

# A INFLUENCE OF OUT-OF-PHASE COMBINED LOADING

Jaroslav SVOBODA, Martin VÁCLAVÍK\*

**Summary:** *The paper deals with a problem of finding a fatigue limit criterion for components subjected to combined out-of-phase loading. The combination of fully reversed tension-compression and torsion is considered. Phase shift  $\frac{\pi}{2}$  of torsion loading is presented as an example. A fatigue limit criterion of notched specimens is presented too. An eligibility of application of composed stresses limit ellipse is also covered.*

**Key words:** *fatigue, fatigue limit criterion, non-proportional loading*

## 1 Úvod

Práce provedená v rámci řešení grantu 101/99/0103 navazuje na předchozí práce, které se zabývaly vlivem soufázového kombinovaného namáhání na životnost hladkých leštěných vzorků z normalizačně žíhané oceli ČSN 41 1523. V praxi však dochází často k situaci, kdy oba druhy namáhání nepůsobí ve fázi, nýbrž s určitým fázovým posuvem, případně s různou frekvencí, různě velkou složkou statického předpětí nebo odlišným tvarem kmitů. V daném případě budeme předpokládat opět harmonický průběh zatěžování kombinací střídavého tahu-tlaku a střídavého krutu se stejnou frekvencí. Složka krutu bude fázově posunuta o hodnotu  $\frac{\pi}{2}$  vůči tahu-tlaku. Pro tento způsob zatěžování bude proveden rozbor napjatosti a ověřeny (porovnáním s experimentem) vhodné hypotézy pro výpočet mezního napětí.

## 2 Experimentální materiál

Stejně jako v předchozích pracích budou použity výsledky experimentálních únavových zkoušek provedených na hladkých leštěných tyčích kruhového průřezu  $\phi 20$  mm vyrobených z normalizačně žíhané nízkouhlíkové oceli ČSN 41 1523. Mechanické vlastnosti oceli jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: *Mechanické vlastnosti*

Ocel ČSN 41 1523.1					
$R_e$ [MPa]	$R_m$ [MPa]	A [%]	Z [%]	$\sigma_c$ [MPa]	$\tau_c$ [MPa]
359	573	29,2	65,2	240	160

## 3 Rozbor napjatosti

Časový průběh obou složek namáhání  $\sigma_x$  a  $\tau_k$  lze pro sledovaný způsob zatížení vyjádřit rovnicemi

$$\sigma_x = \sigma_{xa} \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

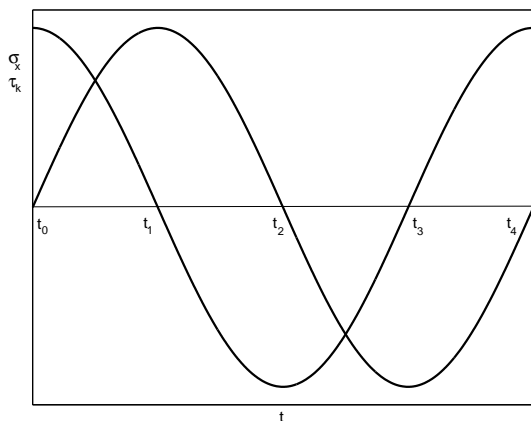
$$\tau_k = \tau_{ka} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

kde  $\sigma_{xa}$  a  $\tau_{ka}$  jsou maximální amplitudy napětí od jednotlivých složek působícího zatížení a  $\varphi$  je úhel fázového posunutí, který byl v daném případě zvolen  $\frac{\pi}{2}$ . Časový průběh obou složek

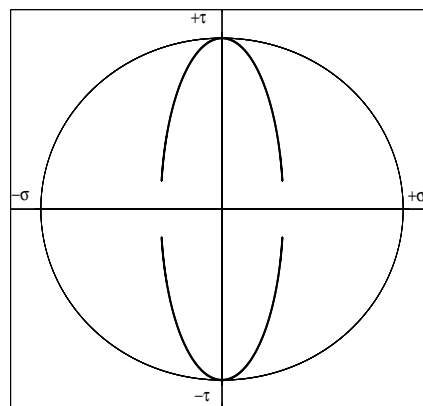
\*Ing. Jaroslav SVOBODA, Ing. Martin VÁCLAVÍK, Ústav termomechaniky AVČR, CDM, Veveřská 11, 301 14 Plzeň; tel. +420 19 7236415, fax: +420 19 7220787, e-mail: mvaclavi@cdm.it.cas.cz

