



AN ANALYSIS OF VEHICLE HANDLING BY USING COMPUTER MODEL

Petr PORTEŠ*

***Summary:** This paper presents mathematical model of four-wheel-drive vehicle. Description of a vehicle is formulated by multibody formalism suitable for automatic generation of equations by computer. This enables to adjust model for purposes of car development and testing. Equations are derived for computing quasi steady state of vehicle accelerating during turning. This allows analysing vehicle behaviour by same way as is usual in studies of classic steady state turning. Model is also suitable for evaluating influence of traction force distribution on vehicle handling.*

1. Úvod

Ovladatelnost automobilu představuje jednu z nejvíce sledovaných oblastí při vývoji tohoto dopravního prostředku. Jízdní vlastnosti ovlivňují prodejnost vozidla, ale především bezpečnost jeho pohybu po veřejných komunikacích. V současné době je vývoj na takové úrovni, že jsou základní zákonitosti dobře známé (např. [1]), a proto se pokrok dosahuje hlavně v citlivé volbě parametrů automobilu, která musí být sladěna s chováním celého dynamického systému vozidla. Vedle měření v průběhu testovacích jízd je žádoucí analyzovat chování automobilu pomocí počítačových modelů jeho mechanického systému. Rozbor ovladatelnosti vozidla v ustálených stavech je jedním z nejvýznamnějších stádií jeho vývoje a tvoří východisko pro analýzu neustálených stavů.

Matematický model by měl být koncipovaný tak, aby reprezentoval skutečnost v takové míře, která je užitečná pro vývojové pracovníky. Pokud je záměrem využít modelových výpočtů nejen v etapě návrhu prvního prototypu, ale i v dalších stádiích vývoje, především v období doladování jízdních vlastností na základě testovacích jízd, jsou nároky na matematický model poměrně velké. Model by měl samozřejmě zahrnovat všechny důležité parametry vozu, jež ovlivňují sledované vlastnosti. Navíc by měla být zajištěna přímá korespondence mezi parametry vozu, které lze během testování měnit a vstupními, resp. výstupními parametry modelu. Např. výška středu klopení ovlivňuje klopnou tuhost nápravy a tím i chování vozu během průjezdu zatáčkou, avšak nastavení přesné hodnoty tohoto parametru na skutečném vozidle je velmi problematické, jelikož se jedná o vypočtenou veličinu z geometrie zavěšení kola. Z tohoto hlediska lépe vyhovují matematické modely založené na multibody formalismu, jež podrobně popisují geometrii modelovaného mechanismu, než jednodušší modely nahrazující podrobnější popis několika charakteristikami, resp. několika parametry.

2. MULTIBODY FORMALISMUS

K vytvoření matematického modelu vozidla byl použit z výše uvedených důvodů multibody formalismus. Základní rysy formalismu je možné zjednodušeně popsat. Modelovacími prvky

* Ing. Petr Porteš, Ph.D.: Ústav dopravní techniky, FSI VUT v Brně; Technická 2, 616 69 Brno; tel.: +420 5 41142269, fax: +420 5 41143939, e-mail: portes@ite.fme.vutbr.cz.

formalismu jsou kinematické dvojice, vazební a silové prvky. Zavedením kinematické dvojice do struktury mechanismu se do modelovaného systému přidá jedno těleso, příslušný počet relativních souřadnic $\mathbf{s}$ a sada rovnic popisující chování mechanismu odpovídající spojení dvou těles mechanismu kinematickou dvojicí. Rovnice popisují polohu obecného bodu $\mathbf{M}$ tělesa $\mathbf{i}$ (souřadného systému)

$$\mathbf{r}_0^M = \mathbf{C}_{0i} \cdot \mathbf{r}_i^M + \mathbf{r}_0^{C_i} \quad (1)$$

rychlost těžiště $\mathbf{C}_i$ tělesa $\mathbf{i}$

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{W}^i \cdot \mathbf{s} \quad (2)$$

zrychlení těžiště $\mathbf{C}_i$ tělesa $\mathbf{i}$

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{W}^i \cdot \mathbf{s} + \mathbf{\kappa}^i \quad (3)$$

