Národní konference s mezinárodní účastí

INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

NĚKTERÉ MOŽNOSTI ANALYTICKÝCH POPISŮ SILNÝCH NEADIABATICKÝCH KOMPRESÍ PLYNU

Zdeněk Bayer*

Abstrakt

Příspěvek se zabývá modelováním stavového a termodynamického chování plynu v kavitačních bublinách. Po nedávné prezentaci modelu M3, předpokládajícího realističtější charakter výměny tepla v průběhu komprese, představuje jeho zdokonalenou verzi M4. Ukazuje, že obvykle uvažovaný polytropický model může při silných kompresích být příčinou chyb až několik desítek procent. Také dílčí výsledky předběžné analýzy vlivu zdokonalení popisu stavového chování reálného plynu vedou ke kvantitativně podobným závěrům.

Klíčová slova: kavitace, komprese neadiabatická, modely komprese, plyn reálný

1. Úvod

V úlohách dynamiky plynů se obvykle vychází ze zjednodušených představ o stavovém a termodynamickém chování plynu. Při intenzivních dějích, jaké se vyskytují v kavitačních bublinách, to může vést k nemalým chybám. Základní případy dynamiky těchto bublin jsou popsány různými variantami Rayleighovy-Plessetovy rovnice [1,2], jejíž typický tvar je

$$[R(\partial \dot{R}/\partial t)+3\dot{R}^2/2]\rho-4\mu\dot{R}/R = p_v(T)+p_g(R_o/R)-p_l-p_A(t)+2\sigma/R \,. \quad (1)$$

kde T, p, μ a σ jsou absolutní teplota plynu, dynamická viskozita a povrchové napětí kapaliny, indexy v, g, l značí páru, plyn, kapalinu, p_A je časově obecně proměnný budící tlak, t- čas a R, $\dot{R}$ průměr bubliny a jeho časovou změna.

Stavové chování plynu popsané druhým členem pravé strany se považuje za ideální a změna jeho stavu se až dosud řeší za předpokladu, že jde o polytropický děj charakterizovaný nejčastěji exponentem n=4/3

$$\pi=\omega^n \,, \quad \tau=\omega^{n-1} \,, \quad w=c_vT_o(\tau-1)/(n-1) \,, \quad \beta=q/w=(\kappa-n)/(\kappa-1), \quad (2)$$

kde q je teplo odvedené v průběhu komprese, w- příslušná kompresní práce, κ- Poissonova konstanta, ω, π, τ- hustotní, tlakový a teplotní poměr děje, s- entropie a c_v- specifická tepelná kapacita při stálém objemu.

Je výhodné, že bez výjimky lze změny stavových veličin vyjádřit vzájemně explicitně a všechny důležité veličiny (změnu stavu, práci, sdělené teplo) také jako explicitní funkce veličin κ,β. Stejně důležité je, že toto řešení nezavádí do rov. (1) další nezávisle proměnné a nemění její řád ani stupeň. Na druhé straně

* Doc. Ing. Zdeněk Bayer, CSc., ÚT AVČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, e-mail bayer@it.cas.cz, také ÚTŘV, Univerzita J.E. Purkyně, Na Okraji 1001, 400 96 Ústí n /L

důsledkem předpokladu o polytropickém průběhu děje je, že předepisuje, aby poměr sdíleného tepla a práce byl v průběhu celého děje konstantní. To spolu s absolutní idealizací stavového chování je možná přijatelné pro děje slabé, ale ne pro děje s řádovými změnami objemu či tlaku.

Otázkou proto je, jak popis stavových změn v rov. (1) přiblížit realitě, aniž by se přitom ohrozily zmíněné hlavní výhody "ideálně polytropického" modelu. Z těchto důvodů se také zatím upřednostňují řešení analytická. Úvodní práce [5] se věnovala odvození poněkud reálnějšího modelu (M3); diskusí jeho vlastností a porovnání s polytropickým modelem se zabývá práce [7]. Ukazuje, že odlišná představa průběhu sdílení tepla během děje může vést ke zřetelným rozdílům. Předložený příspěvek na tato zjištění navazuje a představuje ve shodě s prací [6] jednak zdokonalenou verzi modelu komprese, jednak prvé úvahy o vlivu popisu stavového chování stlačovaného plynu.

