



## VIBRATION OF SOME PART OF A SPHERICAL SHELL IN INTERACTION WITH COMPRESSIBLE FILLING

Igor Zolotarev\*

*Summary: The segment of spherical shell covered by an elastic plate and filled by a compliant substance represents a simplified mathematical model of a human skull including a model of brain tissue. The study of frequency-modal properties of this system was realised using Finite Element Method (FEM) within a programme package ANSYS. Obtained results for the shell in vacuum as well as for the interaction of the shell with elastic content, created by fluid elements, are analysed from the point of view the frequency spectrum and corresponding mode shapes vibration.*

### 1. ÚVOD

Část sférické skořepiny s připojenou kruhovou deskou s otvorem a obsahující stlačitelnou náplň slouží jako matematický model lidské lebky, který zahrnuje vliv mozkové tkáně. Výzkum frekvenčně-modálních vlastností této soustavy pomocí metody konečných prvků (MKP) je realizován v rámci programového balíku ANSYS. Výsledky pro skořepinu (modelovanou MKP prvky typu SHELL63) a její jednotlivé součásti kmitající ve vakuu i pro případ interakce skořepiny s poddajnou výplní (modelovanou MKP prvky typu FLUID30) jsou vzájemně srovnávány z hlediska změn frekvenčního spektra a odpovídajících tvarů kmitání zkoumané soustavy. Modální vlastnosti nejnižších vlastních frekvencí jsou analyzovány z hlediska dominantních vlastností strukturního či akustického charakteru kmitání.

### 2. MATEMATICKÝ MODEL

Studovaná mechanická soustava se skládá z části sférické skořepiny s poloměrem  $R$  a tloušťkou stěny  $h$ : MKP model je vytvořen pomocí rotace odpovídajícího oblouku definovaného poloměrem  $R$  a úhlem  $\alpha$  podle schématu na obr. 1. Kruhová pružná deska s poloměrem  $R_d$ , tloušťkou  $3h$  a s centrálně umístěným kruhovým otvorem (s poloměrem  $R_a$ ) je upevněná k odpovídající části sférické skořepiny. Pružné části studovaného systému byly modelovány v rámci programového balíku ANSYS pomocí elementů typu SHELL63.

Stlačitelná náplň, kterou je modelována mozková tkáň lidské lebky, byla uvažována jako stlačitelná tekutina s hustotou  $\rho_t$  a rychlostí zvuku  $c_\infty$ . Tato část matematického modelu byla realizována pomocí konečných elementů typu FLUID30, které spolu s prvky typu SHELL63 umožňovaly řešení interakční úlohy jako FSI problému.

Pro numerické výpočty byly zvoleny geometrické a fyzikální parametry systému přibližně odpovídající případu lidské lebky [8-11]:

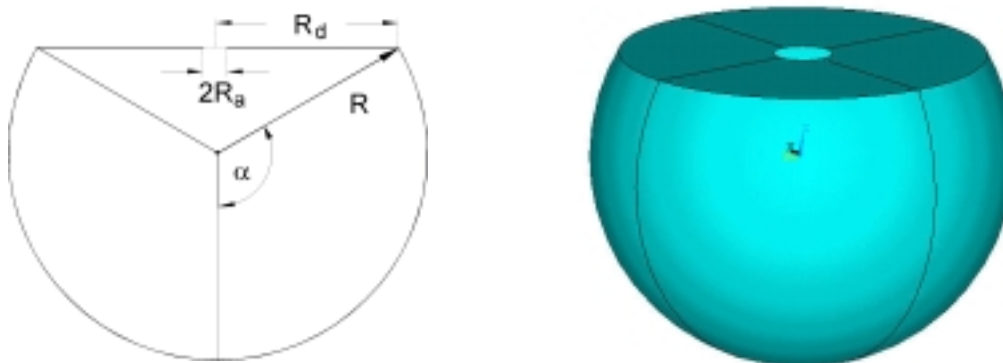
$$R = 0.087\text{m}; h = 0.0054\text{m}; \alpha = 120^\circ; R_d = 0.0753\text{m}; R_a = 0.012\text{m};$$

