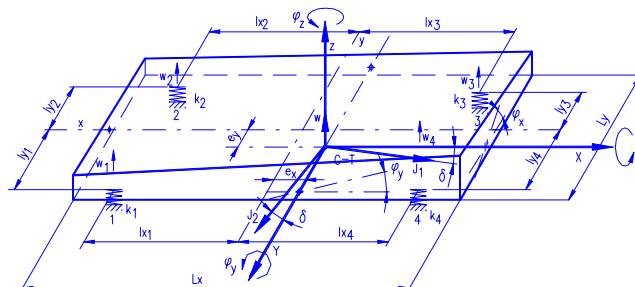


## INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF ASYMMETRY IN CASE OF THE VIBRATION OF A RESILIENTLY SUPPORTED PLATE - APPLICATION ON THE VIBRATION OF VEHICLE II.

Volek J., Kočí K., Husák J.\*

**Summary:** The symmetry of a mechanical system is a generally received presupposition at investigation of a vibrating vehicle. The influence of asymmetry on a 2D model is generally known. The basis for investigation of influence of asymmetry of the rolling stock is in this paper as the first approximation stated the investigation of the influence of asymmetry for 3D model - rectangular, rigid, resiliently supported plate. The individual influences (the different rigidity of springs, the geometrical asymmetry of supporting elements, the excentricity of the central gravity point and the angular displacement of main central axes of inertia from the axes of geometrical symmetry) and their combinations on natural frequencies and the shapes of vibration of the plate are presented. The equations of motion of free vibration for vertical shifts only are stated here in matrix form found out from the Lagrange's equations of 2<sup>nd</sup> type. They were analyzed two cases of asymmetry and influence of this asymmetry on the time flow of rotation and on the time of shift during the free vibration. This paper is a sequel of [1]. It is a next part of ongoing systematic analysis of influence of asymmetry.

Na minulé konferenci byly naznačeny konstrukční a provozní příčiny nesymetrie a byl uveden problém jejího vlivu na kmitání vozidel [1]. Pro první orientaci je nutno provést analýzu vlivu nesymetrie na kmitání pružně uložené tuhé desky při uvažování nesymetrie různého druhu. Tento i předchozí příspěvek je součástí programu podrobné, systematické analýzy pro posouzení váhy vlivů jednotlivých příčin nesymetrie a jejich vzájemné kombinace. V prvním přiblížení jsou uvažovány jen vertikální posuvy desky. Pro posouzení vlivu nesymetrie uspořádání soustavy (nesymetrie uložení - různé vzdálenosti pružných podpor, různé konstanty tuhosti  $k_i$ , excentricita těžiště, natočení  $\delta$  hlavních centrálních os setrvačnosti) je z důvodu obecnosti volena neprismatická deska s uvedenými příčinami nesymetrie.



obr. 1 Nesymetrické uložení nesymetrické desky

\* PhDr. Ing. Jan Volek, Ing. Karel Kočí, Ing. Josef Husák, ČD – Výzkumný ústav železniční, Dynamický zkušební stav, 281 02 Cerhenice, tel/fax: ++420 321 792 410, e-mail cd\_vuz\_dzs@razdva.cz

Výsledný vertikální pohyb obecného i-tého bodu desky ve směru osy Z je dán superpozicí vertikálních dílčích posuvů.

$$w_i = w_T + \varphi_y x_i - \varphi_x y_i \quad (1)$$

$w_T$  - posuv těžiště desky, popisující kmitavé pohyby jen ve směru osy Z - houpání s kruhovou frekvencí kmitání  $\omega_{pz}$ , tj. deska je stále rovnoběžná s klidovou polohou, všechny body desky mají v každém okamžiku stejný vertikální posuv, pro zvolený souřadnicový systém  $w_T = z$

$\varphi_y$  - úhel natočení desky kolem osy Y jdoucí těžištěm, popisuje rotační kmitavé pohyby jen kolem osy Y - kývání s úhlovou frekvencí  $\omega_y$

$x_i$  - vzdálenost i-tého bodu od osy Y

$\varphi_x$  - úhel natočení desky kolem osy X jdoucí těžištěm, popisuje rotační kmitavé pohyby jen kolem osy X - kolébání s úhlovou frekvencí  $\omega_x$

$y_i$  - vzdálenost i-tého bodu od osy X.

