

SIMULATION MODELS OF VIBRATION OF ONE-DIMENSIONAL CONTINUUM FOR TIME-DOMAIN ANALYSIS

Antonín Bubák*

Summary: *This paper deals with a solution of longitudinal and torsional vibration of thin rods with and without internal damping. The calculated transfer functions have rational form. Two simulation models named "Σ two-port network" have been created in the DYNAST program on the basis of these solution results.*

Key words: *Continuum, longitudinal vibration, torsional vibration, simulation model of vibration, wave equation, DYNAST.*

1 Úvod

Podélné a torzní kmitání jednorozměrných útvarů lze modelovat buďto s uvažováním soustředěných nebo spojitě rozložených parametrů. První způsob je poměrně často používaný díky jednoduché formulaci vztahu mezi vstupními a výstupními veličinami. Jeho nevýhodou je však problém stupně diskretizace, jedinečný pro každou úlohu, a s tím spojené těžko odhadnutelné přesnosti výpočtu. Pro přesné numerické výpočty je záhodno uvažovat spojitě rozložené parametry, neboť jsou mnohem bližší fyzikální podstatě. Častějšímu použití soustav se spojitě rozloženými parametry k simulačním výpočtům dynamických systémů v časové oblasti někdy brání představa velkého množství získaných dat, často zbytečných, jež jsou spojeny s numerickým řešením vlnové rovnice, neboť ta je funkcí nejen času ale i polohy. Obvykle totiž stačí znát průběh veličin pouze v místech, kde je kontinuum připojeno k sousedním částem dynamického systému, tedy na okrajích. Proto se zde nabízí myšlenka nalezení takového řešení vlnové rovnice, jež by dávalo do vztahu pouze veličiny v krajních bodech. Jinými slovy získat přenos mezi vstupními a výstupními veličinami, za které se považuje síla a výchylka (kroučící moment, natočení). Takové řešení vlnové rovnice je samozřejmě známé. Jeho nevýhodou je ale skutečnost, že přenosem jsou funkce s matematicky velmi obtížně proveditelnou zpětnou transformací z frekvenční oblasti do časové, a proto jejich zadání běžné simulační programy (MATLAB/SIMULINK, DYNAST . . .) u výpočtů v časové oblasti nepodporují. Zde je možné zadávat přenosy pouze ve tvaru racionálních lomených funkcí.

Proto bylo pro podélné a torzní kmitání jednorozměrného kontinua provedeno takové řešení vlnové rovnice, které vede k získání přenosu ve tvaru racionální lomené funkce. Konkrétně se jedná o řešení netlumeného podélného kmitání tenké pružné tyče, podélného kmitání tenké pružné tyče s vnitřním viskózním tlumením a torzního kmitání.

*Ing. Antonín Bubák, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, VCSVTT, Horská 3, 128 03 Praha 2;
tel. +420 2 2491 5567/360, e-mail: a.bubak@rcmt.cvut.cz

2 Odvození základních vztahů

2.1 Podélné kmitání tenké pružné tyče

Podélné kmitání tenké tyče¹ stálého průřezu bez vnitřního či vnějšího tlumení je obecně popsáno vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad (1)$$

kde

$$a^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (2)$$

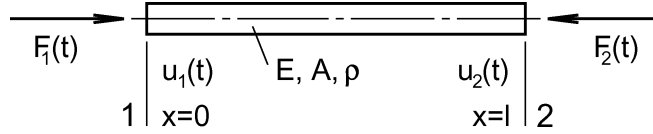
Za předpokladu lineárně elastického materiálu platí pro vnitřní normálovou sílu Hookeův zákon

$$F = EA \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

A je plocha průřezu tyče, ρ je hustota materiálu a E Youngův modul pružnosti.

