



INFLUENCE OF GRAIN ORIENTATION ON THRESHOLD VALUES OF SHORT FATIGUE CRACKS

L. Náhlík¹, Z. Knésl²

Summary: *The influence of a grain boundary on the propagation of a fatigue crack is studied. To this aim the grain boundary is considered as an interface between two different materials with their elastic constants depending on the orientation of the adjacent grains. The main goal is to estimate the threshold value of a microstructurally short fatigue crack propagating through the grain boundary. The corresponding threshold values are calculated as a function of material parameters of grains. Corresponding modelling have been performed by combination of analytical and numerical approach. For numerical calculations the finite element system ANSYS has been used. The model describes only one of many aspects of short fatigue crack behaviour and the results obtained contribute to a better understanding of microstructural aspects of short fatigue crack growth.*

Key words: *fracture mechanics, fatigue crack growth, threshold values*

1. ÚVOD

Krátké únavové trhliny vykazují ve srovnání s dlouhými řadu anomálií. V případě krátkých únavových trhlin mikrostrukturálního typu, tj. trhlin jejichž velikost je srovnatelná s velikostí mikrostrukturální jednotky, může být jednou z příčin těchto anomálií interakce trhliny s hranicí zrna.

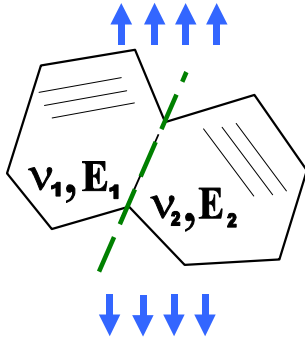
I když má materiál z makroskopického hlediska homogenní strukturu, z mikroskopického hlediska může být nehomogenní. Příkladem je mikroskopická nehomogenita v polykrystalickém materiálu způsobená existencí zrn. Z důvodu jejich odlišné orientace můžeme dvě sousední zrna chápat jako dva různé materiály. Hranice mezi zrny vytváří rozhraní mezi dvěma různými materiály a ovlivňuje tak rozdělení napětí v jejím okolí.

Problém, kterým se zabývá tento příspěvek je analýza šíření trhliny napříč zrnem, přičemž hranice mezi dvěma zrny je považována za rozhraní dvou různých elastických materiálů. Hlavním cílem je stanovení napětí σ_{crit} , potřebného k šíření trhliny přes hranici zrna, jako funkce elastických konstant zrn (viz. obr. 1). Příspěvek vychází z předpokladu, že hodnota σ_{crit} je primárně určena prahovou hodnotou pro šíření únavových trhlin.

Hodnota elastických konstant jednotlivých zrn závisí na jejich orientaci s ohledem na aplikované zatížení. Dvě sousední zrna s rozdílnou orientací reprezentují dva různé materiály, jejichž elastické konstanty vyjadřuje hodnota tzv. kompozitních parametrů bi-materiálového tělesa α a β [7], které

¹ Ing. Luboš Náhlík, Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žitkova 22, 616 62 Brno a
Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno
tel. +420 5 4163 6351, e-mail: nahlik@ipm.cz

² Prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc., Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žitkova 22, 616 62 Brno
tel. +420 5 4163 6358, e-mail: knesl@ipm.cz



Obr. 1 Přiřazení elastických konstant zrnům

závisí na elastických konstantách E_1, E_2 (modul pružnosti v tahu), ν_1, ν_2 (Poissonova konstanta) obou materiálů.