Z Lagrangeových rovnic II. druhu se získají pohybové rovnice volného kmitání desky [1]

$$\begin{bmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & J_x & D_{xy} \\ 0, & D_{yx} & J_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

kde jednotlivé prvky  $a_{ij}$  matice tuhosti jsou v obecném případě nesymetrie dány vztahy:

$$a_{11} = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)k$$

$$a_{12} = \left[ -\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 - \beta_4 \gamma_4 + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \eta_y \right] \cdot kl_y$$

$$a_{13} = \left[ -\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 + \alpha_4 \gamma_4 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \eta_x \right] \cdot kl_x$$

$$a_{21} = a_{12}$$

$$a_{22} = \left[ \beta_1^2 \gamma_1 + \beta_2^2 \gamma_2 + \beta_3^2 \gamma_3 + \beta_4^2 \gamma_4 \cdot l_y^2 + 2(-\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 - \beta_4 \gamma_4) \eta_y + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \eta_y^2 \right] \cdot kl_y^2 \quad (3)$$

$$a_{23} = \left[ \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 + \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 - \alpha_4 \beta_4 \gamma_4 + (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_3 + \beta_4 \gamma_4) \eta_x + (-\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 + \alpha_4 \gamma_4) \eta_y - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \eta_x \eta_y \right] \cdot kl_x l_y$$

$$a_{31} = a_{13}$$

$$a_{32} = a_{23}$$

$$a_{33} = \left[ \alpha_1^2 \gamma_1 + \alpha_2^2 \gamma_2 + \alpha_3^2 \gamma_3 + \alpha_4^2 \gamma_4 + 2(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 - \alpha_3 \gamma_3 - \alpha_4 \gamma_4) \eta_x + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \eta_x^2 \right] \cdot kl_x^2$$

$$\text{kde } \alpha_i = \frac{l_{xi}}{l_x}, \quad l_x = \frac{L_x}{2}, \quad \beta_i = \frac{l_{yi}}{l_y}, \quad l_y = \frac{L_y}{2}, \quad \eta_x = \frac{e_x}{l_x}, \quad \eta_y = \frac{e_y}{l_y}$$

$$\alpha_i \in \langle 0,1 \rangle, \beta_i \in \langle 0,1 \rangle, \eta_x \in \langle 0,1 \rangle, \eta_y \in \langle 0,1 \rangle, \quad k = \frac{\sum_i^n k_i}{n}, \quad \gamma_i = \frac{k_i}{k}$$

Pro případ symetrického uložení symetrické desky, tj. pro

$$\alpha_i = \beta_i = 1 \quad \eta_x = \eta_y = 0 \quad k_i = k \Rightarrow \gamma_i = 1 \quad \delta = 0$$

pohybové rovnice volného kmitání desky (3) se změni do tvaru

$$\begin{bmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & J_x, & 0 \\ 0, & 0, & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix} + 4k \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & l_y^2, & 0 \\ 0, & 0, & l_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Je zřejmé, že na základě přijatých předpokladů symetrického uspořádání jsou pohyby vzájemně nezávislé a vlastní úhlové frekvence jednotlivých pohybů jsou dány vztahy:

pro posuvný pohyb ve směru osy Z

$$z = Z_1 \sin \omega_{pz} t + Z_2 \cos \omega_{pz} t \quad \omega_{pz}^2 = \frac{4k}{m}$$

pro rotační pohyb kolem osy X

$$\varphi_x = \phi_{x1} \sin \omega_x t + \phi_{x2} \cos \omega_x t \quad \omega_x^2 = \frac{4k}{m} \cdot \left( \frac{l_y}{l_x} \right)^2 = \frac{4kl_y^2}{J_x} \quad (5)$$

pro rotační pohyb kolem osy Y

$$\varphi_y = \phi_{y1} \sin \omega_y t + \phi_{y2} \cos \omega_y t \quad \omega_y^2 = \frac{4k}{m} \cdot \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^2 = \frac{4kl_x^2}{J_y}$$

tzn., že soustavu o třech stupních volnosti je možno nahradit třemi soustavami o jednom stupni volnosti, což umožňuje experimentálně určit frekvence sledovaných tří pohybů samostatně tím, že pohyb pružně uložené skříně je umožněn vždy jen v jednom směru, resp. kolem jedné osy [3]