U rovnic (1) a (3) se obecně předpokládají nehomogenní okrajové podmínky I. typu (obr. 1)

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t), \quad F(0, t) = F_1(t), \quad F(l, t) = F_2(t). \quad (4)$$



Obrázek 1: Okrajové podmínky podélně kmitající tyče

Analytické řešení rovnice (1) je provedeno Fourierovou metodou, která hledá řešení s ohledem na okrajové podmínky ve tvaru řady

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^k T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + u_1(t) + \frac{x}{l}[u_2(t) - u_1(t)]. \quad (5)$$

Dosazení (5) do (1) dává

$$\ddot{u}_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \ddot{u}_2 \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^k \left[\ddot{T}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0. \quad (6)$$

K řešení rovnice (6) se použije Galerkinova metoda s požadavkem, aby pro $j = 1, 2, \dots, k$ platilo

$$\int_0^l \left[\ddot{u}_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \ddot{u}_2 \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^k \left[\ddot{T}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \sin \frac{j\pi x}{l} dx = 0, \quad (7)$$

čímž se získají obyčejné diferenciální rovnice

$$\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2 (-1)^j + \frac{j\pi}{2} \left[\ddot{T}_j(t) + a^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 T_j(t) \right] = 0, \quad n = j = 1, 2, \dots, k. \quad (8)$$

Laplaceovou transformací dostáváme pro T_j výraz

$$T_j(s) = \frac{2}{j\pi} \frac{s^2}{s^2 + \Omega_j^2} (u_2(s)(-1)^j - u_1(s)), \quad \Omega_j^2 = a^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \quad (9)$$

¹Přesná definice pojmu tenká tyč viz [1, strana 220].

Dosazením (5) do Hookeova zákona (3) vychází pro sílu F

$$F(t) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{n=1}^k n\pi T_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + u_2(t) - u_1(t) \right] \quad (10)$$

a v krajních bodech 1 a 2 ($x = 0$ a $x = l$) pak platí

$$F_1(t) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{n=1}^k n\pi T_n(t) + u_2(t) - u_1(t) \right], \quad (11)$$

$$F_2(t) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{n=1}^k n\pi T_n(t)(-1)^n + u_2(t) - u_1(t) \right].$$

Po provedení Laplaceovy transformace, položení $n = j$ a dosazení (9) se získají konečné vztahy (za předpokladu nulových počátečních podmínek) mezi silou a posunutím v krajních bodech v přenosovém tvaru

$$F_1(s) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{j=1}^k \frac{2s^2}{s^2 + \Omega_j^2} (u_2(s)(-1)^j - u_1(s)) + u_2(s) - u_1(s) \right], \quad (12)$$

$$F_2(s) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{j=1}^k \frac{2s^2}{s^2 + \Omega_j^2} (u_2(s) - u_1(s)(-1)^j) + u_2(s) - u_1(s) \right],$$

$$\Omega_j^2 = \frac{E}{\rho} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2$$

nebo v maticovém vyjádření s admitanční maticí

$$\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -1 - H(s) & , & 1 + H(s)(-1)^j \\ -1 - H(s)(-1)^j & , & 1 + H(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$H(s) = \sum_{j=1}^k \frac{2s^2}{s^2 + \Omega_j^2}. \quad (14)$$

Platnost vztahu je pro k dle [1, strana 220] omezena vztahem

$$k \leq 0.1 \frac{4l}{d}, \quad (15)$$

kde d je průměr tyče.

2.2 Podélné tlumené kmitání tenké pružné tyče

Podélné kmitání tenké tyče s *vnitřním tlumením* vyjádřené viskoelastickým modelem s „paralelní“ viskozitou ² je popsáno parciální diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad (16)$$

kde $a^2 = E/\rho$.

Pro vnitřní normálovou sílu platí vztah vyplývající ze zvoleného viskoelastického modelu

$$F = EA \frac{\partial u}{\partial x} + 2A\rho\nu \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \quad (17)$$

²V odborné literatuře uváděn pod názvem Voigtův-Kelvinův model.

A je plocha průřezu tyče, ρ je hustota materiálu, E Youngův modul pružnosti a ν kinematická viskozita.