Ke spojení otevřených kinematických řetězců v uzavřené slouží vazební prvky, které odpovídají typům kinematických dvojic, ve kterých došlo k rozpojení uzavřeného řetězce. Prostřednictvím těchto prvků se matematický model doplní o soustavu vazebních rovnic

$$f(\mathbf{s}, t) = \mathbf{0} \quad (4)$$

Jejich první derivace

$$\mathbf{W}_{uz} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{W}_{uq} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5)$$

a druhá derivace

$$\mathbf{W}_{uz} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{W}_{uq} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\kappa}_u = \mathbf{0} \quad (6)$$

slouží k výpočtu závislých souřadnic $\mathbf{z}$ v závislosti na nezávislých souřadnicích $\mathbf{q}$ podle rovnice (4) a k odvození závislosti první a druhé derivace závislých souřadnic na první, resp. druhé derivaci nezávislých souřadnic.

Závislé souřadnice je možné pro zvolené nezávislé souřadnice vypočítat např. Newtonovou-Raphsonovou iterační metodou. Metoda je založena na rozvinutí rovnice (4) v Taylorovu řadu v bodě přibližného řešení. Členy vyššího řádu než jedna jsou zanedbány

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \delta\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t) + \mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{z} + O(\delta\mathbf{z}^2) = \mathbf{0} \quad (7)$$

kde Jacobiova matice $\mathbf{J}$ je rovna matici $\mathbf{W}_{uz}$ z rovnice (5).

Pro první derivaci všech souřadnic dle rovnice (5) platí

$$\mathbf{s} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{q} \quad (8)$$

a pro druhou derivaci dle rovnice (6) platí

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \quad (9)$$

kde

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{W}_{uz}^{-1} \cdot \mathbf{W}_{uq})^T & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{W}_{uz}^{-1} \cdot \boldsymbol{\kappa}_u)^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \quad (11)$$

Matice $\mathbf{T}$ ve výše uvedených výrazech slouží pouze k převodu uspořádaného vektoru závislých a nezávislých souřadnic na původní vektor souřadnic $\mathbf{s}$.

Na každé těleso působí setrvačné silové účinky

$$\mathbf{f}_s^i = -\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{W}^i \cdot \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{M}^i \cdot \boldsymbol{\kappa}^i - \mathbf{b}^i \quad (12)$$

a dále silové účinky od silových prvků, jež jsou dalším typem nehmotných modelovacích prvků tohoto formalismu:

$$\mathbf{f}_p^i = \sum_{k=1}^{N_k^i} \mathbf{F}_k^i \cdot \mathbf{f}_k \quad (13)$$

Vzhledem k použité metodě, není nutné vyjadřovat reakce v ideálních kinematických dvojicích.

Pohybové rovnice jsou odvozené na základě principu virtuálních výkonů

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{P}_p^i + \mathbf{P}_s^i) = (\dot{\mathbf{s}})^T \cdot \left[\sum_{i=1}^N (\mathbf{W}^i)^T \cdot \mathbf{f}_p^i - \sum_{i=1}^N (\mathbf{W}^i)^T \cdot (\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{W}^i \cdot \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{M}^i \cdot \boldsymbol{\kappa}^i + \mathbf{b}^i) \right] = \mathbf{0} \quad (14)$$

Úspornější zápis rovnice (14)

$$\dot{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{K}_o \cdot \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{p}_o) = \mathbf{0} \quad (15)$$

se dostane zavedením matice

$$\mathbf{K}_o = \sum_{i=1}^N (\mathbf{W}^i)^T \cdot \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{W}^i \quad (16)$$

a vektoru

$$\mathbf{p}_o = \sum_{i=1}^N (\mathbf{W}^i)^T \cdot \mathbf{f}_p^i - \sum_{i=1}^N (\mathbf{W}^i)^T \cdot (\mathbf{M}^i \cdot \boldsymbol{\kappa}^i + \mathbf{b}^i) \quad (17)$$

Pohybové rovnice se získají dosazením za první a druhou derivaci vektoru $\mathbf{s}$ podle rovnic (8) a (9) do vztahu (15). Po úpravách vyjde výsledný tvar pohybových rovnic

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_o \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_o \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{p}_o \quad (18)$$

Výše popsáný formalismus je vhodný pro algoritmizaci generace rovnic na počítači.