$\sigma_x$  a  $\tau_k$  je zobrazen na obr. 1. Z obrázku je vidět průběh namáhání zkušební tyčky. Postupně je namáhána:

- v čase  $t_0$  čistým krutem s velikostí napětí  $\tau_{ka}$
- v čase  $t_1$  čistým tahem s velikostí napětí  $\sigma_{xa}$
- v čase  $t_2$  čistým krutem s velikostí napětí  $-\tau_{ka}$
- v čase  $t_3$  čistým tlakem s velikostí napětí  $-\sigma_{xa}$ .



Obrázek 1: Časový průběh zatěžování



Obrázek 2: Průběh maximálních smykových napětí během 1 cyklu (pro  $\lambda = \frac{\tau_{ka}}{\sigma_{xa}} = 3$ )

V Mohrově kružnici těmto časovým okamžikům odpovídají maximální smyková napětí:

- v čase  $t_0 \dots \tau_{max} = \tau_{ka}$
- v čase  $t_1 \dots \tau_{max} = \frac{\sigma_{xa}}{2}$
- v čase  $t_2 \dots \tau_{max} = -\tau_{ka}$
- v čase  $t_3 \dots \tau_{max} = -\frac{\sigma_{xa}}{2}$ .

Tato napětí působí v rovině pootočené o úhel  $\alpha = 45^\circ$  od roviny hlavních napětí. Při kmitání s fázovým posuvem složek namáhání se bude v každém časovém okamžiku měnit úhel natočení roviny hlavních napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ . Proto lze uvedený způsob zatěžování považovat již za případ neproporcionálního zatížení. Současně s natáčením roviny hlavních napětí se bude měnit rovněž natočení roviny největšího smykového napětí, jak je zřejmé z obr. 2. Z Mohrovy kružnice pro kombinaci tahu-tlaku a krutu plyne, že

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_k^2} = \frac{\sigma_x}{2} \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau_k}{\sigma_x}\right)^2}. \quad (3)$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu za  $\sigma_x$  a  $\tau_k$  hodnoty z rovnic 1 a 2, dostaneme po úpravách vztah

$$|\tau_{max}| = k \sqrt{\sin^2 \omega t + 4\lambda^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}, \quad (4)$$

ve kterém jsou označeny konstanty

$$\lambda = \frac{\tau_{ka}}{\sigma_{xa}}, \quad k = \frac{\sigma_{xa}}{2}.$$

Z rovnice 4 vyplývá, že  $\tau_{max}$  závisí nejen na poměru funkcí sinu příslušných úhlů, ale rovněž na poměru maximálních amplitud obou působících namáhání. Hodnota  $\tau_{max}$  se bude s rostoucím poměrem  $\lambda$  zvyšovat. Na obr. 3 je zobrazen průběh poměru  $\frac{|\tau_{max}|}{\sigma_{xa}}$  pro jeden zatěžovací cykl pro různé hodnoty poměru  $\lambda$ .

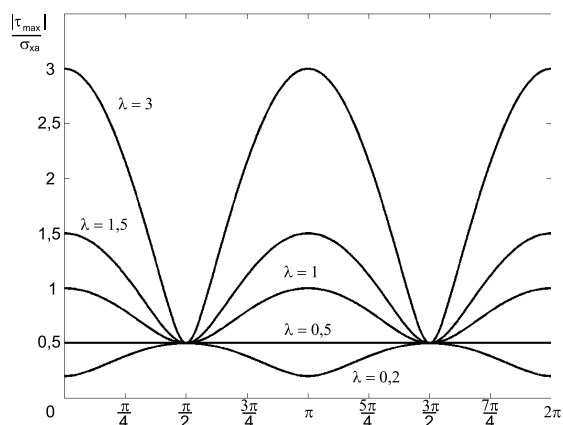
Jak jsme již uvedli, při kombinovaném namáhání s fázovým posuvem jednotlivých složek zatížení se mění směr a velikost hlavních napětí. Z Mohrovy kružnice pro kombinaci tahu (tlaku) a krutu lze pro velikosti těchto hlavních napětí odvodit následující výrazy