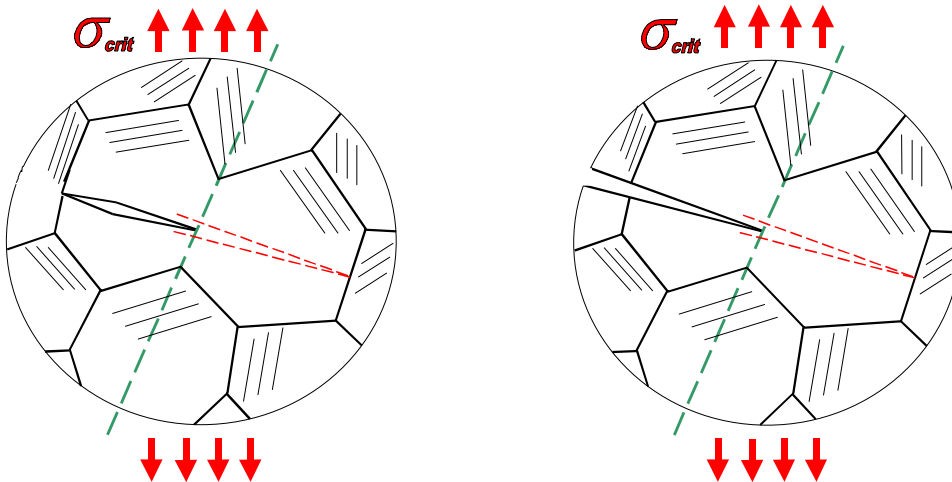
$$\alpha = \frac{E_1 \cdot \frac{1+\nu_1}{E_2 \cdot \frac{1+\nu_2}{4(1-\nu_1)}} - 1}{4(1-\nu_1)}, \quad \beta = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2} \quad (1)$$

Například v kubických krystalech je hodnota modulu pružnosti v tahu E_{hkl} ve směru $[hkl]$ dána

$$\frac{1}{E_{hkl}} = S_{1111} - (2S_{1111} - 2S_{1122} - 4S_{2323})[(\alpha_1\alpha_2)^2 + (\alpha_1\alpha_3)^2 + (\alpha_2\alpha_3)^2] \quad (2)$$

kde α_i jsou směrové kosiny, určující orientaci krystalu a S_{ijkl} jsou elastické moduly [9].

V dalším bude zrno, ve kterém se nachází trhlina a zrno, přes které by se měla trhlina dále šířit, považováno za izotropní a jejich elastické konstanty budou odpovídat anizotropii krystalů, způsobené různým směrem aplikovaného zatížení.



Obr. 2 Krátká a dlouhá trhlina s vrchole na hranici zrn

2. PODMÍNKY STABILITY TRHLINY S VRCHOLEM NA ROZHŘANÍ

Budeme předpokládat, že chování obou materiálů (zrn) je lineárně elastické a budeme aplikovat fenomenologický popis pro šíření dlouhých únavových trhlin na tento případ. Dále předpokládáme, že posuvy a příslušné složky tenzoru napětí jsou na rozhraní mezi dvěma zrnými spojitě. Jsou studovány

dva případy. V prvním je uvažována krátká trhlina s velikostí řádově okolních zrn, ve druhém pak polonekonečná trhlina v nekonečně velkém tělese s vrcholem na hranici zrna. Protože nejvíce nebezpečný pro další šíření trhliny je tahový mód zatížení, uvažujeme zatížení právě tímto módem. Všechna napětí se pohybují v lineární oblasti a předpokládáme platnost lineární lomové mechaniky.

3. TRHLINA NA BI-MATERIÁLOVÉM ROZHŘANÍ

Vliv rozhraní dvou materiálů na šíření trhlin byl a je studován v celé řadě prací z nejrůznějších aspektů. Rozhraní jednak ovlivňuje rozdělení napětí v uvažovaném tělese v makroskopickém měřítku a jednak mění charakteristiky popisující lokální rozložení napětí v okolí kořene trhliny. Na rozdíl od trhliny v homogenním tělese, kde je rozdělení napětí v okolí kořene trhliny typu $1/\sqrt{r}$, je pro trhlinu s vrcholem ležícím na materiálovém rozhraní odpovídající napětí typu $1/r^p$, kde r je vzdálenost od kořene trhliny a exponent singularity $0 < p < 1$ závisí na materiálových vlastnostech obou materiálů (zrn).