---

\* Ing. Igor Zolotarev, CSc., Institute of Termomechanics ASCR, Dolejškova 5, 182 00 Prague, CR,  
e-mail: igor@it.cas.cz

$$\rho_s = 1410 \text{ kg/m}^3; E = 4.46 \cdot 10^9 \text{ Pa}; \nu = 0.21; \rho_t = 1410 \text{ kg/m}^3; c_\infty = 1460 \text{ m/s},$$

kde  $E$ ,  $\nu$  a  $\rho_s$  jsou Youngův modul pružnosti, Poissonova konstanta a hustota materiálu sférické skořepiny a desky.



Obr. 1 Mechanický model

### 3. VÝSLEDKY NUMERICKÝCH VÝPOČTŮ

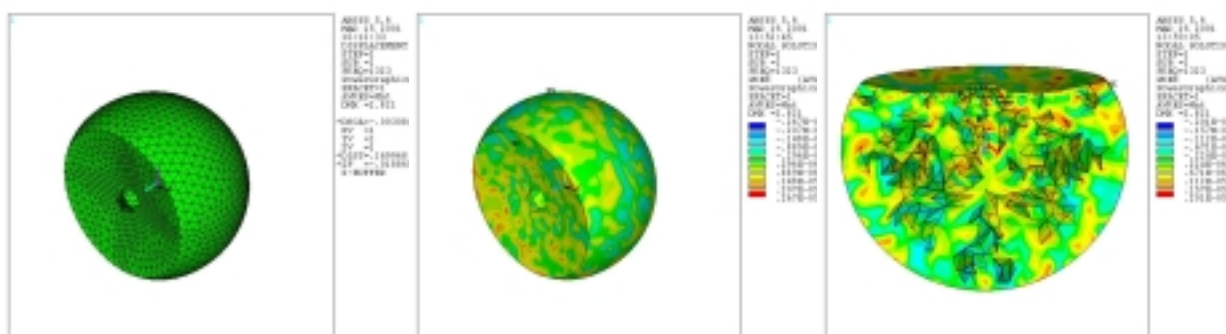
V tab. 1 jsou uvedeny vypočtené vlastní frekvence jednotlivých subsystémů a úplné soustavy modelu lidské lebky včetně vlivu mozkové tkáně. V prvním sloupci tabulky jsou uvedeny vlastní frekvence kmitání sférické části studované soustavy ve vakuu. Frekvence uvedené v druhém sloupci odpovídají vlastním kmitům kruhové desky s otvorem. V dalším (třetím) sloupci jsou uvedeny vlastní frekvence spojené soustavy sférické části a desky. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny vlastní frekvence kmitání úplné interakční soustavy modelu lebky se stlačitelnou poddajnou náplní. Poslední sloupec obsahuje vlastní frekvence poddajné náplně v tuhé dutině.

	$f_s$ [Hz]	$f_p$ [Hz]	$f_{sp}$ [Hz]	$f_{spf}$ [Hz]	$f_a$ [Hz]
1	1063,19	2457,66	1316,97	1322,89	5385,65
2	1064,66	5001,87	2036,99	2038,06	5387,49
3	1988,35	5001,87	2037,55	2038,07	6644,05
4	2513,65	8068,34	2559,18	2559,47	8778,13
5	2744,48	8068,34	2570,21	2560,35	8796,95
6	2745,97	8093,74	2706,71	2798,26	9516,18
7	2757,12	8093,74	2788,19	3003,56	10634,77
8	2761,45	9403,21	2788,72	3176,32	12070,46
9	3040,64	9840,30	3007,15	3306,02	13244,37
10	3088,29	10414,78	3007,63	3666,18	13465,51
11	3088,74	10414,78	3120,29	3691,84	
12	3202,42	11987,08	3127,49	3692,02	
13	3218,86	11987,08	3189,92	3716,37	
14	3296,11	13465,87	3248,47	3805,80	
15	3297,55	13465,87	3249,69	3813,62	

