



Národní konference s mezinárodní účastí  
**INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002**

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**POROVNÁNÍ VYBRANÝCH SCHÉMÁT PRO  
NUMERICKOU SIMULACI PROUDĚNÍ NEVAZKÉ  
STLAČITELNÉ TEKUTINY**

Miroslav Hajšman<sup>1</sup>

*Abstrakt : V této práci je provedeno porovnání vybraných výpočtových schémat přesnosti prvního a druhého řádu pro řešení proudění neviské stlačitelné tekutiny. Důraz je kladen na porovnání výpočtových schémat druhého řádu při volbě umělé viskozity Jamesonova typu. Cílem volby vhodné umělé viskozity je, aby bez ztráty přesnosti daného schématu zároveň došlo ke zlepšení vlastností celého iteračního procesu a získaného řešení. Jedná se zejména o odstranění nežádoucích oscilací v konečném řešení a zlepšení konvergence výpočtu.*

*Porovnání schémat je provedeno na GAMM kanále. Úloha je definována v kartézském souřadném systému a řešení bylo hledáno metodou konečných objemů. Systém výchozích partiálních diferenciálních rovnic byl převeden do konzervativního tvaru.*

**Klíčová slova :** GAMM kanál, výpočtová schémata prvního a druhého řádu, Jamesonovo tlumení, metoda konečných objemů, konvergence

## Úvod

V práci je řešena analýza transonického proudění stlačitelné neviské tekutiny v rovinném GAMM kanále. Cílem této práce je otestovat na známém modelovém případě jeden ze způsobů numerického řešení proudění tekutiny. Dále chceme porovnat získané výsledky od různých výpočtových schémat s výsledky uváděných v literatuře a poté následně vybrat nejvhodnější schéma pro řešení problémů v různých technických aplikacích.

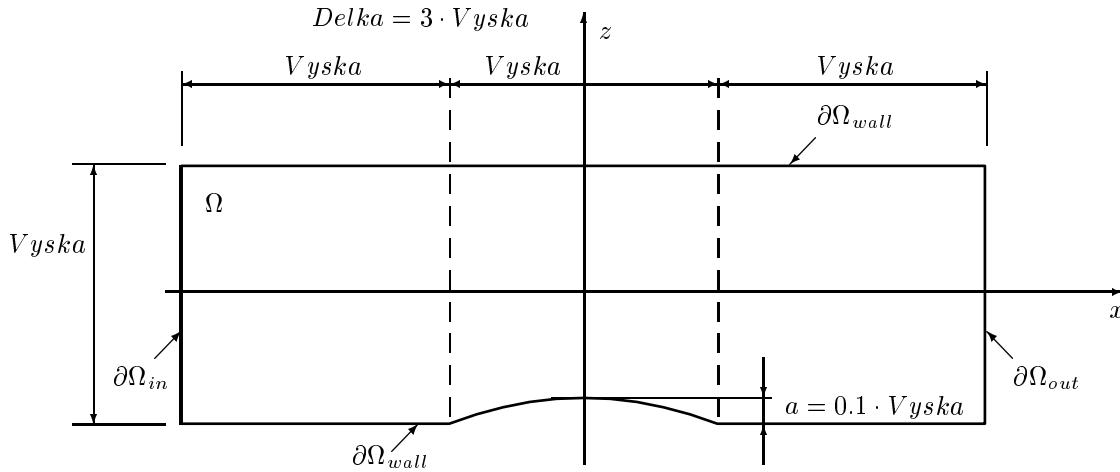
## Matematický model

Geometrický model rovinného GAMM kanálu je uveden na obr. 1. Výška výdutě je rovna 10% výšky kanálu.

Při řešení uvažujeme, že tekutina vyplňující oblast je stlačitelná a neviská a splňuje rovnici stavovou, rovnici kontinuity, Eulerovo rovnice a energetickou rovnici

$$p = \rho r T , \quad (1)$$

<sup>1</sup>Ing. Miroslav Hajšman, Stevenson & Associates - CZ, Vejprnická 56, 318 02 Plzeň; tel. +420 19 73 869 61, e-mail: m.hajzman@seznam.cz



Obr. 1: Geometrický model GAMM kanálu ve 2D

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial(c_p T)}{\partial t} + \rho v_l \frac{\partial(c_p T)}{\partial x_l} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \rho r - p \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \quad (4)$$

kde  $i, l, m = 1, 2$ .