Rozdělení napětí v blízkosti vrcholu trhliny ležím na bi-materiálovém rozhraní (hranici zrn) můžeme symbolicky vyjádřit jako

$$\sigma \sim r^{-p}.$$

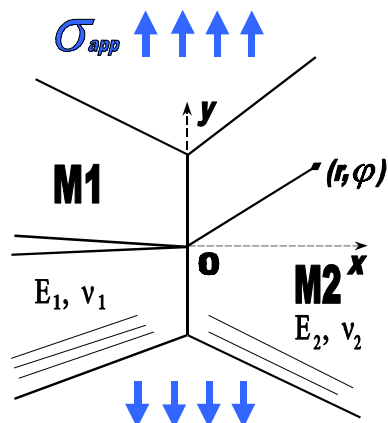
Rychlost šíření dlouhé únavové trhliny da/dN je funkcí rozkmitu faktoru intenzity napětí, např. [5]. Křivka závislosti rychlosti šíření únavové trhliny na rozkmitu faktoru intenzity napětí se v oblastech malých rychlostí blíží asymptoticky k prahové hodnotě K_{th} . Tato hodnota, která je pro zadané podmínky zatěžování materiálovou konstantou určuje úroveň vnějšího namáhání při kterém se únavová trhlina nebude šířit, tj. pro $\Delta K < K_{th}$ je rychlost šíření da/dN nulová.

Problém, který je v tomto příspěvku řešen je tedy následující: trhlina šířící se napříč materiálem zrna má vrchol na jeho hranici, viz obr. 2. Na základě znalosti makroskopické prahové hodnoty K_{th} pro šíření únavové trhliny v materiálu M2 a materiálových parametrů obou materiálů chceme stanovit lokální prahovou hodnotu pro šíření trhliny z rozhraní do materiálu M2. Na základě znalosti této veličiny pak určit pro dané podmínky zatěžování mezní hodnoty vnějšího napětí σ_{crit} tak, že pro $\sigma_{appl} < \sigma_{crit}$ se trhlina na rozhraní zastaví a nebude se dále šířit do materiálu (zrna) M2.

Existuje celá řada modelů, které vysvětlují existenci prahových hodnot z různých aspektů. V rámci mechaniky kontinua jsou to především modely, které uvádějí do relace existenci a velikost prahových hodnot s kritickými veličinami popisujícími v oblasti v okolí vrcholu trhliny např. energii, otevření trhliny, velikost plastických deformací případně velikost plastické zóny, např. [5,10]. V tomto příspěvku je jako určující veličina použita velikost plastické zóny na čele únavové trhliny a jako její kritická hodnota je předpokládána její velikost odpovídající prahové hodnotě namáhání v homogenním materiálu.

4. FORMULACE PROBLÉMU A JEHO ŘEŠENÍ

V tomto odstavci jsou uvedeny základní vztahy umožňující v rámci lineární elastické lomové mechaniky stanovit velikost plastické zóny pro trhlinu šířící se kolmo na bi-materiálové rozhraní a s vrcholem ležícím na tomto rozhraní. Kompletní numerická analýza napětí se v tomto případě skládá ze dvou kroků. V první fázi se analyticky stanoví tvar funkcí popisujících rozdělení napětí v blízkosti kořene trhliny včetně typu singularity. Toto řešení je dostatečně známo z literatury, např. [2,7,8]. V druhé fázi se pak numericky určí odpovídající konstanty úměrnosti, které závisí na velikosti vnějšího zatížení, geometrii a okrajových podmínkách. Pro výpočet této konstanty, která odpovídá faktoru intenzity napětí, je v této práci použita přímá metoda, např. [3].



Obr. 3 Souřadný systém před vrcholem trhliny

Pro složky napětí v okolí kořene trhliny ležícím na rozhraní dvou materiálů, viz. obr. 3, platí [7] (uvedeny jsou pouze výrazy pro materiál M2 a předpokládáme aproximaci rovinné deformace)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-p} \{ \lambda [(2f_R - g_R) \cos(\lambda - 1)\theta - (2f_I - g_I) \sin(\lambda - 1)\theta - \\
 &\quad - (\lambda - 1)(f_R \cos(\lambda - 3)\theta - f_I \sin(\lambda - 3)\theta)] \} \\
 \sigma_{yy} &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-p} \{ \lambda [(2f_R + g_R) \cos(\lambda - 1)\theta - (2f_I + g_I) \sin(\lambda - 1)\theta + \\
 &\quad + (\lambda - 1)(f_R \cos(\lambda - 3)\theta - f_I \sin(\lambda - 3)\theta)] \} \\
 \sigma_{xy} &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-p} \{ \lambda [g_R \sin(\lambda - 1)\theta + g_I \cos(\lambda - 1)\theta + \\
 &\quad + (\lambda - 1)(f_R \sin(\lambda - 3)\theta + f_I \cos(\lambda - 3)\theta)] \} \\
 \sigma_{zz} &= \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})
 \end{aligned} \tag{3}$$

kde H_I je velikost zobecněného faktoru intenzity napětí a ν Poissonova konstanta. Poznamenejme, že rozložení napětí je v tomto případě jednoznačně určeno hodnotou zobecněného faktoru intenzity napětí H_I a v případě homogenního tělesa je $H_I = K_I$.