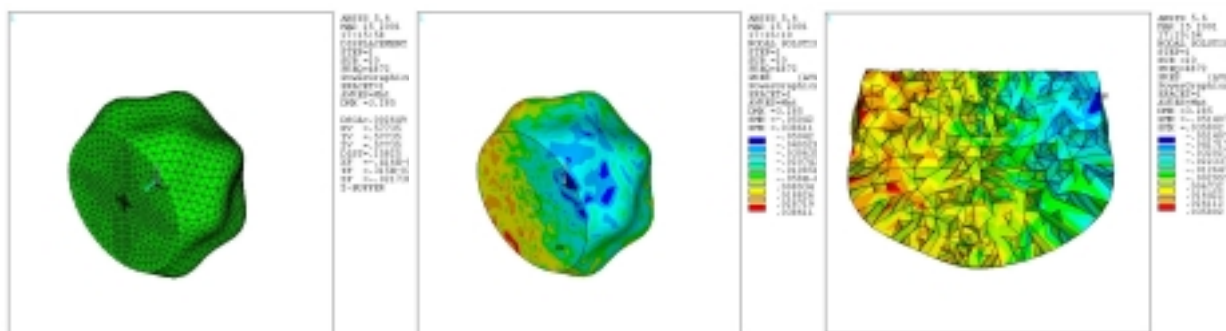
...	...	...	...	...	
25	3845,68		3656,76	4485,31	
26	3852,32		3679,91	4592,33	
27	3882,23		3680,24	4632,11	
28	3884,52		3683,36	4678,91	
29	4024,34		3804,67	4747,26	
30	4026,10		3813,55	4871,50	

Tab. 1

Na uvedených dále obrázcích obr. 1 a 2 jsou znázorněny některé tvary kmitání studované soustavy, které ukazují především radiální výchylky strukturální části systému a rozložení akustického tlaku na kontaktním povrchu skořepiny s poddajnou náplní, a také uvnitř této náplně (střední řez).



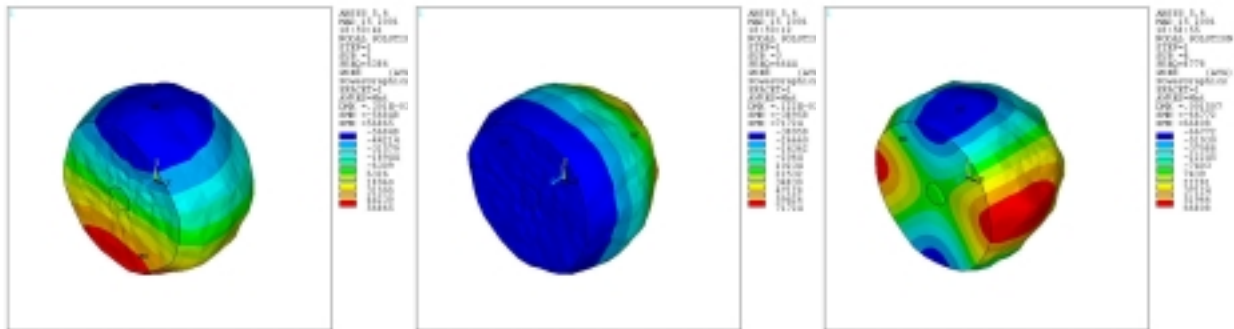
Obr. 1 Tvary kmitání úplné soustavy odpovídající 1. vlastní frekvenci 1322,89Hz



Obr. 2 Tvary kmitání úplné soustavy odpovídající 30. vlastní frekvenci 4871,50Hz

Velmi hrubý odhad nejnižších akustických rezonancí tuhé dutiny naplněné tekutinou s výše uvedenými parametry lze získat dosadíme-li do známého vzorce  $f_a' = c_\infty / \lambda$  ( $\lambda$  – délka akustické vlny) příslušné parametry (za  $\lambda$  -  $2*(2R)$ ,  $2*(R+0,5R)$ ,  $2*(4R)$ , ...). Pak výsledné odhady frekvencí budou: 4.195Hz, 5.594Hz, 8.390Hz, ... Tyto odhady jsou „velmi přibližné“ neboť odpovídají spíše krychlové dutině, než sférické, nicméně je lze úspěšně používat pro vymezení spodní hranice hledaného frekvenčního spektra. Pro srovnání, nejnižší vlastní frekvence převážně akustických kmitů (úplně sférické skořepiny se stlačitelnou náplní) je podle [10] kolem 7.700Hz.