Prvotním cílem analýzy je nalézt v kartézských souřadnicích ve 2D rozložení rychlosti  $\mathbf{v}(x_i, t) = [u(x_i, t), w(x_i, t)]$ , rozložení tlaku  $p = p(x_i, t)$ , hustoty  $\rho = \rho(x_i, t)$  a termodynamické teploty  $T = T(x_i, t)$  v oblasti  $\Omega$  při zvolených počátečních a okrajových podmínkách. Poloha obecného bodu oblasti  $\Omega$  je určena kartézskými souřadnicemi  $x_i$ ,  $i = x, z$ . Další veličinou, kterou můžeme vypočítat, je rozložení Machova čísla v kanále  $M = |\mathbf{v}|/a$ , kde  $a = \sqrt{\kappa r T}$  je rychlost zvuku. Tato veličina bude středem naší pozornosti, protože v okolí výdutě v kanále vzniká rázová vlna a ta je rozhodující pro naše potřeby porovnání výsledků uvažovaných výpočtových schémat s výsledky uvedenými v literatuře.

## Počáteční podmínky

Počáteční podmínky v oblasti  $\Omega$  volíme tyto

$$\left. \begin{aligned} \rho(x_i, t = 0) &= \rho_0(x_i) = \rho_0 \\ T(x_i, t = 0) &= T_0(x_i) = T_0 \\ u(x_i, t = 0) &= u_0(x_i) = u_0 \\ w(x_i, t = 0) &= w_0 = 0 \end{aligned} \right\} x_i \in \Omega. \quad (5)$$

## Okrajové podmínky

Definujeme hranice  $\partial\Omega_{in}$ ,  $\partial\Omega_{out}$  a  $\partial\Omega_{wall}$  tak, jak je ukázáno na obr. 1.

Okrajové podmínky stanovujeme pro každou dílčí hranici samostatně.

Na vstupu do kanálu zadáváme úhel náběhu proudu  $\alpha_0$  a hodnoty stagnačních veličin, hustoty  $\rho_{in}^s$  a tlaku  $p_{in}^s$

$$\left. \begin{aligned} \rho^s(x_i, t) &= \rho_{in}^s \\ p^s(x_i, t) &= p_{in}^s \\ \alpha(x_i, t) &= \alpha_0 \end{aligned} \right\} x_i \in \partial\Omega_{in}, t \in (0, T_n). \quad (6)$$

Protože v uvažovaných rovnicích figurují statické veličiny  $\rho$  a  $p$  a ne stagnační  $\rho^s$  a  $p^s$ , je nutné na vstupu do kanálu vždy přepočítat hodnoty stagnačních veličin na statické podle vztahů

$$\rho = \rho^s \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}, \quad p = p^s \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}. \quad (7)$$

Na výstupu zadáváme pouze výstupní tlak  $p_{out}$

$$p(x_i, t) = p_{out} \quad \dots \quad x_i \in \partial\Omega_{out}, t \in (0, T_n). \quad (8)$$

Abychom počítali testovací příklad transonického proudění v GAMM kanále shodný s příkladem v literatuře, je nutné volit výstupní tlak  $p_{out}$  tak, aby odpovídal vstupnímu stagnačnímu tlaku  $p_{in}^s$  při hodnotě Machova čísla  $M_{out} = 0.675$ , tj.

$$p_{out} = p_{in}^s \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{out}^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}. \quad (9)$$

Na horní a dolní stěně kanálu je zvolena okrajová podmínka reprezentující stěnu

$$\left. \begin{aligned} u(x_i, t) &= 0 \\ w(x_i, t) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial n}(x_i, t) &= 0 \end{aligned} \right\} x_i \in \partial\Omega_{wall}, t \in (0, T_n). \quad (10)$$

Ze zadání plyne, že vstup a výstup z kanálu je subsonický, transonické proudění nastává uprostřed kanálu v okolí vřetě.

Je také zřejmé, že při stanovování okrajových podmínek jsme respektovali matematickou teorii hyperbolických rovnic, ze které plyne, že na hranici reprezentující subsonický vstup  $\partial\Omega_{in}$  je nutné zvolit tři okrajové podmínky a na hranici reprezentující subsonický výstup  $\partial\Omega_{out}$  jednu okrajovou podmínku.