Parametr λ získáme řešením charakteristické rovnice:

$$\sin(\lambda\pi) \left[\lambda^2 (-4\alpha^2 + 4\alpha\beta) + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha - \beta + 1 + (-2\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha + 2\beta) \cos \lambda\pi \right] = 0 \tag{4}$$

Hledaný exponent singularity napětí $p = 1 - \lambda$.

Ostatní konstanty potom jsou:

$$\begin{aligned}
 f_R &= 1, \quad f_I = g_I = 0 \\
 g_R &= \lambda - \cos \lambda\pi - \frac{\beta[\alpha + 2\lambda - (1 + 2\alpha - 4\alpha\lambda^2) \cos \lambda\pi + (1 + \alpha) \cos 2\lambda\pi]}{D(\lambda)}
 \end{aligned}$$

$$D(\lambda) = 1 + 2\alpha + 2\alpha^2 - 2(\alpha + \alpha^2) \cos \lambda\pi - 4\alpha^2 \lambda^2,$$

Hodnota parametru λ je omezena na interval $0 < \lambda < 1$ (zajímáme se pouze o singulární člen v rozvoji pro napětí).

Velikost plastické zóny je pak dán Misesovou podmínkou $\sigma_{\text{eff}} = \sigma_0$, a pro r_p (kde r_p je vzdálenost hranice plastické zóny od vrcholu trhliny) platí

$$r_p = \left(\frac{H_I}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{(-p+1)^2}{2\pi} [6g_R p (\sin(p\theta)\sin((-p-2)\theta) - \cos(p\theta)\cos((-p-2)\theta)) + 16v \cos(p\theta)^2 \left(v + \frac{1}{4v} - 1 \right) + 3(g_R^2 + p^2)] \right\}^{\frac{1}{2p}}, \quad (5)$$

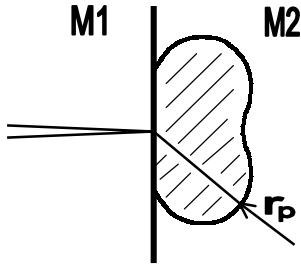
kde σ_0 je mez kluzu materiálu M2 . Velikost plastické zóny $R_p(H_I)$ získáme integrací výrazu (5).

5. VÝPOČET PRAHOVÉ HODNOTY H_{TH}

Na základě uvedených úvah budeme předpokládat, že kritickou veličinou pro odhad prahových hodnot je velikost plastické zóny odpovídající zatížení na úrovni prahové hodnoty pro daný materiál, tj. [11]

$$R_p = \left(\frac{K_{\text{th}}}{\sigma_0} \right)^4 f_{\text{hom}}(v) \quad (6)$$

$$f_{\text{hom}}(v) = \left[\frac{64(12v^4\pi - 24v^3\pi + 21v^2\pi - 9v\pi + 32v^4 - 64v^3 + 52v^2 - 20v + 3) + 123\pi}{1024\pi^2} \right]$$



Obr. 4 Plastická zóna před vrcholem trhliny

V případě trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů lze pak velikost plastické zóny analogicky vyjádřit ve tvaru (vztah je uveden pro kritickou velikost odpovídající prahové hodnotě zobecněného faktoru intenzity napětí $H_I = H_{\text{th}}$)

$$R_p = \left(\frac{H_{\text{th}}}{\sigma_0} \right)^{\frac{2}{p}} f(\alpha, \beta, v) \quad (7)$$

kde $f(\alpha, \beta, v)$ je známá funkce vzniklá integrací vztahu (5) . Hodnotu H_{th} určíme porovnáním obou vztahů, tj. platí

$$H_{\text{th}} = K_{\text{th}}^{2p} \sigma_0^{(1-2p)} \left[\frac{f_{\text{hom}}(v)}{f(\alpha, \beta, v)} \right]^{\frac{p}{2}} \quad (8)$$

Platí-li $H_I < H_{th}$ bude rychlost šíření únavové trhliny nulová, tj. únavová trhlina se trhlina se nebude šířit do materiálu M2 .