Rozložení akustického tlaku pro několik nejnižších vlastních frekvencí kmitání stlačitelné náplně v tuhé dutině jsou uvedeny na obr. 3.



Obr.3 Akustické rezonanční tvary kmitání odpovídající 1. (5385,65Hz), 3. (6644,05Hz) a 4. (8778,13Hz) vlastní frekvenci (viz. v tab.1)

#### 4. ZÁVĚR

Uvedené výsledky výpočtu vlastních frekvencí kmitání jednotlivých subsystémů a úplné soustavy modelu lidské lebky ukazují na dominantní vliv připojené kruhové desky na nejnižší vlastní frekvence strukturní části studovaného systému. Nejnižší vlastní frekvence úplné soustavy včetně uvažování vlivu mozkové tkáně odpovídají převážně strukturním modům kmitání. Převážně akustické tvary mohou být vybudeny při interakčním kmitání soustavy na podstatně vyšších frekvencích ( $\approx 5.000\text{Hz}$ ), které jsou blízké základním akustickým rezonančním frekvencím ve sférické dutině.

#### 5. POZNÁMKA

Tato práce vznikla v rámci projektu GAČR čís. 106/98/K019 "Metody matematického a fyzikálního modelování vibroacustických systémů v biomechanice hlasu a sluchu".

#### LITERATURA

- [1] Bolotin V. V.: Vibracii v technike, Vol. I. Mashinostroenie, Moscow, 1978.
- [2] Ogibalov P. M.: Voprosy dinamiki i ustoičivosti oboloček. Nauka, Moscow, 1984.
- [3] Abramowitz M., Stegun I.: Handbook of Mathematical functions. Dover Publications Inc., New York, 1972.
- [4] Zolotarev I.: Vibration of a Spherical Shell in Interaction with Acoustical Medium. Proceedings of the 3rd International Conference Engineering Aero-Hydroelasticity, Prague, August 30 - September 3, 1999, pp. 409-414.
- [5] Zolotarev I.: Interaction of a Spherical shell with an Acoustical Medium. Proceedings of the 7rd International Conference Flow-Induced Vibration - FIV2000, Lucerne (Switzerland), June 19-22, 2000, pp. 601-606.
- [6] Zolotarev I., Maire S.: Frequency-modal properties of a spherical shell in interaction with fluid. Proceedings of the Seminar Interaction and Feedbacks '99, Prague, IT AS CR, November 23-24, 1999, pp. 183-190.
- [7] Žilinčíková I., Wiszt E.: Computation of vibrations of spherical shells by FEM. Proceedings of the Seminar Interaction and Feedbacks '99, Prague, IT AS CR, November 23-24, 1999, pp. 191-196.
- [8] Horáček J., Formánek P., Hendrych P., Pešek L.: FE model of the human skull for dynamical analysis. Proc. of the Conf. Biomechanics of Man '2000, 24 - 25 Nov., 2000, Olomouc, pp. 45-48.
- [9] Pešek L., Horáček J., Hendrych P.: Numerické modelování a modální analýza lebky člověka se simulací vlivu mozkové tkáně. Proceedings of the Seminar Interaction and Feedbacks '2000, Prague, IT AS CR, November 28-29, 2000, pp. 173-176.
- [10] Zolotarev I.: Numerical calculation of natural frequencies of an elastic sphere containing a compressible fluid. Proceedings of the conference Numerical Methods in Continuum Mechanics 2000, Liptovský Ján, Slovak Republic, September 19-24, 2000, No 113 on CD.
- [11] Zolotarev I., Velecká S., Ihlárová I., Wiszt E.: Vibration of a joint spherical shell - plate Structure in interaction with an compressible filling. Proceedings of the conference Dynamics of Machines '2001, Prague, IT AS CR, February 6 - 7, 2001, pp. 243-248.