2. Analytické modely neadiabatické komprese ideálního plynu M3 a M4

Výchozí model M3 předpokládal, že intenzita sdílení tepla závisí na rozdílu teploty media a okolí a na příslušné změně vnitřní energie, tj.

$$-dq=c.(T-T_o).du\,,\ \ \omega^{\kappa-1}=\tau^{1-\varepsilon}.\exp[\varepsilon(\tau-1)]\,,\ \ c=\varepsilon/T_o\,,$$

$$\pi=\tau.\omega\,,\ \ \varepsilon=2\beta/[(\tau-1)(1-\beta)],\ \ \beta=\varepsilon(\tau-1)/\,[2+\varepsilon(\tau-1)]\,, \qquad (3a)$$

odkud pro kompresní práci, odvedené teplo a změnu entropie plyne

$$w=C_o(\tau-1)[1+\varepsilon(\tau-1)/2]/(\kappa-1)\,,\ \ \ q=C_o\varepsilon(\tau-1)^2/2/(\kappa-1)\,,$$

$$\Delta S/c_v=\sigma=(\kappa-1)\ln(\omega)-\ln(\tau),\ \ \ C_{o=}c_vT_o\,. \qquad (3b)$$

K výhodám tohoto modelu patří poměrná jednoduchost a uspokojivě široká možnost vzájemného explicitního vyjádření důležitých veličin děje. Naproti tomu nevýhodou se ukazuje vlastně kvadratická závislost sděleného tepla na rozdílu teplot. Předložená varianta (M4) oslabuje tuto nevýhodu tím, že sice ponechává tepelný tok úměrný rozdílu teplot, ale předpokládá, že kromě toho závisí na kompresní práci, která je i při limitní izotermické změně vždy konečná; postupně tak dostaneme

$$dq=c.(T-T_o).dw\,,\ \ \omega^{(\kappa-1)(1+\zeta)}=X_\omega=\tau/[1\text{-}\zeta(\tau-1)]\,,\ \ \tau=X_\omega(1+\zeta)/(1+\zeta X_\omega)]\,, \qquad (4a)$$

$$c=\zeta/T_o,\ \pi=\tau.\omega=\omega.X_\omega(1+\zeta)/(1+\zeta X_\omega)]=\tau.X_\tau^{1/(\kappa-1)(1+\zeta)}\,,$$

$$\zeta=2\beta/[(\tau-1)(1-\beta)]\,,\ \ \beta=\zeta(\tau-1)/[2+\zeta(\tau-1)]\,. \qquad (4b)$$

Také zde jsou poměrně široké možnosti explicitního a reverzně explicitního vyjádření a rovněž vzájemné explicitní vyjádření veličin ζ a β.

Pro bezrozměrnou kompresní práci, teplo a entropii lze pak nalézt

$$\lambda=w/(c_vT_o)=\ln[(1+\zeta X_\omega)/(1+\zeta)]/\zeta\,,\ q^*=q/c_v=-\ln[1-\zeta(\tau-1)]/\zeta-(\tau-1) \qquad (4c)$$

$$\sigma=\Delta S/c_v=C_o[(\kappa-1)\ln(\omega)-\ln(\tau)]\,. \qquad (4d)$$

Na obr. 1 jsou průběhy kompresních linií podle tohoto modelu. Parametrem je poměr tepla odvedeného v průběhu děje k potřebné kompresní práci porovnatelné polytropické komprese β_p za předpokladu, že při konečném stavu pro ω=3125 jsou kompresní práce obou dějů stejné. Vidíme, že čáry jsou při vyšších intenzitách odvodu tepla skloněny k ose entropie a zřetelně se tak liší od odpovídajících polytropických kompresí. Obr. 2 ukazuje příslušné kompresní práce. Veličina τ_p odpovídající polytropické kompresi pro β=0,5 zde má význam porovnávacího objemového stlačení.

Obr. 3 ukazuje za téhož předpokladu průběhy relativních odchylek kompresní práce obou modelů. Pro děj podle modelu M4 je odtud odvozena příslušná intenzita toku tepla ζ, která přirozeně musí být v průběhu celého děje konstantní. Proto jednotlivé křivky směřují na konci děje do nuly. Odchylky jsou také silně ovlivněny konečnou hodnotou objemového stlačení, takže uvedené hodnoty lze brát jen jako příklad. I tak je však patrno, že nejde o zanedbatelné rozdíly.

