen v rámci grantu AV ČR S2076003.*

#### **4. LITERATURA**

- [1] Brdička, M., Samek, L., Taraba, O.: Kavítace
- [2] Young, F.R.: Cavitation. McGraw–Hill London, 1989, 1234 AP 8909
- [3] Zima, P., Maršík, F.: Dynamics of a bubble in variable pressure and temperature fields of a liquid. Národní konference s mezinárodní účastí Inženýrská mechanika, Svratka 1999
- [4] Zima, P., Maršík, F.: Nucleation and dynamics of bubbles in a binary water–gas solution. Int. Conf. Engineering Mechanics, Svratka 2000