U rovnic (16) a (17) se opět obecně předpokládají nehomogenní okrajové podmínky I. typu (obr. 1)

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t), \quad F(0, t) = F_1(t), \quad F(l, t) = F_2(t). \quad (18)$$

Řešení rovnice (16) znovu hledáme, s ohledem na okrajové podmínky, ve tvaru řady

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + u_1(t) + \frac{x}{l}[u_2(t) - u_1(t)]. \quad (19)$$

Dosazení (19) do (16) dává

$$\ddot{u}_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \ddot{u}_2 \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^m \left[\ddot{T}_n(t) + 2\nu \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \dot{T}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0. \quad (20)$$

Galerkinovou metodou s požadavkem, aby pro $j = 1, 2, \dots, k$ platilo

$$\int_0^l \left[\ddot{u}_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \ddot{u}_2 \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^m \left[\ddot{T}_n(t) + 2\nu \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \dot{T}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \sin \frac{j\pi x}{l} dx = 0, \quad (21)$$

získáme obyčejné diferenciální rovnice

$$\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2 (-1)^j + \frac{j\pi}{2} \left[\ddot{T}_j(t) + 2\nu \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \dot{T}_j(t) + a^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 T_j(t) \right] = 0, \quad n=j=1, 2, \dots, k. \quad (22)$$

Laplaceovou transformací dostáváme pro T_j výraz

$$T_j(s) = \frac{2}{j\pi} \frac{s^2}{s^2 + \beta_j^2 s + \Omega_j^2} (u_2(s)(-1)^j - u_1(s)), \quad (23)$$

kde

$$\beta_j^2 = 2\nu \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2, \quad \Omega_j^2 = a^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2. \quad (24)$$

Dosazením (19) do (17) vychází pro sílu F

$$F(t) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{n=1}^m n\pi T_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + u_2(t) - u_1(t) \right] + \frac{2A\rho\nu}{l} \left[\sum_{n=1}^m n\pi \dot{T}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t) \right] \quad (25)$$

a v krajních bodech 1 a 2 ($x = 0$ a $x = l$) pak platí

$$F_1(t) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{n=1}^m n\pi T_n(t) + u_2(t) - u_1(t) \right] + \frac{2A\rho\nu}{l} \left[\sum_{n=1}^m n\pi \dot{T}_n(t) + \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t) \right] \quad (26)$$

$$F_2(t) = \frac{EA}{l} \left[\sum_{n=1}^m n\pi T_n(t)(-1)^n + u_2(t) - u_1(t) \right] + \frac{2A\rho\nu}{l} \left[\sum_{n=1}^m n\pi \dot{T}_n(t)(-1)^n + \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t) \right]$$

Laplaceovou transformací (26), položením $n = j$ a dosazením (23) se získají konečné vztahy (za předpokladu nulových počátečních podmínek) mezi silou a posunutím v krajních bodech v přenosovém tvaru

$$F_1(s) = \sum_{j=1}^m \frac{2bs^3 + 2ks^2}{s^2 + \beta_j^2 s + \Omega_j^2} \left(u_2(s)(-1)^j - u_1(s) \right) + (bs + k)(u_2(s) - u_1(s)) , \quad (27)$$

$$F_2(s) = \sum_{j=1}^m \frac{2bs^3 + 2ks^2}{s^2 + \beta_j^2 s + \Omega_j^2} \left(u_2(s) - u_1(s)(-1)^j \right) + (bs + k)(u_2(s) - u_1(s)) ,$$

$$\beta_j^2 = 2\nu \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 , \quad \Omega_j^2 = \frac{E}{\rho} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 , \quad k = \frac{EA}{l} , \quad b = \frac{2A\rho\nu}{l} .$$

nebo v maticovém vyjádření s admitanční maticí

$$\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -bs - k - \sum_{j=1}^m H_j(s) & , \quad bs + k + \sum_{j=1}^m H_j(s)(-1)^j \\ -bs - k - \sum_{j=1}^m H_j(s)(-1)^j & , \quad bs + k + \sum_{j=1}^m H_j(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} , \quad (28)$$

$$H_j(s) = \frac{2bs^3 + 2ks^2}{s^2 + \beta_j^2 s + \Omega_j^2} . \quad (29)$$

Pro $\nu = 0$ přejdou vztahy (27) a (28) na (12) resp. (13).