Až dosud jsme sledovali odchylky vlastně "privilegované" veličiny - té, jejíž nula v jistém bodě byla předepsána a celý její průběh byl tak příznivě ovlivněn. U dalších veličin (tlaku nebo teploty, odvedeného tepla nebo poměru β, entropie) tomu tak nebylo, proto průběhy jejich odchylek jsou nutně méně příznivé (obr. 4).

Uvedenou verzi modelu M4 lze pokládat za výchozí, protože nabízí dosti široké možnosti zobecnění a to modifikací definičního vztahu (4a) zavedením obecnějšího exponentu "x"

$$dq = c.(T^x - T_o^x).dw\ , \quad \text{resp.} \quad dq/(c_v T_o) = \xi(\tau^x - 1)d\lambda\ , \qquad (4e)$$

pomocí níž lze odvodit vztah pro příslušnou změnu stavu

$$\omega^{(\kappa-1)(1+\xi)} = \tau/[1-\xi(\tau^x-1)]^{1/x}\ ,$$

z kterého však nelze odvodit reverzně explicitní vztah pro τ. Méně příznivá je také situace, pokud jde o vztahy pro práci a teplo, kde není obtížné nalézt výchozí diferenciální rovnici, ale její elementární integrace je možná jen pro určité speciální případy; např. pro x=1/2 a x=2 dostaneme

$$\lambda_{1/2} = -2\ln[1-\xi(\tau^{1/2}-1)]/\xi\ , \quad \lambda_2 = -2\mathrm{acth}[\tau/(1+\xi)^{1/2}]/\xi\ .$$

Přes nesporné přednosti modelu M4 proti M3 mají oba jednu nevýhodu společnou: v limitním případě izotermického děje rostou koeficienty ε a ζ charakterizující intenzitu sdílení tepla do nekonečna. To sice na jedné straně upozorňuje na malou pravděpodobnost takových dějů, na druhé straně však otevírá otázku, zda neexistují modely vhodnější.

3. Poznámka k vlivu přesnější rovnice stavu

Úvodem připomeňme, že pokud je cílem analytické řešení, jsou možnosti volby přesnější rovnice stavu značně omezené. Protože i poměrně jednodu-ché výchozí předpoklady na požadovaná řešení nevedou, byla úloha rozdě-lena na dvě dílčí: a) na úvahu o vlivu použití přesnější rovnice stavu za s tím, že v uvažovaném intervalu teplot jsou specifické tepelné kapacity nezá-vislé na teplotě a b) na posouzení důsledků respektování uvedené teplotní závislosti, ovšem opět izolovaně od druhého vlivu, tj. pro ideální plyn.

Pokud jde o úlohu a), bylo možno zabývat se jen takovou změnou, kde se nemůže uplatnit vliv obecně neurčitelných teplotních funkcí vyšších viriálních členů - tedy změnou izotermickou. Tento přístup přirozeně silně omezuje možnost obecnějších závěrů, proto na dále uvedená fakta je třeba hledět jen jako na kvlitativní informaci.

Pro posouzení byly vybrány tři známé jednoduché rovnice stavu:

a) rovnice van der Waalsova (vdW)

$$\pi=\rho\tau/(\varphi-\beta)-\alpha/\varphi^2\ , \quad \rho=r.T_c/(p_c.v_c)\ , \quad \tau=T/T_c\ , \quad \pi=p/p_c\ , \quad \varphi=v/v_c\ , \qquad (5)$$

kde r je plynová konstanta a bezrozměrné veličiny teploty, tlaku a měrného objemu jsou vztaženy k příslušným kritickým hodnotám. Veličiny ρ,α,β jsou v daném případě konstanty: $\rho=8/3$, $\alpha=3$, $\beta=1/3$.

b) tzv. Základní (nejjednodušší) viriální tvar (ZVT)

$$\pi=\rho\tau/\varphi-\alpha/\varphi^2+\beta/\varphi^3\ , \quad \rho=3\ , \quad \alpha=3\ , \quad \beta=1\ ; \qquad (6)$$

obě předchozí rovnice mají tu nevýhodu, že pro veličinu ρ (převratná hodnota kompresibilitního faktoru), která je pro každou látku různá, předepisují pevnou hodnotu.