Integrační konstanty  $Z_1, Z_2, \phi_{x1}, \phi_{x2}, \phi_{y1}, \phi_{y2}$ , se určí z počátečních podmínek pro jednotlivé pohyby popsané pohybovými rovnicemi (4)

$$\begin{array}{lll} \text{pro } t=0 & z = z_0 & \varphi_x = \varphi_{x0} & \varphi_y = \varphi_{y0} \\ & \dot{z} = \dot{z}_0 & \dot{\varphi}_x = \dot{\varphi}_{x0} & \dot{\varphi}_y = \dot{\varphi}_{y0} \end{array}$$

a jejich řešení pro volné kmitání je dáno vztahy

$$\begin{aligned} z &= \frac{\dot{z}_0}{\omega_{pz}} \sin \omega_{pz} t + z_0 \cos \omega_{pz} t \\ \varphi_x &= \frac{\dot{\varphi}_{x0}}{\omega_x} \sin \omega_x t + \varphi_{x0} \cos \omega_x t \\ \varphi_y &= \frac{\dot{\varphi}_{y0}}{\omega_y} \sin \omega_y t + \varphi_{y0} \cos \omega_y t \end{aligned}$$

Výsledný posuv libovolného bodu desky ve vertikálním směru je podle (1) určen vztahem

$$w_i = \frac{\dot{z}_0}{\omega_{pz}} \sin \omega_{pz} t + z_0 \cos \omega_{pz} t + x_i \left( \frac{\dot{\varphi}_{y0}}{\omega_y} \sin \omega_y t + \varphi_{y0} \cos \omega_y t \right) - y_i \left( \frac{\dot{\varphi}_{x0}}{\omega_x} \sin \omega_x t + \varphi_{x0} \cos \omega_x t \right)$$

V obecném případě nesymetrie určené rovnicí (2) se rozepsáním získá charakteristická, frekvenční rovnice třetího stupně pro  $\omega^2$ . Výpočet je složitější a analýza důsledků nesymetrie je málo přehledná [2].

Je proto vhodné nejdříve provést posouzení vlivu jednotlivých příčin nesymetrie v takových případech dílčí nesymetrie, kdy charakteristická rovnice je druhého stupně pro  $\omega^2$ .

Jako první příklad je dále uveden případ nesymetrie vzniklé pouze vlivem pootočení hlavních centrálních os setrvačnosti o úhel  $\delta$  od původních os X, Y.

Předpoklady:  $\alpha_i = \beta_i = 1$        $\eta_x = \eta_y = 0$        $k_i = k \Rightarrow \gamma_i = 1$        $\delta \neq 0$

V tomto případě pohybové rovnice volného kmitání desky

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J_x & -D_{xy} \\ 0 & -D_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix} + 4k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

Z rovnice (6) je možno odvodit poměr kruhových frekvencí  $\omega_1, \omega_2$  k hlavním centrálním osám setrvačnosti 1 a 2 a kruhových frekvencí  $\omega_y, \omega_x$  k původním osám Y a X

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_y}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-A} \left[ \left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right)^2 + 1 + \sqrt{\left[\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right)^2 - 1\right]^2 + 4A \left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right)^2} \right] \quad (7)$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-A} \left[ \left(\frac{\omega_y}{\omega_x}\right)^2 + 1 - \sqrt{\left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_x}\right)^2 - 1\right]^2 + 4A \left(\frac{\omega_y}{\omega_x}\right)^2} \right] \quad (8)$$

kde parametr  $A = \frac{D_{xy}^2}{J_x J_y} = \frac{(k_j - 1)^2}{k_j} \cdot \frac{\text{tg}^2 2\delta}{4}$ ,  $D_{xy}$  je deviační moment k osám X, Y,  $k_j = \frac{J_y}{J_x}$  je

poměr momentů setrvačnosti k osám X a Y. Podle Mohrovy kružnice  $\text{tg} 2\delta = \frac{2D_{xy}}{J_y - J_x}$ , kde  $\delta$  je

úhel, který svírají osy X a Y s hlavními centrálními osami 1 a 2. (obr. 1)

Důsledky závislosti vlastních frekvencí na hodnotách vstupních veličin definujících nesymetrii uspořádání je možno zjistit z časového průběhu úhlových výchylek  $\varphi_x(t)$  a  $\varphi_y(t)$  kolem os X a Y.