2.3 Torzní kmitání válcových tyčí kruhového a mezikruhového průřezu

Při torzním netlumeném kmitání tyčí kruhového a mezikruhového průřezu platí³ vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} , \quad x \in (0, l) , \quad c^2 = \frac{G}{\rho} . \quad (30)$$

Torzní moment vyvolaný natočením průřezu je

$$M = GJ_k \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad (31)$$

ϕ je natočení celého průřezu, G je modul pružnosti ve smyku, J_k moment tuhosti v kroucení. Protože rovnice (30) a (31) jsou analogické s rovnicemi (1) a (3) pro podélné kmitání tyčí, je možné napsat rovnou výsledné vztahy platné pro obecné nehomogenní okrajové podmínky I. typu

$$M_1(s) = \frac{GJ_k}{l} \left[\sum_{j=1}^k \frac{2s^2}{s^2 + \Omega_j^2} \left(\phi_2(s)(-1)^j - \phi_1(s) \right) + \phi_2(s) - \phi_1(s) \right] , \quad (32)$$

$$M_2(s) = \frac{GJ_k}{l} \left[\sum_{j=1}^k \frac{2s^2}{s^2 + \Omega_j^2} \left(\phi_2(s) - \phi_1(s)(-1)^j \right) + \phi_2(s) - \phi_1(s) \right] ,$$

³Za předpokladů uvedených v [1, strana 228].

nebo v maticovém vyjádření s admitanční maticí

$$\begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \end{bmatrix} = \frac{GJ_k}{l} \begin{bmatrix} -1 - H(s) & , & 1 + H(s)(-1)^j \\ -1 - H(s)(-1)^j & , & 1 + H(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$H(s) = \sum_{j=1}^k \frac{2s^2}{s^2 + \Omega_j^2}, \quad \Omega_j^2 = \frac{G}{\rho} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2. \quad (34)$$

Odvozené vztahy lze s výhodou používat k numerickým výpočtům kmitání v časové oblasti, neboť získané přenosy jsou racionální lomené funkce, se kterými umí běžné simulační programy v časové oblasti velmi dobře pracovat.

3 Počítačové zpracování a ověření

K vytvoření simulačních modelů jednotlivých typů kmitání kontinua využívajících odvozených vztahů a jejich ověření byl použit program DYNAST [4]. Tento program slouží k časové a frekvenční analýze lineárních i nelineárních dynamických soustav. Umožňuje zadat dynamické systémy kombinací mnohopólových i blokových schémat a algebro–diferenciálních rovnic. Rovnice odpovídající mnohopólům si formuluje sám. Protože program řeší všechny rovnice současně, odpadají potíže s algebraickými smyčkami. Při tvorbě modelů není nutné explicitně dělit veličiny na vstupní a výstupní, jako je tomu v programu MATLAB/SIMULINK, a proto není nutné pro model jedné součásti vytvářet několik modelů, které odpovídají možné kombinaci vstupních veličin. Dále program umožňuje vytvářet tzv. submodely reálných součástí, které jsou uloženy v nezávislých datových souborech a lze je využívat k sestavování modelů větších systémů. Celkem tedy byly pro program DYNAST vytvořeny dva submodely (s ohledem na uživatelský komfort) reprezentující podélné a torzní kmitání tenkých tyčí.

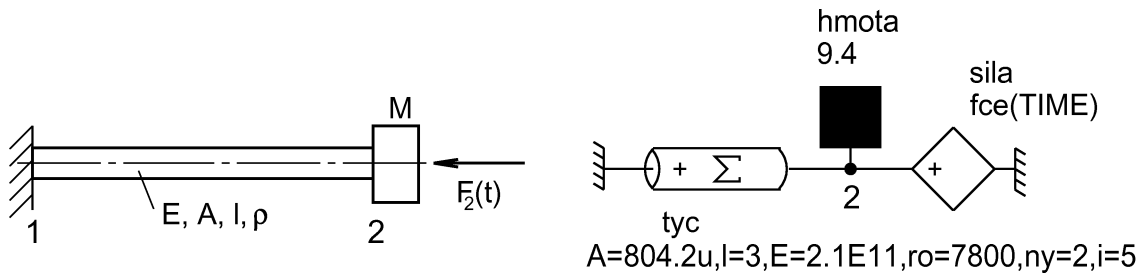
Pro submodel vytvořený na bázi rozložených parametrů byl, vzhledem k jeho podstatě, zaveden název Σ -článek. Výhodou Σ -článků je skutečnost, že pro libovolnou délku kontinua stačí použít pouze jeden článek, aniž by se tím ovlivnila přesnost výpočtu, neboť sám vychází právě z exaktního řešení rovnice popisující kmitání tohoto kontinua.