c) Hirschfelderův pětičlenný viriální rozvoj (Hfd) tuto nevýhodu nemá

$$\pi = \rho\tau/\varphi+\alpha/\varphi^2+\beta/\varphi^3+\gamma/\varphi^4+\delta/\varphi\ ,$$

$$\alpha = -4.95574\ , \quad \beta = 4.29574\ , \quad \gamma = -2.43858\ , \delta = 0.67\ . \qquad (7)$$

Pro test byl zvolen dusík, pro nejž platí: $\rho=3.42858$, $T_c=126.25$ K, $p_c=3.398$ Mpa, $v_c=90.1$ cm^3/mol a počáteční teplota $t_C=20$ ^oC a jí odpovídající tlak sytosti vody $p_o=0.00233931$ Mpa; hodnoty bezrozměrných proměnných jsou v tom případě $\tau_o=2.32198$, $\pi_o=6.8844$ E-4 a $\varphi_o=3374.8$. Pro danou teplotu a měrný objem vedl výpočet podle uvedených rovnic stavu k odchylkám tlaků řádu zlomků procent až procent a to až do poměrných objemových stlačení řádu několika set; pak ale strmě rostly.

4. Vliv závislosti specifických tepelných kapacit na teplotě

Tento vliv se ověřoval na základě tří typů funkcí: a) lineární a b) kvadratické aproximace a c) závislosti doporučené v literatuře jako modelové pro popis postupného naplňování vibračních stupňů volnosti u plynů s víceatomovými molekulami. Testováno bylo na adiabatickém, popř. polytropickém ději. Proměnnou byl opět objemový poměr děje.

a,b) Za předpokladu, že teplotní závislost tepelné kapacity při stálém objemu je definována vztahem

$$c_v = c_{vo}[1+\alpha(\tau-1)+\beta(\tau-1)^2]$$

plyne pro změnu stavu a bezrozměrnou práci při adiabatickém ději, že

$$\omega^{\kappa-1}=\tau^{1-\alpha+\beta}\exp[(\alpha-2\beta)(\tau-1)+\beta(\tau^2-1)/2]\ ,\ \lambda=\tau-1+\alpha(\tau-1)^2/2+\beta(\tau-1)^3/3\ . \quad (8)$$

c) Podle [8] lze teplotní závislost tepelné kapacity při stálém objemu s ohledem na vibrační energii molekul vyjádřit

$$c_v = c_{vo}\{1+(\kappa-1)[(\theta/T)/\mathrm{sh}(\theta/T)]^2\}\ , \quad (9)$$

kde θ je poloviční absolutní charakteristická teplota naplňování příslušného vibračního stupně volnosti; pro změnu stavu při adiabatickém ději takového media lze pak nalézt

$$\omega = \tau^{1/(\kappa-1)}[\mathrm{sh}(\theta/T)/\mathrm{sh}(\theta/T_o)]\exp[(\theta/T)\mathrm{cth}(\theta/T)-(\theta/T_o)/\mathrm{cth}(\theta/T_o)] \quad (10)$$

a pro práci

$$\lambda = \tau-1+(\kappa-1)(\theta/T_o)[\mathrm{cth}(\theta/T)-\mathrm{cth}(\theta/T_o)]\ . \quad (11)$$

Porovnání ukázalo, že rozdíly mezi jednotlivými aproximacemi nejsou sice zanedbatelné, ale že pořád jsou zřetelně menší než ty, které vyplynuly z porovnání s ideálním plynem. Ty se nacházely v podobné oblasti s jakou jsme se setkali při porovnávání různých modelů komprese.

5. Závěry

Příspěvek představil část analytického aparátu ke zpřesnění dosavadních popisů silných neadiabatických kompresí s jakými je třeba počítat při kolapsu kavitačních bublin. Uvažuje se, zatím odděleně, odvod tepla v průběhu děje podle modelu M4, teplotní závislost specifických tepelných kapacit a popř. přesnější rovnice stavu než pro ideální plyn, jejíž vliv se zatím ukazuje jako poměrně slabý. Naproti tomu každá z prvních dvou skutečností může při velkých objemových stlačeních řádu 10^3 vést ke zpřesnění až o desítky procent. První část podrobnější kvantifikace těchto vlivů je uvedena v připojených diagramech.

Problém byl řešen v rámci grantu AV ČR S2076003.