Obecné řešení volného kmitání definovaného druhou a třetí rovnicí soustavy (6) je

$$\varphi_x(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t \quad (9)$$

$$\varphi_y(t) = C_1 v_1 \cos \omega_1 t + C_2 v_1 \sin \omega_1 t + C_3 v_2 \cos \omega_2 t + C_4 v_2 \sin \omega_2 t$$

Integrační konstanty  $C_i$  se určí z počátečních podmínek obecně definovaných vztahy:

$$\begin{aligned} \text{pro } t=0 \quad \varphi_x(t=0) &= \varphi_{x0} & \dot{\varphi}_x(t=0) &= \dot{\varphi}_{x0} \\ \varphi_y(t=0) &= \varphi_{y0} & \dot{\varphi}_y(t=0) &= \dot{\varphi}_{y0} \end{aligned}$$

Parametry  $v_1$  a  $v_2$  se určí z poměrů amplitud vlastních tvarů kmitání.

Pro obecné řešení jsou funkce  $\varphi_x(t)$  a  $\varphi_y(t)$  složité, rozsáhlé a málo přehledné [2] proto jsou dále uvedeny jen dva nejjednodušší případy.

V prvním případě pro  $\varphi_{y0} = \dot{\varphi}_{x0} = \dot{\varphi}_{y0} = 0$       a       $\varphi_{x0} \neq 0$

je hledaná úhlová výchylka  $\varphi_x(t)$  v závislosti pouze na počáteční úhlové výchylce  $\varphi_{x0}$  kolem osy X v poměrném vyjádření dána vztahem:

$$\frac{\varphi_x(t)}{\varphi_{x0}} = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1} \cdot \cos \omega_1 t + \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1} \cdot \cos \omega_2 t \quad (10)$$

ukázka vlivu hodnot vstupních veličin na časový průběh  $\varphi_x(t)$  je v příloze 1. Vztah (10) splňuje počáteční podmínku  $\varphi_x(t=0) = \varphi_{x0}$ . Při symetrickém uspořádání tj.  $D_{xy} = 0 \Rightarrow \delta = 0$ , pak  $\omega_1 \rightarrow \omega_y$  a  $\omega_2 \rightarrow \omega_x$  je úhlová výchylka dána jednoduchým vztahem  $\varphi_x(t) = \varphi_{x0} \cos \omega_x t$ .

V případě volného kmitání vyvolaného počáteční podmínkou  $\varphi_{x0} \neq 0$  je při symetrickém uspořádání zřejmě  $\varphi_y(t) = 0$ , deska kmitá jen kolem osy X.

Naopak v případě nesymetrickém tj.  $D_{xy} \neq 0 \Rightarrow \delta \neq 0$ , se deska rozkmitá i kolem osy Y a úhlová výchylka  $\varphi_y$  kolem osy Y v závislosti na počátečním natočení  $\varphi_{x0} \neq 0$  kolem osy X je opět v poměrném vyjádření dána vztahem

$$\frac{\varphi_y(t)}{\varphi_{x0}} = \frac{(k_j - 1) \operatorname{tg} 2\delta}{2} \cdot \frac{\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_x}\right)^2 - 1\right] \left[1 - \left(\frac{\omega_x}{\omega_1}\right)^2\right]}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1} \cdot (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (11)$$

Pro  $t = 0$  je  $\varphi_y(t=0) = 0$ . Pro  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\omega_2 \rightarrow \omega_x$ ,  $\omega_1 \rightarrow \omega_y$  a  $\varphi_y(t) \rightarrow 0$

Ukázka vlivu hodnot jednotlivých vstupních veličin na časový průběh  $\varphi_y(t)$  je uvedena v příloze 2.

Dále je uveden případ dílčí nesymetrie, kdy uspořádání soustavy je vzhledem k ose X symetrické a vzhledem k ose Y nesymetrické, tj. platí

$$D_{xy} = 0 \Rightarrow \delta = 0 \quad e_y = 0 \Rightarrow \eta_y = 0 \quad e_x \neq 0 \Rightarrow \eta_x \neq 0 \quad (12)$$

$$k_1 = k_2 \neq k_3 = k_4 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \neq \gamma_3 = \gamma_4 \quad \alpha_1 = \alpha_2 \neq 1, \alpha_3 = \alpha_4 = 1 \quad \beta_i = 1$$

potom vztahy pro výpočet poměru frekvencí  $\omega_1$ , resp.  $\omega_2$  při předpokládané nesymetrii jsou