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_k^2}, \quad (5)$$

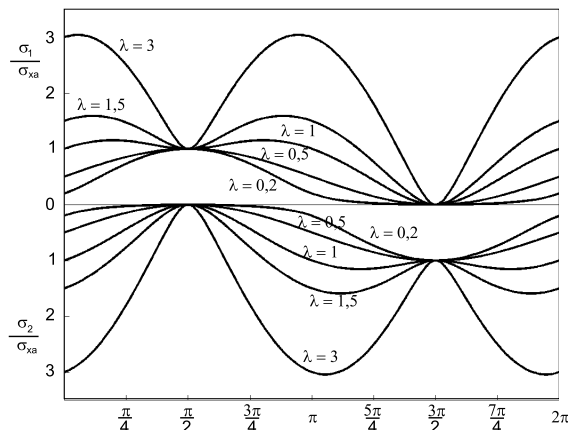
které lze dosazením vztahů (1) a (2) upravit na tvar

$$\sigma_{1,2} = k \cdot \sin \omega t \pm k \sqrt{\sin^2 \omega t + 4\lambda^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}. \quad (6)$$

Z těchto vztahů je zřejmé, že velikost hlavních napětí se v průběhu sinusového cyklu mění a je ovlivněna rovněž poměrem maximálních amplitud napětí v tahu (tlaku) a krutu.



Obrázek 3: Průběh poměru  $\frac{|\tau_{max}|}{\sigma_{xa}}$  pro jeden zatěžovací cyklus



Obrázek 4: Průběh hlavních napětí při jednom cyklu

Pro úhel natočení roviny hlavních napětí lze opět z Mohrovy kružnice odvodit vztah

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_k}{\sigma_x} = \frac{2\tau_{ka} \cdot \sin(\omega t + \varphi)}{\sigma_{xa} \cdot \sin \omega t} = 2\lambda \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sin \omega t}. \quad (7)$$

Průběh hlavních napětí a úhlu natočení jejich roviny je pro různé poměry  $\lambda$  uveden na obr. 4. Z obrázku vyplývá, že úroveň hlavních napětí a poloha jejich maxim závisí na poměru  $\lambda$ . Do poměru  $\lambda < 1$  se nachází maximum napětí  $\sigma_1$  při hodnotě  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , pro  $\lambda = 1$  při hodnotách  $\frac{\pi}{4}$  a  $\frac{3\pi}{4}$  a u poměrů  $\lambda > 1$  při  $\omega t = 0, \pi, 2\pi$ . U druhého hlavního napětí  $\sigma_2$  je tato závislost shodná.

#### 4 Stanovení mezních amplitud napětí

Podobně jako v případě soufázového zatěžování provedeme rovněž pro případ zvoleného fázového posuvu (posunutí krutu o hodnotu  $\frac{\pi}{2}$  oproti tahu-tlaku) pro sledované poměry  $\lambda$  výpočet mezních napětí z rovnice pro eliptický oblouk

$$\left(\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ka}}{\tau_c}\right)^2 = 1 \quad (8)$$

a provedeme jejich porovnání s hodnotami získanými experimentálně. Výsledky tohoto porovnání jsou uvedeny v tab. 2. Z tabulky vyplývá, že teoreticky zjištěné mezní hodnoty napětí na základě rovnice eliptického oblouku (podle hypotézy HMH) se v případě fázově posunutého kombinovaného zatěžování poměrně značně odlišují od experimentálně zjištěných hodnot. Pro sledované poměry  $\lambda$  se tyto rozdíly pohybují od 6 do 14%.

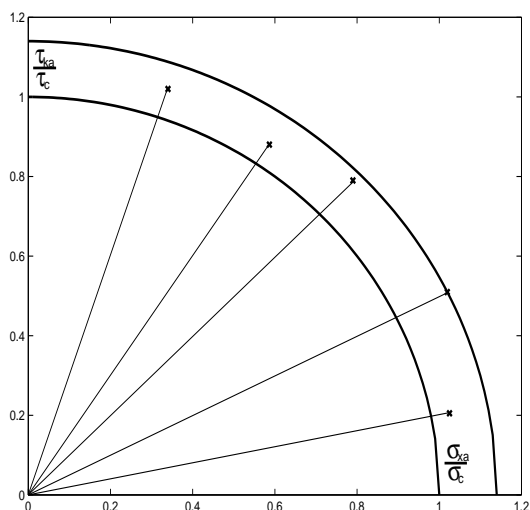
Jestliže zakreslíme všechny experimentální body do obrázku (viz. obr. 5) vidíme, že se všechny body nachází vně mezného oblouku. Tento výpočet proto leží na straně vyšší bezpečnosti. Mezný oblouk, který by tvořil obálku všech experimentálních bodů, by měl rovnici

$$\left(\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ka}}{\tau_c}\right)^2 = 1,14^2. \quad (9)$$