## Převod do konzervativního tvaru

Výchozí soustavu rovnic (1), (2), (3) a (4) převedeme do konzervativního systému rovnic ve 2D, přičemž zavedeme vztah pro celkovou energii  $e = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2)$ , kde  $\epsilon$  je měrná vnitřní energie, a konstitutivní vztah pro tlak  $p = (\kappa - 1) \left[ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \right]$ , kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta.

Konzervativní systém rovnic můžeme vyjádřit nelineární vektorovou parciální diferenciální rovnicí. Neuvažujeme-li objemové síly, pak vektorová rovnice ve 2D tvoří konzervativní systém Eulerových rovnic

$$\mathbf{W}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{W})]_x + [\mathbf{H}(\mathbf{W})]_z = \mathbf{0}, \quad (11)$$

kde vektor  $\mathbf{W}$  představuje vektor neznámých a indexy  $t, x, z$  značí derivace podle času, resp. podle prostorových proměnných. Pro jednotlivé vektory platí

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u w \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w^2 + p \\ (e + p)w \end{pmatrix}. \quad (12)$$

V řešené oblasti předpokládáme transonické proudění, takže soustava (11) je hyperbolického typu. Soustava (11) spolu s počátečními a okrajovými podmínkami tvoří matematický model řešeného problému. Řešení vektorové rovnice provedeme metodami konzervativní diskretizace použitím metody konečných objemů.

## Diskretizace systému rovnic ve 2D

Pro řešení uvedeného problému bylo použito několik výpočetních schémat aplikovaných na metodu konečných objemů, kde výpočetními elementy jsou čtyřúhelníky. Prvním ze schémat je schéma **Lax-Friedrichsovo**, které je přesnosti prvního řádu a má pro metodu konečných objemů tvar

$$\mathbf{W}_{ik}^{n+1} = \frac{1}{4} (\mathbf{W}_{i+1k}^n + \mathbf{W}_{i-1k}^n + \mathbf{W}_{ik+1}^n + \mathbf{W}_{ik-1}^n) - \frac{\Delta t}{\mu_{ik}} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{F}_m^n \Delta z_m - \mathbf{H}_m^n \Delta x_m). \quad (13)$$

**Richtmyerovo** schéma je dvoukrokové schéma přesnosti druhého řádu, jehož prvním krokem je schéma Lax-Friedrichsovo - vztah (13) a druhý krok má tvar

$$\mathbf{W}_{ik}^{n+2} = \mathbf{W}_{ik}^n - 2 \frac{\Delta t}{\mu_{ik}} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{F}_m^{n+1} \Delta z_m - \mathbf{H}_m^{n+1} \Delta x_m). \quad (14)$$

Ve vztazích (13) a (14) pro numerické toky platí vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{i+1k}), & \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ik+1}), \\ \mathbf{F}_3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{i-1k}), & \mathbf{F}_4 &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ik-1}). \end{aligned} \quad (15)$$

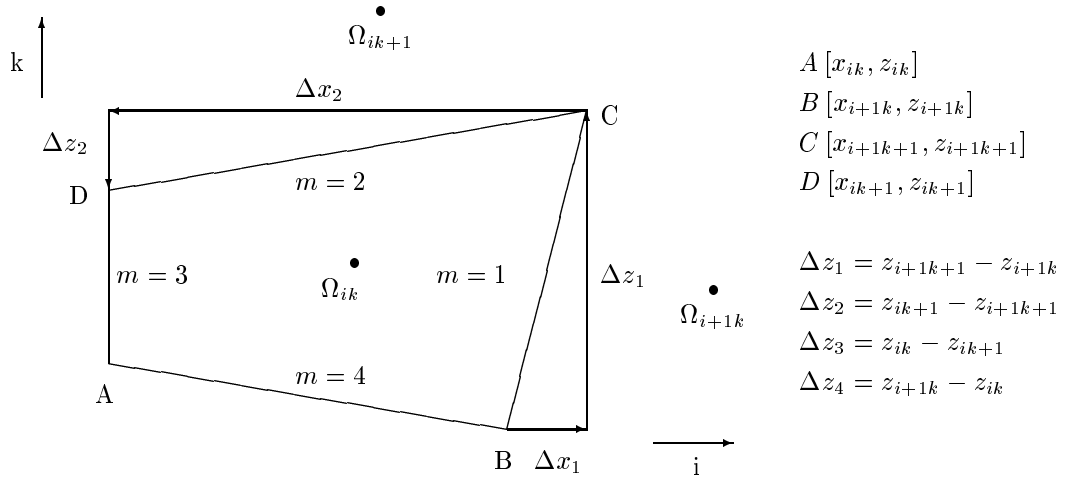
Dále platí, že  $\mu_{ik}$  představuje obsah elementu o indexech  $ik$  a  $\Delta z_m$  je velikost průmětu hranice  $m$  elementu  $ik$  do směru  $z$ , viz. obr. 2. Analogické vztahy platí pro  $\mathbf{H}_m$  a  $\Delta x_m$ .