Dále následuje příklad demonstrující vlastnosti a použití vytvořených submodelů v programovém prostředí DYNAST:

Ukázkový příklad – vynucené kmitání vetknuté tyče s hmotou na konci

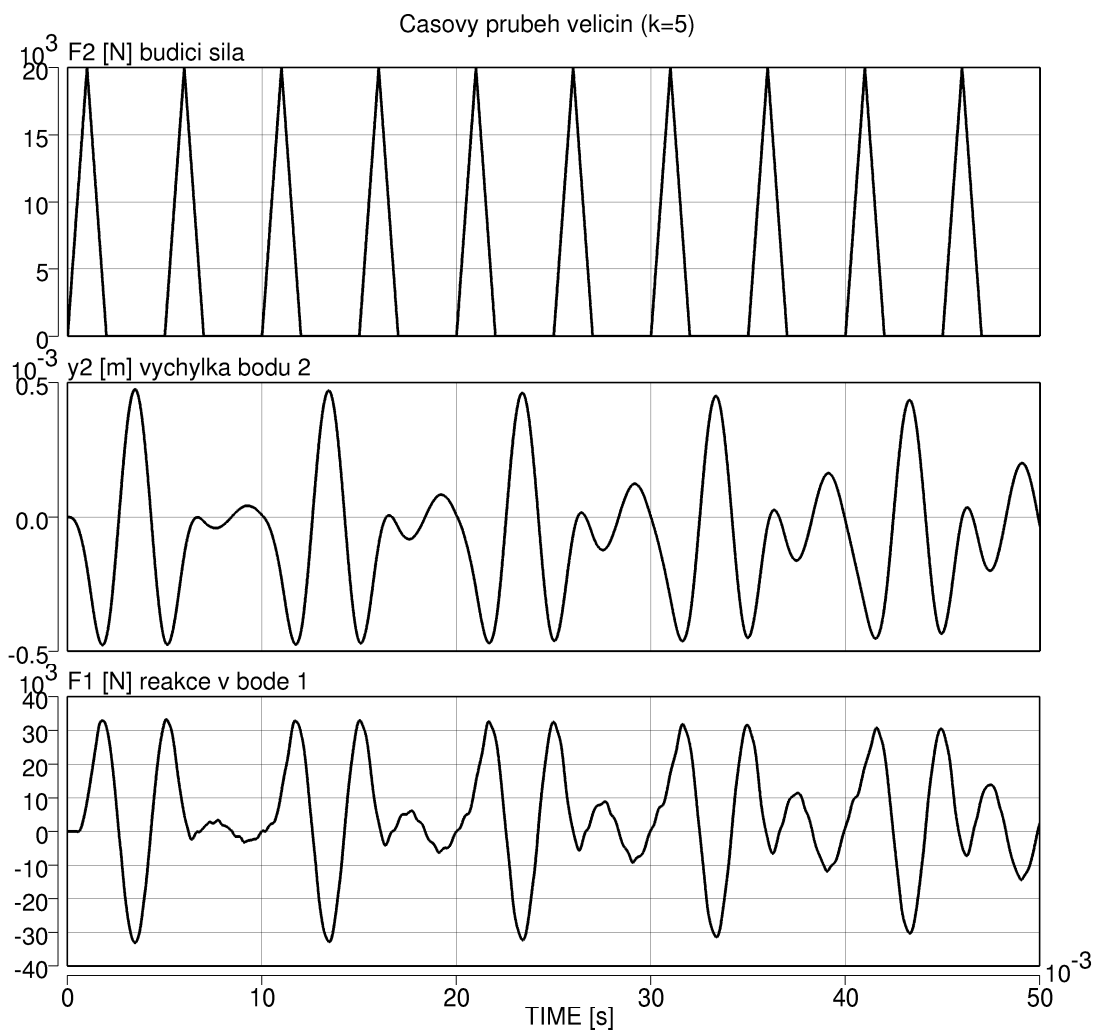
Ocelová tyč průměru 32 mm a délky 3 m, v bodě 1 vetknutá, s připojenou hmotou $M = 9,4$ kg (poloviční hmotnosti tyče) v bodě 2, zatížená periodickou silou F_2 .