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_y}\right)^2 = \frac{1}{2\left(\frac{k_1}{k_3} + 1\right)} \left[ B_1 + \left(\frac{k_1}{k_3} + 1\right) \left(\frac{i_y}{l_x}\right)^2 + \sqrt{\left[ B_1 - \left(\frac{k_1}{k_3} + 1\right) \left(\frac{i_y}{l_x}\right)^2 \right]^2 + \left(2 \frac{i_y}{l_x} \cdot B_2\right)^2} \right] \quad (13)$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_{pz}}\right)^2 = \frac{1}{2\left(\frac{k_1}{k_3} + 1\right)} \left[ B_1 \left(\frac{l_x}{i_y}\right)^2 + \frac{k_1}{k_3} + 1 - \sqrt{\left[ B_1 \left(\frac{l_x}{i_y}\right)^2 - \left(\frac{k_1}{k_3} + 1\right) \right]^2 + \left(2 \frac{l_x}{i_y} \cdot B_2\right)^2} \right] \quad (14)$$

$$\text{kde } B_1 = \frac{k_1}{k_3} \cdot (\alpha_1 + \eta_x)^2 + (\eta_x - 1)^2 \quad \text{a} \quad B_2 = \frac{k_1}{k_3} (\alpha_1 + \eta_x) + \eta_x - 1$$

Znalost výpočtu kruhových frekvencí umožňuje výpočet posuvné výchylky  $z(t)$  a úhlové výchylky  $\varphi_y(t)$ . Za předpokladů (12) je obecné řešení první a třetí pohybové rovnice soustavy (2) pro volné kmitání analogicky ke vztahům (9)

$$z(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t$$

$$\varphi_y(t) = C_1 v_1 \cos \omega_1 t + C_2 v_1 \sin \omega_1 t + C_3 v_2 \cos \omega_2 t + C_4 v_2 \sin \omega_2 t \quad (15)$$

Integrační konstanty se určí z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} \text{pro } t=0 \quad z(t=0) &= z_0 & \varphi_y(t=0) &= \varphi_{y0} \\ \dot{z}(t=0) &= \dot{z}_0 & \dot{\varphi}_y(t=0) &= \dot{\varphi}_{y0} \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \text{pak platí} \quad C_1 &= \frac{v_2 z_0 - \varphi_{y0}}{v_2 - v_1} & C_2 &= \frac{v_2 \dot{z}_0 - \dot{\varphi}_{y0}}{(v_2 - v_1) \omega_1} \\ C_3 &= \frac{-v_1 z_0 + \varphi_{y0}}{v_2 - v_1} & C_4 &= \frac{-v_1 \dot{z}_0 + \dot{\varphi}_{y0}}{(v_2 - v_1) \omega_2} \end{aligned}$$

parametry  $v_1$  a  $v_2$  se opět určí z poměrů amplitud vlastních tvarů kmitání. Z mnoha možných kombinací počátečních podmínek je zvolen případ  $\dot{z}_0 = \varphi_{y0} = \dot{\varphi}_{y0} = 0$  a  $z_0 \neq 0$  nejsnadněji realizovatelný při experimentálním řešení. Pak je možno výchylku  $z(t)$  popsat vztahem

$$\frac{z(t)}{z_0} = \frac{1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1} \left\{ \left[ \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \frac{B_1}{\frac{k_1}{k_3} + 1} \left(\frac{\omega_y}{\omega_1}\right)^2 \right] \cdot \cos \omega_2 t - \left[ 1 - \frac{B_1}{\frac{k_1}{k_3} + 1} \left(\frac{\omega_y}{\omega_1}\right)^2 \right] \cdot \cos \omega_1 t \right\} \quad (16)$$

Vztah splňuje počáteční podmínku  $z(t=0) = z_0$  a pro symetrický případ  $\alpha_1 = 1$ ,  $k_1 = k_3$ ,  $\eta_x = 0$  je  $\omega_1 = \omega_y$  a  $\omega_2 = \omega_{pz}$ , pak  $z(t) = z_0 \cos \omega_{pz} t$

Pootočení  $\varphi_y(t)$  v závislosti na počáteční podmínce  $z_0 \neq 0$

$$\frac{\varphi_y(t) \cdot l_x}{z_0} = \frac{\frac{k_1}{k_3} (\alpha_1 + \eta_x) + \eta_x - 1}{\left(\frac{k_1}{k_3} + 1\right) \left[ \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1 \right]} \left(\frac{\omega_y}{\omega_1}\right)^2 (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (17)$$

Pro  $t = 0$  je  $\varphi_y(t=0) = 0$ . Při symetrickém uspořádání  $\frac{k_1}{k_3} = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\eta_x = 0$  je  $\varphi_y(t) = 0$

Podobně je možno uvést další vztahy pro výpočet výchylky posuvů a pootočení desky při počátečních podmínkách.  $\varphi_{y0} \neq 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\dot{z}_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_{y0} \neq 0$ .