LITERATURA

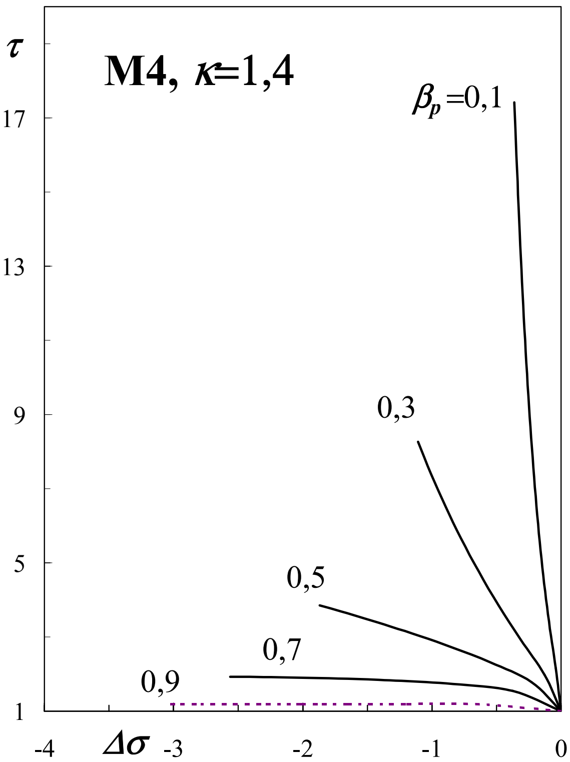
1. Brdička, M:, Samek, L., Taraba, O.: Kavitace. Teoretická literatura, Praha 1981
2. Young, F.R.: Cavitation. McGraf–Hill London, 1989, 1234 AP 8909
3. Zima, P., Maršík, F.: Dynamics of a bubble in variable pressure and temperature fields of a liquid. Národní konference s mezinárodní účastí Inženýrská mechanika, Svratka 1999, ÚT AVČR Praha 1999
4. Zima, P., Maršík, F.: Nucleation and dynamics of bubbles in a binary water–gas solution. Int. Conf. Engineering Mechanics, Svratka 2000, ÚT AVČR Praha 2000
5. Bayer, Z.: Some remarks on collapse–models of cavitation bubbles. National Conf. With International Participation Engineering Mechanics 2001, Svratka, May 14-17, 29-30, IT ASCR Prague, ISBN 80-85918-64-1
6. Yuan, H., Prosperetti. Gas-liquid heat transfer in a bubble collapsing near the wall. Phys. Fluids, Vol.9, No.1, January 1997, 127-142
7. Bayer, Z.: Analytický model silné neadiabatické komprese ideálního plynu. XIII. Vedecká konf. s medzinárodnou účasťou: Aplikácia experimentálnych a numerických metód v mechanike tekutín, SF ŽU, 25.-6.4.02, Zuberec, Slovensko
8. Liepmann, H.V., Roshko, A.: Elements of gasdynamics, New York, J. Wiley, 1957

Some possibilities of analytical description of strong non-adiabatic gas compression

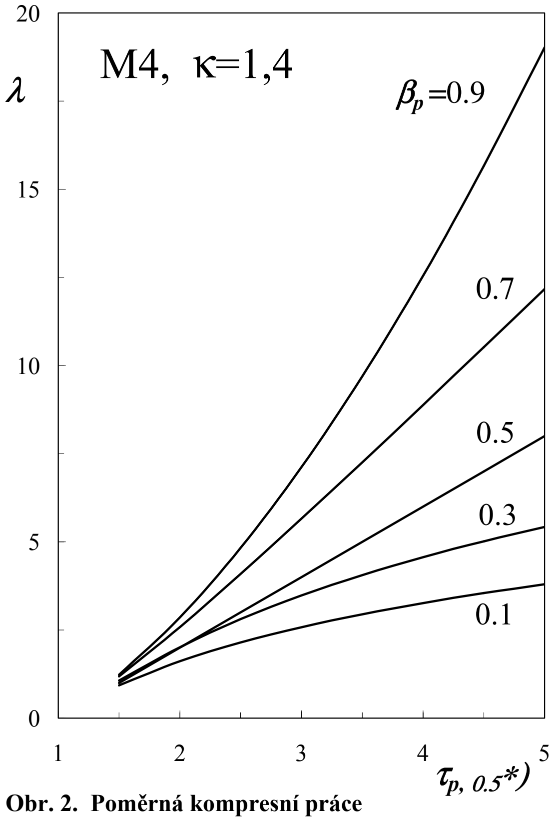
Z. Bayer

Paper deals with modelling of the gas-state, and thermodynamic behaviour in cavitation bubbles. After recent presentation of model M3 based on the more realistic idea of the heat transfer in the course of bubble compression, an advanced version M4 is introduced. The comparison of the polytropic and M4 models of process shows the results for high volume compression ratios may differ in tenths of percent. In a simillar region lies the discrepancy caused by using more accurate equation of state and temperature dependence of the heat capacity.