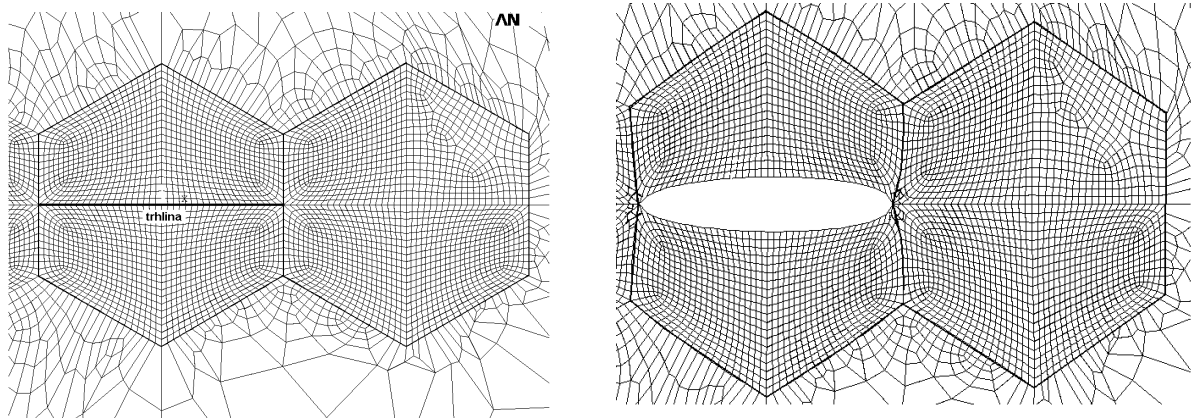
6. NUMERICKÝ POSTUP STANOVENÍ KRITICKÉHO NAPĚTÍ

K určení kritického napětí při němž se trhlina začne šířit přes hranice zrn je zapotřebí následujících kroků:

1. určit kompozitní parametry α , β a hodnotu exponentu singularity p ,
2. za pomoci systému MKP určit velikost složky napětí σ_{yy} ,
3. stanovit hodnotu zobecněného součinitele intensity napětí H_I pro zadané aplikované napětí σ_{appl} ,
4. z podmínky stability určit zda se bude trhlina dále šířit a určit kritické napětí, při kterém se trhlina začne šířit z rozhraní do sousedního zrna.

7. NUMERICKÝ PŘÍKLAD

Jako numerický případ ilustrující uvedený postup je provedeno srovnání kritických napětí pro šíření krátké a dlouhé trhliny v nekonečně velkém tělese. Detail sítě (deformované a nedeformované) je pro oba případy uveden na obr.5.6. Výsledné hodnoty vnějšího namáhání odpovídající prahovým hodnotám jsou v závislosti na materiálových parametrech uvedeny v tabulce 1. Vnější namáhání $\sigma_{appl} = 1 \text{ MPa}$ a $\sigma_0 = 300 \text{ MPa}$, $K_{th} = 5 \text{ MPa.m}^{1/2}$.