Pootočení  $\varphi_y(t)$  v závislosti na počáteční podmínce  $\varphi_{y0} \neq 0$

$$\frac{\varphi_y(t)}{\varphi_{y0}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega_{pz}}{\omega_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} \cos \omega_1 t + \frac{1 - \left(\frac{\omega_{pz}}{\omega_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2} \cos \omega_2 t \quad (18)$$

Pro  $t = 0$  je  $\varphi_y(t) = \varphi_{y0}$ . Při symetrickém uspořádání  $\frac{k_1}{k_3} = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\eta_x = 0$  je natočení

$$\varphi_y(t) = \varphi_{y0} \cdot \cos \omega_y t$$

Posuv  $z(t)$  v závislosti na počáteční podmínce  $\varphi_{y0} \neq 0$

$$\frac{z(t)}{\varphi_{y0} l_x} = \frac{\frac{k_1}{k_3}(\alpha_1 + \eta_x) + \eta_x - 1}{\left(\frac{k_1}{k_3} + 1\right) \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1\right]} \left(\frac{\omega_{pz}}{\omega_2}\right)^2 (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t) \quad (19)$$

Pro  $t = 0$  je  $z(t = 0) = 0$ . Při symetrickém uspořádání  $\frac{k_1}{k_3} = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\eta_x = 0$ , je  $z(t) = 0$ .

Ze vztahů (10, 11, 16, 17, 18, 19) je zřejmá závislost výchylek  $z(t)$  a  $\varphi_y(t)$  na hodnotách vlastních frekvencí pro různé druhy nesymetrie podle vztahů (7, 8, 13, 14), jak při výpočtu časového průběhu, tak i amplitud harmonických funkcí.

Z uvedených vztahů je dále prokázána vzájemná spjatost jednotlivých pohybů podmíněná nesymetrií různého druhu. Při nesymetrickém uspořádání soustavy jakákoliv počáteční podmínka vyvolá časovou změnu obou kinematických veličin  $\varphi_y(t)$  a  $z(t)$  vázaných pohybovými rovnicemi. Provedením analýzy vlivu jednotlivých typů nesymetrie umožní lepší posouzení chodu vozidel a zhodnocení některých metod experimentálního vyšetřování vlastností vozidel, např. metody „shazování z klínů“ pro určení vlastních frekvencí vozidla.

#### REFERENCES

1. Volek, J., Kočí, K., Litomyský, P.: Investigation of the influence of asymmetry in case of the vibration of a resiliently supported plate – application on the vibration of vehicle. Proceedings of the Conference Engineering Mechanics 2000, Svatka, 2000
2. Volek, J.: Vliv nesymetrie pružně uložené tuhé desky při volném kmitání. Interní zpráva ČD VÚŽ DZS, 2000.
3. Volek, J., Kočí, K., Běťák, J.: Experimentální stanovení některých charakteristik vozidla pro dynamickou analýzu. Sborník II. věd. konference DFJP-UP Pardubice, 1999.