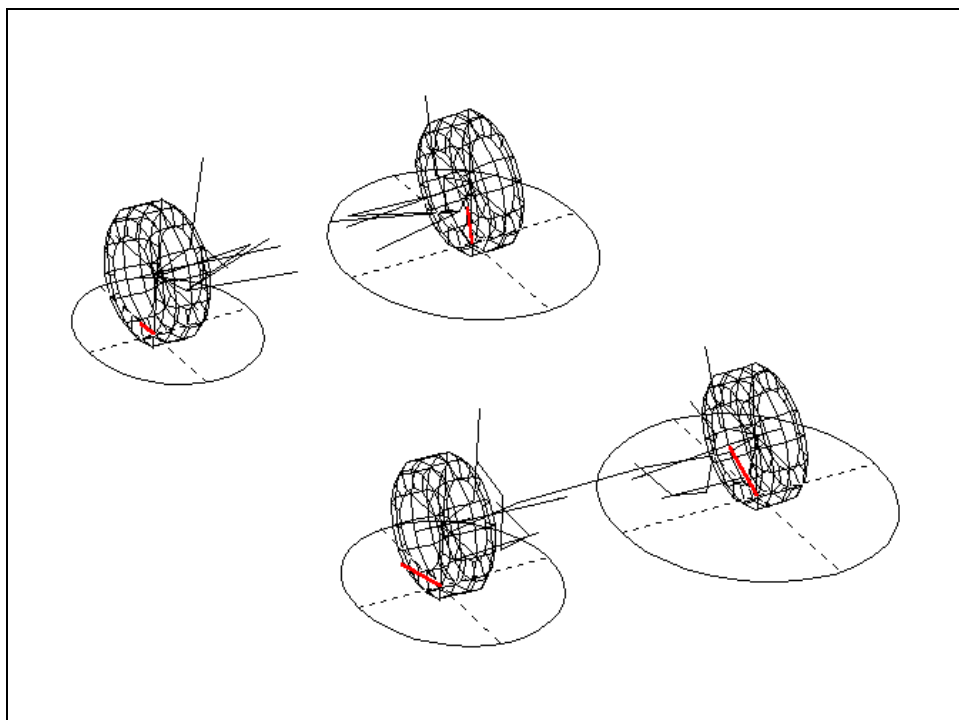
3. MODELOVANÝ MECHANISMUS

Modelované vozidlo je automobil s pohonem všech čtyř kol. Přední i zadní náprava je typu McPherson. Obě nápravy jsou vybaveny torzním stabilizátorem. Všechna pryžová uložení (silentbloky) jsou nahrazena relativně tuhými kulovými klouby. Řízení je hřebenové. Samosvornost všech diferenciálů, tj. předního, zadního i mezinápravového, je seřiditelná.

Matematický model vozidla je složen z 28 těles spojených 8 sférickými, 8 rotačními a 9 translačními kinematickými dvojicemi. Otevřené řetězce jsou spojeny (uzavřeny) prostřednictvím vazebních prvků: 8 typu bod, a 12 typu tyč. Vazební prvek bod předepisuje dvěma bodům umístěným na dvou různých tělesech stejnou polohu v prostoru. Tato vazba odpovídá sférické kinematické dvojici a může generovat jednu až tři vazební podmínky. V popisovaném modelu je použito čtyř vazeb se dvěma aktivními a čtyř vazeb se třemi aktivními vazebními rovnicemi. Vazební prvek tyč předepisuje stejnou vzdálenost dvěma bodům v prostoru a odpovídá mu jedna vazební rovnice.