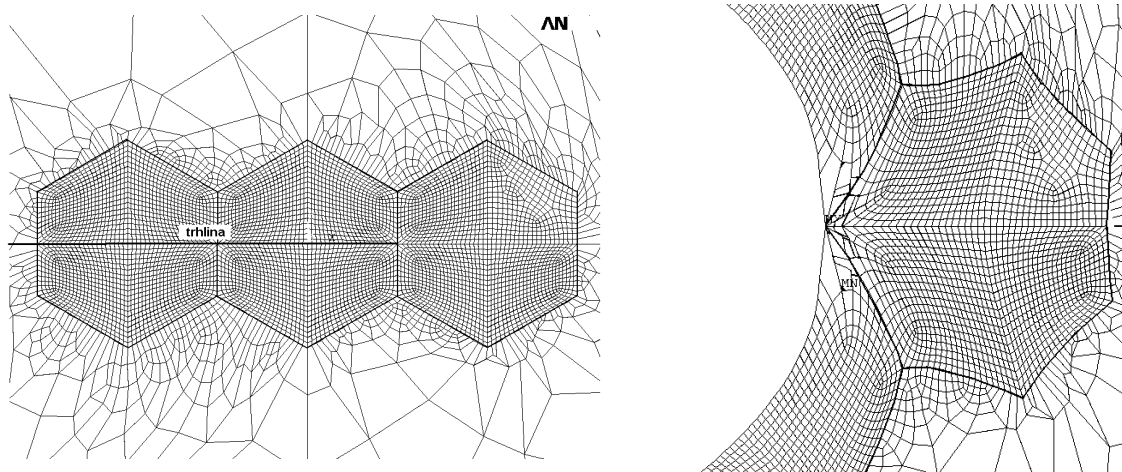
Obr. 5 MKP model krátké trhliny v nezatiženém a zatiženém stavu

Rozdílné chování dlouhých a krátkých trhlín můžeme popsat poměrem kritického napětí v nehomogenním případě a v případě homogenním takto

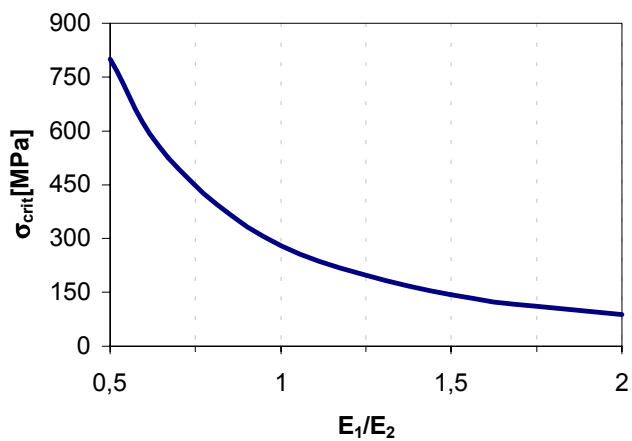
$$P = \frac{\sigma_{crit}(E_1/E_2)}{\sigma_{crit}(\text{hom})} \quad (9)$$

Tabulka 1. Výsledné hodnoty H_{th} a σ_{crit} pro různé poměry E_1/E_2 . Výpočet odpovídá rovinné deformaci, bylo zvoleno $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

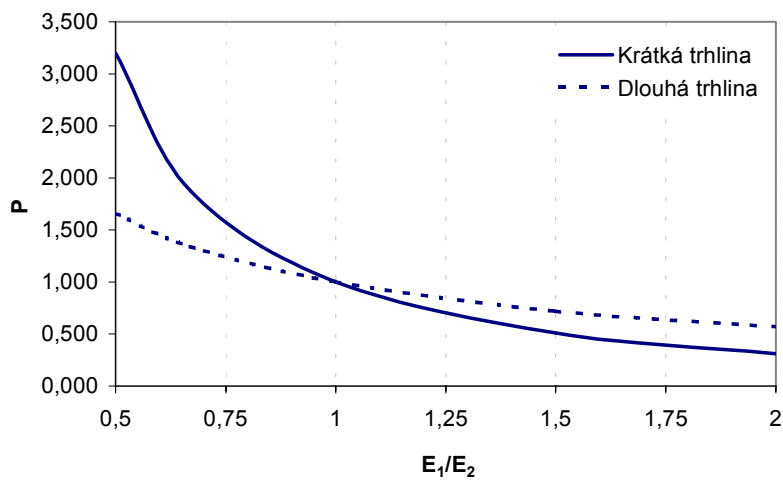
Krátká trhlina					Dlouhá trhlina				
E_1/E_2	H_I [MPa.m ^p]	H_{th} [MPa.m ^p]	σ_{crit} [MPa]	P	E_1/E_2	H_I [MPa.m ^p]	H_{th} [MPa.m ^p]	σ_{crit} [MPa]	P
0,50	0,028	22,24	800	3,20	0,50	1,20	13,26	11,10	1,66
0,67	0,023	12,30	525	1,88	0,67	1,00	9,01	9,00	1,34
1	0,018	5,00	280	1,00	1	0,75	5,00	6,70	1,00
1,50	0,013	1,91	144	0,51	1,50	0,55	2,66	4,80	0,72
2	0,011	0,94	88	0,31	2	0,44	1,66	3,80	0,57



Obr. 6 MKP model dlouhé trhliny v nezátženém a zatženém stavu



Obr. 5 Závislost kritického napětí σ_{crit} na poměru E_1/E_2 u krátké trhliny.