$$\varphi_x(t)/\varphi_{x0}$$

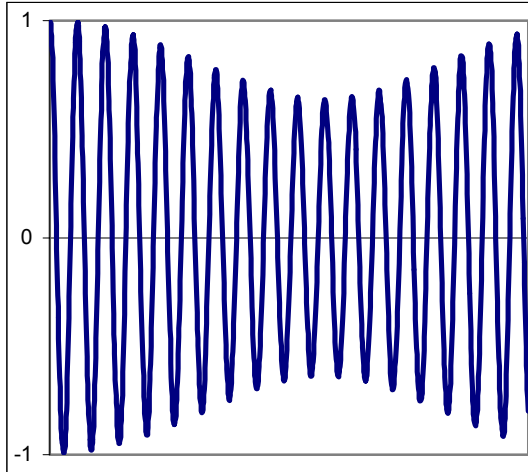
**kj=5**

$$l_x/l_y=2.2$$

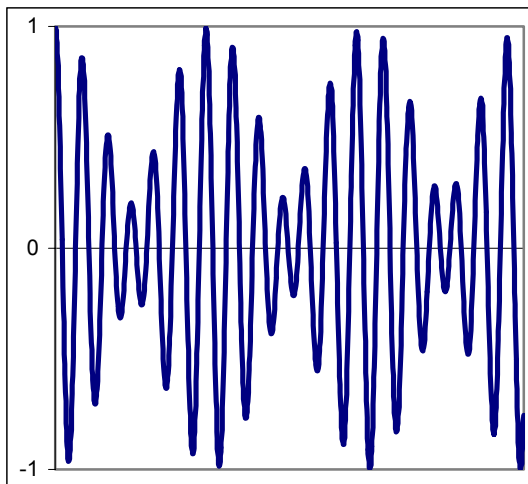
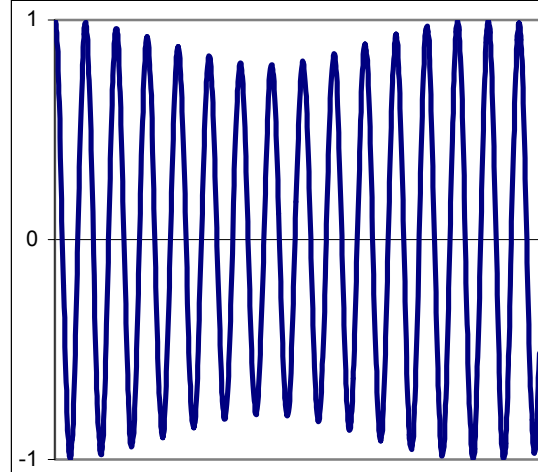
$$\omega_x/\omega_y=1.02$$

$$l_x/l_y=2.3$$

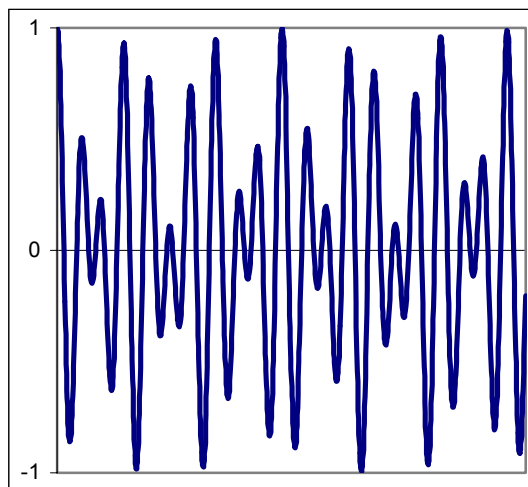
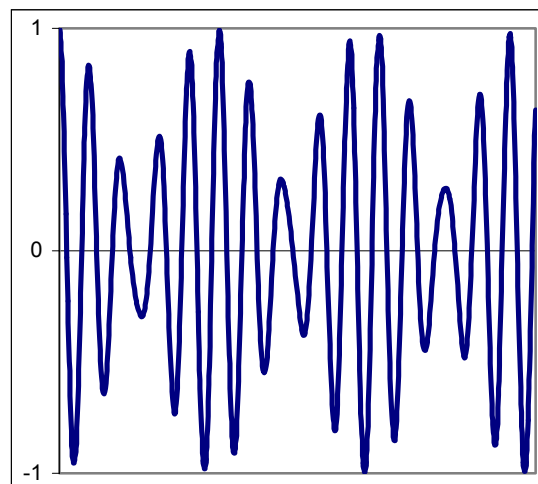
$$\omega_x/\omega_y=0.95$$