Sílové prvky modelují nelineární vlastnosti pneumatik, dovolují definovat jak lineární, tak i nelineární pružiny a aerodynamické účinky. Vzhledem k tomu, že matematický model je v tomto případě určen pro analýzu ustálených stavů, nebylo potřeba modelovat vlastnosti tlumičů. Sílové účinky hnacích hřídelí, mající vliv na velikost sil působících na volant jsou rovněž modelovány. Velikost hnacích, respektive brzdných momentů působících na jednotlivá kola je určena pomocí konstant určujících procentuální rozdělení hnacího momentu mezi přední a zadní nápravu a procentuální rozdělení mezi levým a pravým kolem přední, resp. zadní nápravy.

Kromě samotného modelu vozidla obsahuje model soustavy mechanismus, jehož účelem je vedení automobilu po kruhové dráze. Tento mechanismus se skládá ze dvou nehmotných těles. Těleso TWR má 2 stupně volnosti. Může rotovat okolo svislé osy procházející středem zatáčení vozidla a posouvat se svisle ve směru této osy a tím měnit svoji výšku podle aktuální výšky odpružené hmoty



Obr. 1 Modelovaný mechanismus automobilu - tečné zrychlení 0.6 g, dostředivé zrychlení 0.7 g, rychlost 100 km/h

vozidla. Těleso ARM se vůči tělesu může posouvat ve vodorovném směru, a určuje poloměr zatáčení vozidla.

Výše uvedený model, včetně pomocného vodičího mechanismu, má 15 stupňů volnosti, 15 nezávislých a 32 závislých souřadnic.

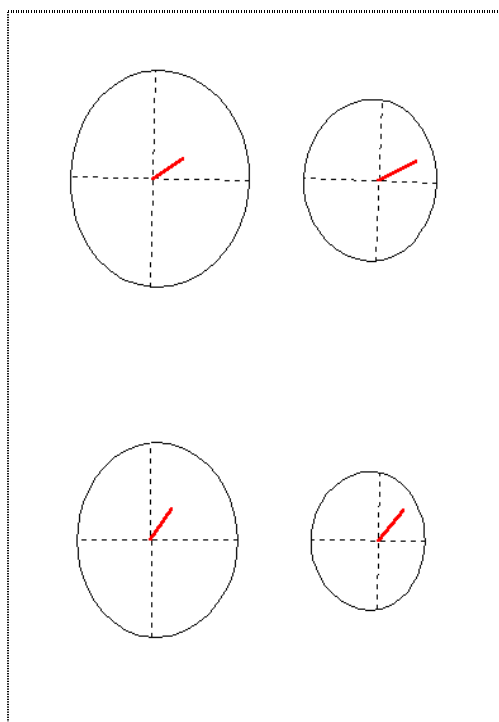
4. POPIS KVAZI USTÁLENÉHO STAVU VOZIDLA

Jedním ze základních testů prováděných na vozidle je jízda automobilu po kruhové dráze s konstantním poloměrem zatáčení a konstantní rychlostí. Tento test poskytuje vývojovým pracovníkům řadu užitečných informací o směrových vlastnostech automobilu. Znalost dynamických poměrů na celém vozidle během tohoto ustáleného stavu umožňuje např. správně sladit vzájemné poměry tuhostí jednotlivých pružin a stabilizátorů. Matematický popis ustáleného stavu vozidla při jízdě po kruhové dráze je možné získat přímo z rovnice (18) dosazením za druhé derivace vektoru nezávislých souřadnic $\mathbf{q}$ hodnotu 0

$$-\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_o \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{p}_o = \mathbf{0} \quad (19)$$