Dalším schématem přesnosti druhého řádu je schéma **Lax-Wendroffovo**

$$\mathbf{W}_{ik}^{n+1} = \mathbf{W}_{ik}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{ik}} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{F}_m^n \Delta z_m - \mathbf{H}_m^n \Delta x_m), \quad (16)$$

kde pro numerické toky  $\mathbf{F}$  platí

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^n &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i+1k}^n + \mathbf{F}_{ik}^n] - \frac{\Delta t}{2\mu_{ik}} \Delta z_1 \mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}k}^2 (\mathbf{W}_{i+1k}^n - \mathbf{W}_{ik}^n), \\ \mathbf{F}_2^n &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{ik+1}^n + \mathbf{F}_{ik}^n] - \frac{\Delta t}{2\mu_{ik}} \Delta z_2 \mathbf{A}_{ik+\frac{1}{2}}^2 (\mathbf{W}_{ik+1}^n - \mathbf{W}_{ik}^n), \\ \mathbf{F}_3^n &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{ik}^n + \mathbf{F}_{i-1k}^n] - \frac{\Delta t}{2\mu_{ik}} \Delta z_3 \mathbf{A}_{i-\frac{1}{2}k}^2 (\mathbf{W}_{ik}^n - \mathbf{W}_{i-1k}^n), \\ \mathbf{F}_4^n &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{ik}^n + \mathbf{F}_{ik-1}^n] - \frac{\Delta t}{2\mu_{ik}} \Delta z_4 \mathbf{A}_{ik-\frac{1}{2}}^2 (\mathbf{W}_{ik}^n - \mathbf{W}_{ik-1}^n), \end{aligned} \quad (17)$$



Obr. 2: Příklad obecného elementu  $\Omega_{ik}$

a kde pro  $\Delta z_m$  platí stejné vztahy jako pro Richtmyerovo schéma, viz. obr. 2, a kde  $\mathbf{A}$  je Jacobiho matice, pro kterou platí

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \quad , \quad (18)$$

a kterou můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{(\kappa-1)}{2}|v|^2 & u(3-\kappa) & w(1-\kappa) & (\kappa-1) \\ -uw & w & u & 0 \\ u(\kappa-1)|v|^2 - u\kappa\frac{\epsilon}{\rho} & -\frac{(\kappa-1)}{2}(2u^2 + |v|^2) + \kappa\frac{\epsilon}{\rho} & uw(1-\kappa) & \kappa u \end{bmatrix} \quad , \quad (19)$$

kde jsme zavedli označení  $|v|^2 = u^2 + w^2$ . Podobně jako (17) zavedeme numerické toky  $\mathbf{H}$  a odvodíme Jacobiho matici  $\mathbf{C}$ .

**MacCormackovo** dvoukrokové schéma typu prediktor-korektor je druhého řádu a má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{W}_{ik}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{ik}} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{F}_m^n \Delta z_m - \mathbf{H}_m^n \Delta x_m) \quad , \\ \mathbf{W}_{ik}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{W}_{ik}^n + \mathbf{W}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_{ik}} \sum_{m=1}^4 \left( \mathbf{F}_m^{n+\frac{1}{2}} \Delta z_m - \mathbf{H}_m^{n+\frac{1}{2}} \Delta x_m \right) \right] \quad . \end{aligned} \quad (20)$$

V prediktorovém kroku, prvním vztahu (20), je

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{i+1k} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{ik+1} \quad , \quad \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_{ik} \quad . \quad (21)$$

Podobné vztahy platí pro  $\mathbf{H}_m$ . V korektorovém kroku, druhém vztahu (20), je

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{ik} \quad , \quad \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{i-1k} \quad , \quad \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_{ik-1} \quad (22)$$

a podobně pro  $\mathbf{H}_m$ . Pro  $\Delta x_m$  a  $\Delta z_m$  platí stejné vztahy jako pro předcházející schémata, viz. obr. 2.