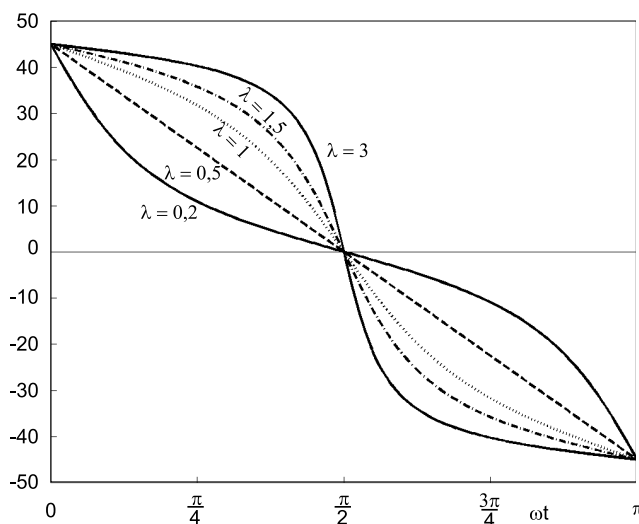
Tabulka 2: Porovnání teoretických a experimentálních hodnot  $\sigma_c^{red}$

	$\lambda = \frac{\tau_{ka}}{\sigma_{xa}}$				
	0,2	0,5	1	1,5	3
$\sigma_c^{red}$ [MPa] - teoret.	235	214,7	188	175,8	164,4
$\sigma_c^{red}$ [MPa] - experim.	250,9	245,1	219,2	187,8	179,3

V průběhu každého sinusového cyklu zatížení se v případě fázového posuvu složek zatížení mění směr i velikost hlavních napětí. Je zřejmé, že časový průběh maximálních hodnot těchto napětí je závislý rovněž na poměru  $\lambda$ . Dosadíme-li do vztahů pro hlavní napětí za  $\sigma_{xa}$  pro jednotlivé poměry  $\lambda$  mezní hodnoty napětí odpovídající mezním redukovaným napětím  $\sigma_c^{red}$  uvedeným v tabulce 2, lze vypočítat pro libovolný časový okamžik velikost mezních hlavních napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ . Průběhy hlavních napětí pro teoreticky vypočítané mezní hodnoty jsou na obr. 7. Na obr. 6 je průběh úhlu natočení roviny hlavních napětí v závislosti na čase pro různé poměry  $\lambda$ . Z průběhu hlavního napětí  $\sigma_1$  na obr. 7 vyplývá, že v případě fázového posuvu složek tahu-tlaku a krutu o hodnotu  $\frac{\pi}{2}$  se mezní hodnota tohoto napětí přimyká hodnotám meze únavy  $\sigma_c$  pro tahu-tlak při poměru  $\lambda = 0,2$  a mezi únavy v krutu  $\tau_c$  při poměru  $\lambda = 3$ . Pro tyto dva poměry  $\lambda$  by tedy bylo možné pro výpočet bezpečnosti nalézt extrém funkce  $\sigma_1$  a bezpečnost vypočítat ze vztahu  $n = \frac{\sigma_c}{\sigma_1^{max}}$  pro  $\lambda = 0,2$  a  $n = \frac{\tau_c}{\sigma_1^{max}}$  pro  $\lambda = 3$ .



Obrázek 5: Mezný oblouk experimentálně zjištěných hodnot



Obrázek 6: Průběh úhlu natočení roviny hlavních napětí (za polovinu cyklu)

## 5 Stanovení mezních amplitud napětí u konstrukcí s vrubem

Uvedený rozbor se týkal vlivu fázového posuvu na hodnotu mezních napětí  $\sigma_c^{red}$  pro případ hladkých leštěných vzorků. Podívejme se nyní jaká bude situace v případě součástí s vruby.