Přes výše zmíněnou užitečnost nelze na základě tohoto testu, resp. řešením rovnice (19) studovat vliv hnacích nebo brzdných sil na směrové vlastnosti automobilu. Zavedením vhodných předpokladů, lze na základě rovnice (18) získat popis vozidla odpovídající stavu, kdy se vozidlo ve vyšetřovaném krátkém okamžiku pohybuje určitou rychlostí s konstantním zrychlením nebo zpomalením po kruhové dráze s konstantním poloměrem. Těmito předpoklady jsou viz [2]:

- řidič ve velmi krátkém čase přizpůsobí úhel natočení volantu tak, aby se vozidlo pohybovalo po stále stejné kruhové dráze
- přechodová odezva způsobená rotačními pohyby vozidla, kloněním a klopením je zanedbatelná
- ve vyšetřovaném krátkém okamžiku je změna rychlosti rovněž dostatečně malá a může být zanedbána



Obr. 2 Síly působící na pneumatiky a třecí elipsy - tečné zrychlení 0.6 g, dostředivé zrychlení 0.7 g, rychlost 100 km/h

Za těchto předpokladů lze získat z matematického popisu obdobné charakteristiky jako pro ustálenou jízdu v kruhu, avšak nyní pro vozidlo zrychlující nebo zpomalující během jízdy v zatáčce. Pokud k výsledkům přistupujeme jako k teoretickému stavu, ke kterému se vozidlo během jízdy v zatáčce snaží více či méně přiblížit podle razantnosti manévru, nemusí nedodržení výše uvedených předpokladů nutně vést ke ztrátě užitečnosti výpočtem získaných informací.

Rovnice (18) lze převést na řešení kvazi ustáleného stavu určením složek vektoru druhých derivací nezávislých souřadnic. Velikost úhlových zrychlení rotace kol má vliv na velikost hnacích, resp. brzdných momentů, avšak nemá přímý vliv na stav

vozidla jako celku. Proto pokud nám nejde o určení zmíněných momentů můžeme je zvolit. Ostatní zrychlení jsou nulová až na úhlové zrychlení tělesa TWR, které musí odpovídat požadovanému tečnému zrychlení a poloměru zatáčení

$$\beta_{GRND}^{TWR} = a_t / R \quad (20)$$

Výsledný kvazi ustálený stav získáme výpočtem soustavy (18) jako soustavy nelineárních rovnic. Na obr. 1 je ukázán modelovaný mechanismus a na obr. 2 silové účinky včetně třecích elips ve vypočteném stavu odpovídajícímu tečné rychlosti 100 km/h, dostředivému zrychlení 0.7 g a tečnému zrychlení 0.6 g.

5. ZÁVĚR

Příspěvek prezentuje matematický model chování vozidla. Model je koncipován tak, aby byl účelně využitelný jak v první etapě vývoje, kdy automobil ještě fyzicky neexistuje, tak i v dalších etapách při testování automobilu. Matematický model je formulován s využitím multibody formalismu, který je vhodný pro automatickou generaci rovnic počítačovým programem. To dovoluje přizpůsobit model zkoumanému vozidlu a jeho parametrům, resp. seřizovacím prvkům. Je koncipován způsobem, jenž umožňuje model využít nejen k výpočtu ustálené jízdy po kruhové dráze, ale i k analýze chování vozidla během kvazi ustálených stavů - akcelerace vozidla při jízdě po kruhové dráze. Tím je umožněno studovat ovladatelnost vozidla i za podmínek podélné a příčné dynamiky vozidla, způsobem obvyklým pro analýzu ustálené jízdy v kruhu při jízdě konstantní rychlostí. Model je rovněž vhodný pro stanovení vlivu rozdělení hnacích sil na jízdní vlastnosti vozidla.

6. LITERATURA

- [1] Vlk F.: Dynamika motorových vozidel. VLK, Brno, 2000.
- [2] Abe M.: Effects of Traction Force Distribution Control with Additional Rear Wheel Steer on Turning Behavior of 4WD Vehicle. In: Proc. 10th IAVSD Symposium 1987.