Simulační schéma je znázorněno na obr. 2. Σ -článek je v místě vetknutí „uzemněn“, což odpovídá podmínce, že rychlost v tomto bodě je nulová. Na druhé straně je k němu připojena hmota a budící síla. V připojovacím uzlu platí podmínka silové rovnováhy mezi budící, d'Alembertovou a vnitřní reakční silou v tyči. Tím jsou formulovány, uživatelsky velmi příjemně, rovnice systému.



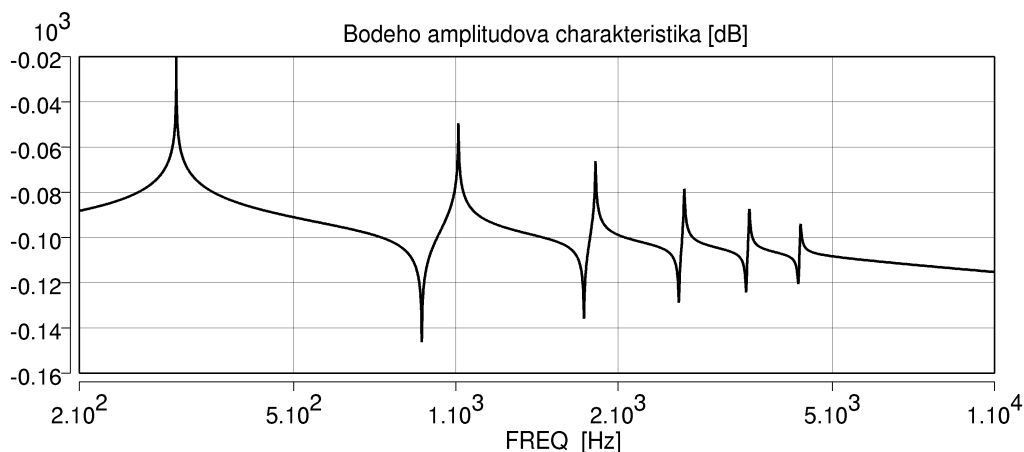
Obrázek 2: Ukázkový příklad a simulační model

Na obr. 3 jsou získané časové průběhy veličin – výchylky na volném konci tyče y_2 a reakční síly v uložení F_1 . V grafu průběhu reakční síly F_1 je v počátku dobře patrné dopravní zpoždění vyplývající z fázové rychlosti šíření podélné vlny.



Obrázek 3:

Obr. 4 znázorňuje amplitudo-frekvenční charakteristiku přenosu mezi budící silou F_2 a výchylkou y_2 . Vypočtené vlastní frekvence velice přesně odpovídají teoretickým hodnotám vypočítaným z frekvenční rovnice dle [1, strana 213](odchylky jsou způsobené chybou odečítání z grafů).



Obrázek 4:

Tabulka 1: Porovnání vlastních frekvencí

vl. frekvence	1	2	3	4	5
f_{teor} [Hz]	296	1003	1811	2651	3502
f_{vyp} [Hz]	302	1011	1816	2655	3507

4 Závěr

Popsaná metodika výpočtu je poměrně univerzální a je možné ji použít i na jiné typy vlnových rovnic, než jsou předmětem příspěvku.

References

- [1] R. Brebta, L. Půst, F. Turek. *Mechanické kmitání*. Sobotáles, Praha, 1994.
- [2] F. Jirásek, K. Kozel, J. Neustupa. *Vybrané statě z matematiky 2*. ČVUT, Praha, 1989.
- [3] R. Piché. *Systems with Distributed – Parameter Elements [online]*. Tampere University of Technology. Available on WWW: <http://icosym.cvut.cz/odl/partners/tut/unit3/>
- [4] H. Mann, M. Ševčenko. *Multipole Modeling and Simulation of Multidisciplinary Systems* Czech Technical University in Prague. Available on WWW: <http://icosym.cvut.cz/course/>

Tyto výsledky byly získány za finančního přispění Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci podpory projektu výzkumu a vývoje LN00B128.