Jednoduchá zatížení vedou u vrubovaných součástí obecně k lokálnímu víceosému stavu napjatosti. Příkladem může být kruhová tyčka s obvodovou drážkou. V našem případě

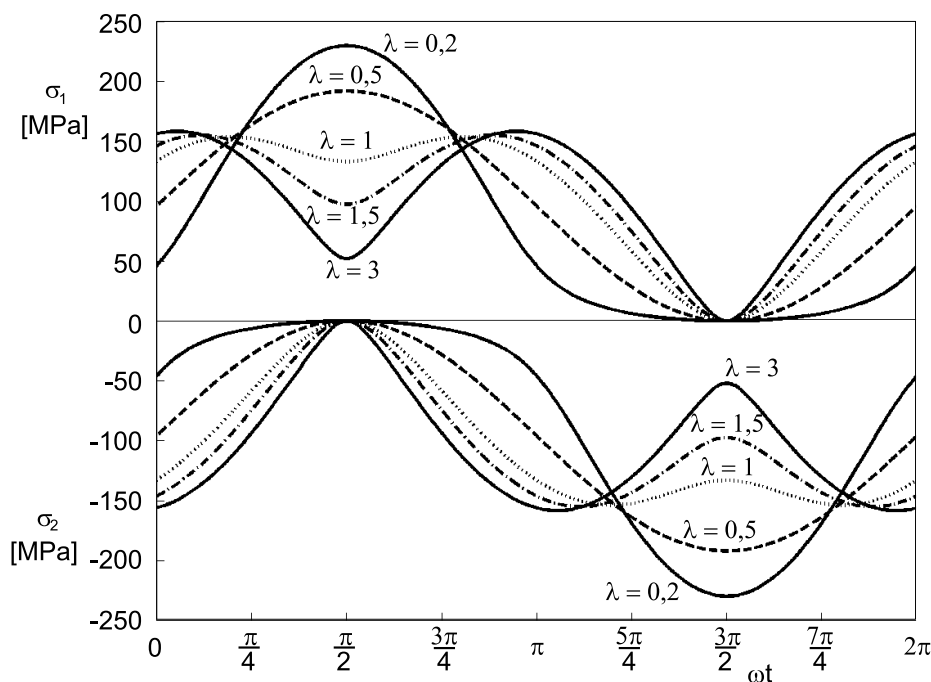
byla problematika studována na tyčkách o průměru 20 mm s obvodovou drážkou o poloměru  $R=1$  mm a hloubce  $h=1$  mm, vyrobených rovněž z materiálu ČSN 41 1523.1. Tyčky byly zatěžovány kombinací tahu-tlaku a krutu. Experimentálně byly zjištěny hodnoty meze únavy těchto vrubovaných vzorků pro tah-tlak i pro krut. Získány byly následující hodnoty:

- pro případ tahu-tlaku  $\sigma_c^* = 110$  MPa
- pro případ krutu  $\tau_c^* = 130$  MPa.

Těmto hodnotám odpovídají součinitele vrubu  $\beta_t$  pro tah-tlak a  $\beta_k$  pro krut:

- pro tah-tlak  $\beta_t = \frac{\sigma_c}{\sigma_c^*} = \frac{240}{110} = 2,182$
- pro krut  $\beta_k = \frac{\tau_c}{\tau_c^*} = \frac{160}{130} = 1,231$ .

Pro vyšetření skutečného napětí a jeho rozložení ve vrubu by bylo třeba provést důkladnou



Obrázek 7: Průběh hlavních napětí pro teoreticky vypočítané mezní hodnoty

elastoplastickou analýzu napjatosti, neboť již na úrovni únavové pevnosti musí být počítáno s plastickým střídavým přetvářením. Obecná přibližná metoda jako je např. Neuberův vztah pro jednoosou napjatost není dosud pro víceosé namáhání k dispozici. Proto Liu a Zenner [2] navrhují pro zjednodušení vyjít z předpokladu, že při víceosém zatížení vrubovaných součástí je lokální rozdělení napětí z hlediska opěrného působení stejné. Rozdíly mezi napětím vypočteným na základě teorie pružnosti a skutečným napětím působícím v kořeni vrubu se zohlední pro jednotlivá působící zatížení pomocí součinitelů vrubu  $\beta$  (v našem případě  $\beta_t$  a  $\beta_k$ ), případně opěrných součinitelů. Pro eliptický oblouk mezních redukovaných napětí lze pak rovněž pro případ soufázového zatěžování vrubovaných částí použít vztahu

$$\left(\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_c^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ka}}{\tau_c^*}\right)^2 = 1, \quad (10)$$

kde  $\sigma_{xa}$  ( $\tau_{ka}$ ) jsou amplitudy mezních napětí pro tah-tlak (krut) a  $\sigma_c^*$  ( $\tau_c^*$ ) jsou hodnoty meze únavy vrubovaného vzorku pro tah-tlak (krut) (tedy  $\sigma_c^* = \frac{\sigma_c}{\beta_t}$  a  $\tau_c^* = \frac{\tau_c}{\beta_k}$ ).