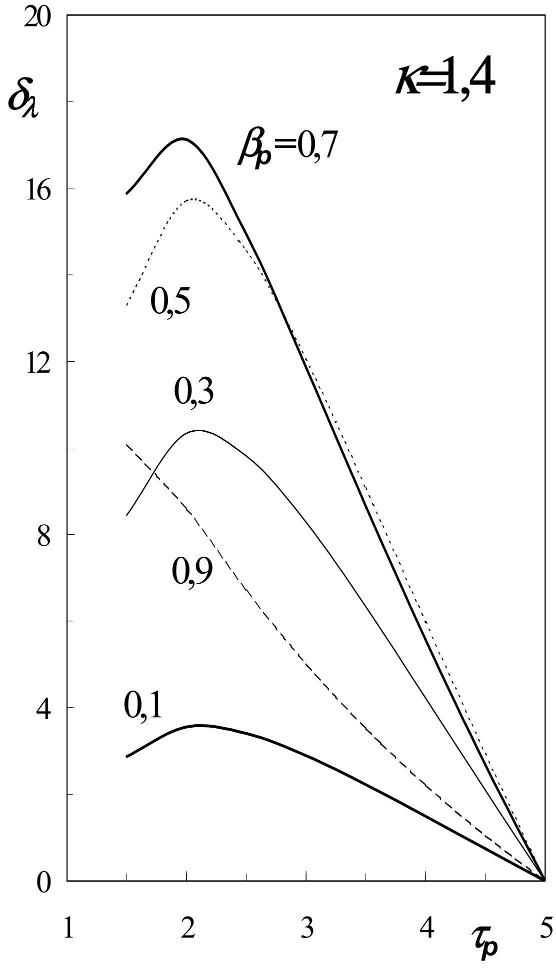
Key words: cavitation, non-adiabatic compression, mathematical models, real gas



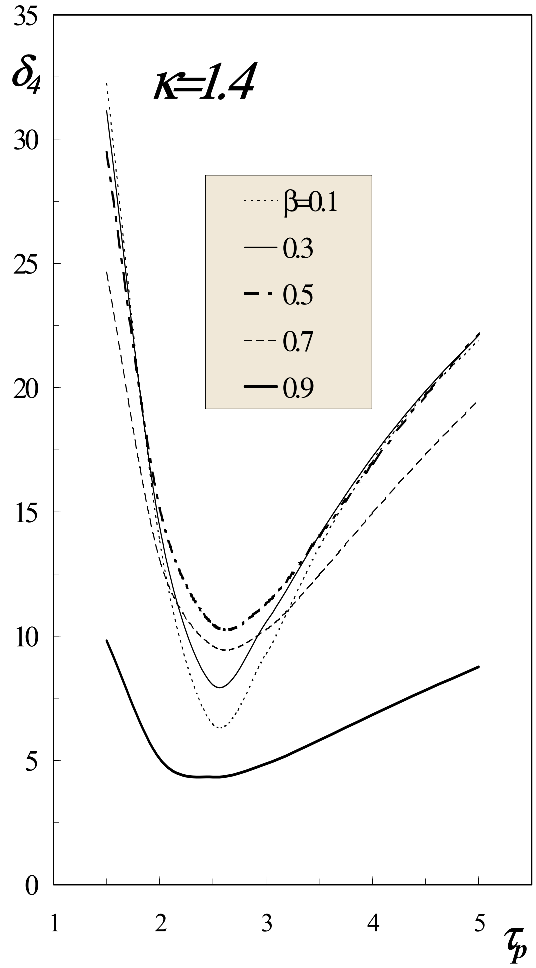
Obr. 1. Komprese podle M4 v τ–σ (T-s) diagramu



Obr. 2. Poměrná kompresní práce



Obr. 3. Relativní odchylka kompresní práce modelu M4 od Mp



Obr. 4. Průměrná odchylka M4 od Mp