Obr. 6 Rozdíl v chování krátkých a dlouhých trhlín

8. ZÁVĚR

Byl navržen model zabývající se vlivem orientace zrn na šíření krátkých a dlouhých únavových trhlin přes hranice zrn. Hranice zrn mezi zrnem s trhlinou a zrnem přes které se trhlina bude šířit je uvažována jako rozhraní mezi dvěma různými elastickými materiály. Trhlina se bude šířit přes hranici zrn, dosáhne-li aplikované napětí hodnoty σ_{crit} . Při výpočtu kritického napětí bylo využito kombinace analytického a numerického přístupu. Přes všechna zjednodušení a omezení umožní tento přístup analyzovat vliv disorientace sousedních zrn (vyjádřené růzností materiálových konstant obou sousedních zrn) na lokální prahovou hodnotu popisující šíření krátké únavové trhliny z jednoho zrna do druhého a umožňuje tak stanovit spektrum mikroskopických, lokálních hodnot prahových napětí (příp. prahových hodnot zobecněného faktoru intenzity napětí), které se v studovaném materiálu mohou objevit. Tyto veličiny lze pak chápat jako prahové hodnoty pro šíření mikrostrukturálně krátké únavové trhliny.

Bylo ukázáno, že kritické napětí σ_{crit} před čelem trhliny potřebné k porušení zrna silně závisí na kompozitních parametrech obou sousedních zrn. Byl navržen postup umožňující určit velikost kritického napětí potřebného k porušení zrna jako funkce prahové hodnoty faktoru intenzity napětí pro makroskopicky homogenní materiál. Výsledky přispívají k lepšímu porozumění vlivu krátkých únavových trhlin na materiálové vlastnosti.

Poděkování: Tento příspěvek byl vypracován v rámci řešení grantu GA ČR č.101/99/0829.

9. LITERATURA

- [1] Atkinson, C. On the stress intensity factors associated with cracks interacting with an interface between two elastic media. *International Journal of Engineering Sciences*, **13**, 1975, pp. 489-504.
- [2] Fenner, D.N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. *International Journal of Fracture*, **12(5)**, 1976, pp. 705-721.
- [3] Hilton, P., D., Sih, G., C.: Applications of the finite element method to the calculations of stress intensity factors. Mechanics of fracture. Volume I: Methods of analysis and solutions of crack problems. Noordhoff International Publishing, Leyden 1973.
- [4] Jones, R.M. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis, 1998.
- [5] Klesnil, M., & Lukáš, P. *Fatigue of Metallic Materials*. Academia: Praha, 1992, pp. 112.
- [6] Knésl, Z., Knápek, A., & Bednář, K. Evaluation of the Critical Stress in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface. *Surface Modification Technologies*, **11**, 1998, pp. 153-159.
- [7] Lin, K., Y., & Mar, J., W. Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at a bi-material interface. *International Journal of Fracture*, **12(4)**, 1976, pp. 521-531.
- [8] Meguid, S., A., Tan, M., & Zhu, Z., H. Analysis of cracks perpendicular to bimaterial interfaces using a novel finite element. *International Journal of Fracture*, **73**, 1995, pp. 1-23.
- [9] *Mechanische Anisotropie*, ed.H.P.Stüwe, Springer-Verlag, Wien, 1974.
- [10] Suresh, S. *Fatigue of Materials*. Cambridge University Press: Cambridge, 1998, pp. 341.
- [11] Unger, D.J. Analytical fracture mechanics. Academic press: San Diego, London, New York, Boston, Sydney, Tokyo, Toronto, 1995.