V tabulce 3 jsou uvedeny hodnoty mezních napětí  $\sigma_c^{red}$ , které byly pro jednotlivé poměry  $\lambda$  vypočteny podle vztahu 10 pro případ sledovaných vzorků s obvodovou drážkou a porovnány s hodnotami experimentálně získanými pro případ soufázového zatížení a zatížení

s fázovým posuvem jeho složek o hodnotu  $\frac{\pi}{2}$ . Z tabulky vyplývá, že pro výpočet mezních napětí u vrubovaných součástí z materiálu ČSN 41 1523.1 namáhaných soufázovým kombinovaným zatížením lze s vyhovující přesností použít Zennerem uvážený vztah (10). Pro případ nesoufázového zatížení je již chyba zejména pro poměry  $\lambda > 1$  poměrně značná (kolem 15%) a je proto nutné hledat jiný přístup.

Tabulka 3: Porovnání teoretických a experimentálních hodnot  $\sigma_c^{red}$  pro vzorek s obv. drážkou

	$\lambda = \frac{\tau_{ka}}{\sigma_{xa}}$				
	0,2	0,5	1	1,5	3
$\sigma_c^{red}$ [MPa] - teoret.	110,6	113,3	118,8	122,7	127,5
$\sigma_c^{red}$ [MPa] - experim. pro $\varphi = 0$	106,1	110,1	120,2	110,3	113,6
$\sigma_c^{red}$ [MPa] - experim. pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$	115,6	101,4	106	103,8	107,5

## 6 Závěr

V práci byl proveden rozbor napjatosti u hladkých vzorků namáhaných kombinovaným namáháním tahem-tlakem a krutem pro případ jeho nesoufázového působení. Z rozboru vyplývá, že při kombinovaném namáhání s fázovým posuvem jednotlivých složek zatížení se mění směr a velikost hlavních napětí. Úroveň hlavních napětí a poloha jejich maxim závisí také na poměru  $\lambda = \frac{\tau_{ka}}{\sigma_{xa}}$ . Pro výpočet mezních napětí  $\sigma_c^{red}$  byla použita rovnice eliptického oblouku jako v případě soufázového zatížení. Jak však ukázaly výsledky experimentů na zkušebních vzorcích z materiálu ČSN 411523.1, chyba ve výsledcích se pohybuje v rozmezí 6 ÷ 14%, což jsou již poměrně značné rozdíly. Proto lze pro případ kombinovaného zatížení s fázovým posuvem použít rovnici eliptického oblouku pouze tehdy, provedeme-li jeho korekci.

V práci byla sledována rovněž možnost využití eliptického oblouku mezních napětí pro výpočet u vrubovaných konstrukcí. Pro výpočet byl použit vztah odvozený Zennerem na základě teorie lokálních napětí. Při porovnání výpočtu s experimenty byla zjištěna poměrně dobrá shoda v případě soufázového působení složek kombinovaného zatížení (rozdíly mezi výpočtem a experimentem od 3 do 10 %). V případě nesoufázového zatěžování jsou tyto rozdíly větší, zejména v případě vyšších hodnot  $\lambda$ , kdy se pohybují kolem 15%.

*Odvození byla provedena v rámci řešení grantu 101/99/0103 "Únava strojních komponent při víceosém namáhání se synchronizovanými a fázově posunutými složkami napětí" Grantové agentury ČR v Ústavu termomechaniky AVČR na pracovišti CDM Plzeň.*

## References

- [1] Kermes J.: Únava ocelí při kombinovaném namáhání tah-krut se synchronizovanými složkami i s fázovým posunutím včetně koncentrátoru napětí. *Výzkumná zpráva ZČU-ITSSK*, Plzeň (1994)
- [2] Liu J., Zenner H.: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung - Teil 1. IN: *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.* 24, pp. 240-249 (1993)
- [3] Liu J.: Weakest Link Theory and Multiaxial Criteria. IN: *Multiaxial Fatigue and Fracture*, pp. 55-68 (1999)