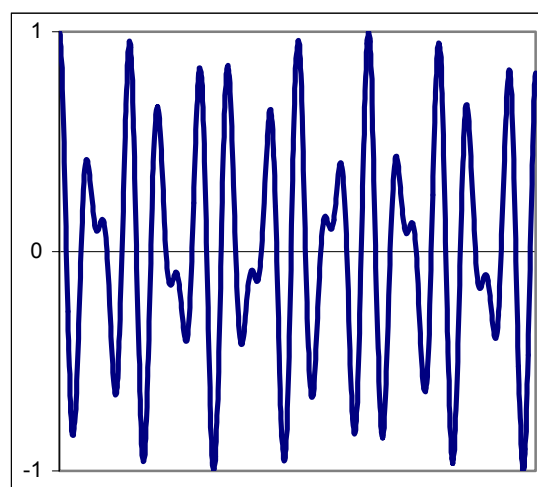
$\delta=$   
**1**



**5**



**10**





$$\varphi_y(t)/\varphi_{x0}$$

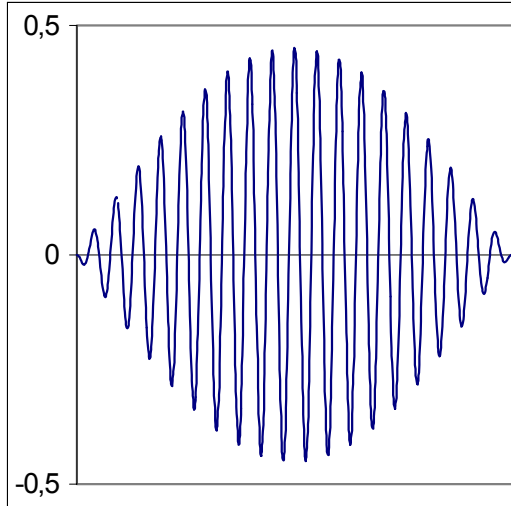
**kj=5**

$$l_x/l_y=2.2$$

$$\omega_x/\omega_y=1.02$$

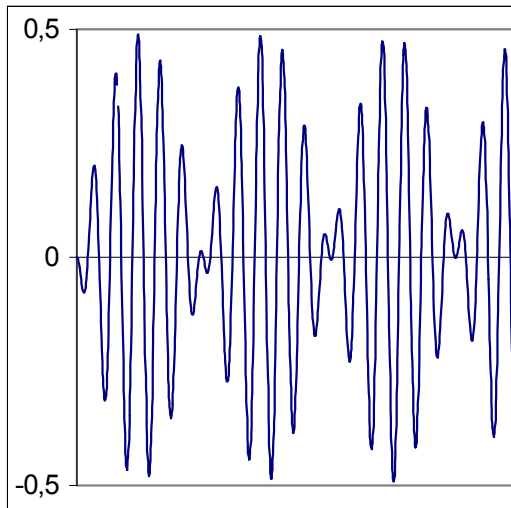
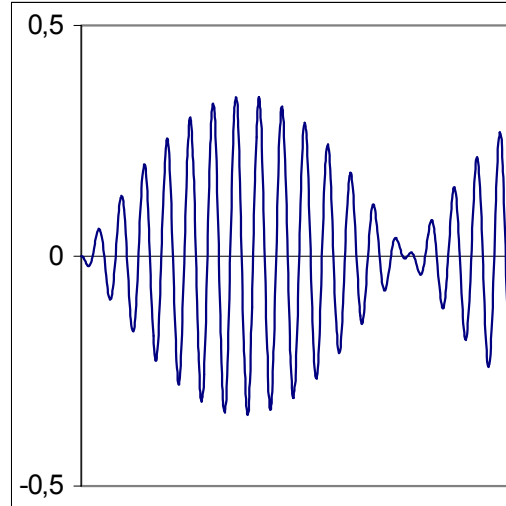
$$l_x/l_y=2.3$$

$$\omega_x/\omega_y=0.95$$

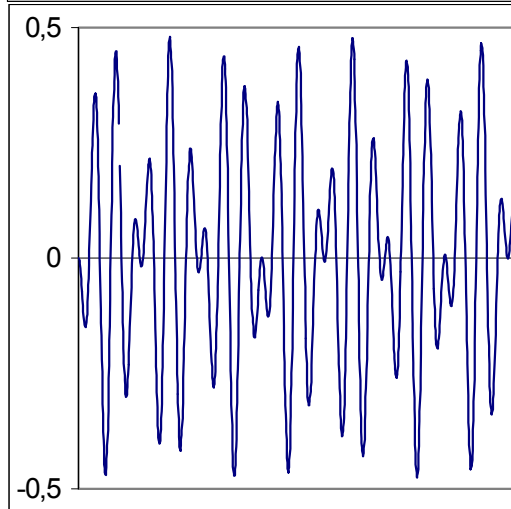
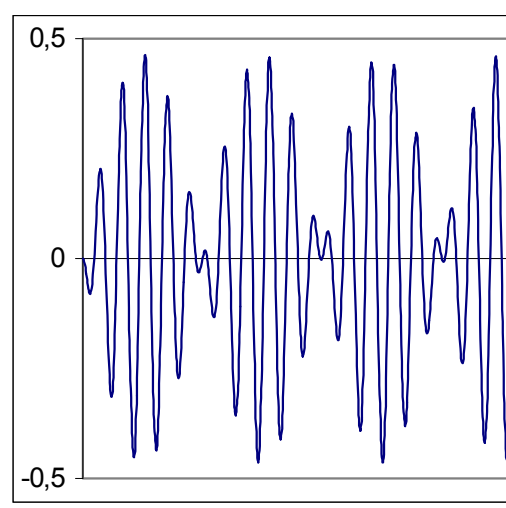


$\delta=$

**1**



**5**



**10**