## Umělá vazkost Jamesonova typu

Při aplikaci schémat druhého řádu byla použita umělá vazkost Jamesonova typu [1], tj. po provedení iterace příslušného schématu byl k výslednému vektoru  $\mathbf{W}_{ik}$  (jedná se o  $\mathbf{W}_{ik}$  v rovnicích (14), (16) a (20) ) přičten člen  $d\mathbf{W}_{ik}^n$ , který má tento tvar

$$\begin{aligned} d\mathbf{W}_{ik}^n &= \epsilon_2^{i+} (\mathbf{W}_{i+1k}^n - \mathbf{W}_{ik}^n) - \epsilon_2^{i-} (\mathbf{W}_{ik}^n - \mathbf{W}_{i-1k}^n) + \\ &+ \epsilon_2^{k+} (\mathbf{W}_{ik+1}^n - \mathbf{W}_{ik}^n) - \epsilon_2^{k-} (\mathbf{W}_{ik}^n - \mathbf{W}_{ik-1}^n) - \\ &- \epsilon_4^i (\mathbf{W}_{i+2k}^n - 4\mathbf{W}_{i+1k}^n + 6\mathbf{W}_{ik}^n - 4\mathbf{W}_{i-1k}^n + \mathbf{W}_{i-2k}^n) - \\ &- \epsilon_4^k (\mathbf{W}_{ik+2}^n - 4\mathbf{W}_{ik+1}^n + 6\mathbf{W}_{ik}^n - 4\mathbf{W}_{ik-1}^n + \mathbf{W}_{ik-2}^n), \end{aligned} \quad (23)$$

kde  $\epsilon_2^{i+}$ ,  $\epsilon_2^{i-}$ ,  $\epsilon_2^{k+}$ ,  $\epsilon_2^{k-}$ ,  $\epsilon_4^i$  a  $\epsilon_4^k$  byly zvoleny ve tvaru

$$\epsilon_2^{i+} = \epsilon_2 \left| \frac{p_{i+2k} - 2p_{i+1k} + p_{ik}}{p_{i+2k} + 2p_{i+1k} + p_{ik}} \right|, \quad \epsilon_2^{i-} = \epsilon_2 \left| \frac{p_{ik} - 2p_{i-1k} + p_{i-2k}}{p_{ik} + 2p_{i-1k} + p_{i-2k}} \right| \quad (24)$$

$$\epsilon_2^{k+} = \epsilon_2 \left| \frac{p_{ik+2} - 2p_{ik+1} + p_{ik}}{p_{ik+2} + 2p_{ik+1} + p_{ik}} \right|, \quad \epsilon_2^{k-} = \epsilon_2 \left| \frac{p_{ik} - 2p_{ik-1} + p_{ik-2}}{p_{ik} + 2p_{ik-1} + p_{ik-2}} \right| \quad (25)$$

$$\epsilon_4^i = \epsilon_4^k = \epsilon_4, \quad (26)$$

kde  $\epsilon_2$  a  $\epsilon_4$  jsou volitelné konstanty.

Členu  $d\mathbf{W}_{ik}^n$  říkáme tlumící člen s umělou vazkostí. Ten má za účel utlumit silné oscilace vznikající v blízkosti nespojitostí typu rázové vlny (členy s koeficientem  $\epsilon_2$ ) a dále slabší kmity v celém počítaném poli (členy s koeficientem  $\epsilon_4$ ).

Při hledání řešení dané úlohy byla hledána vhodná volba koeficientů  $\epsilon_2$  a  $\epsilon_4$  umělé vazkosti Jamesonova typu a jejich hodnoty je možné nalézt v tabulce 1.

## Konvergence

Uvažovaná schémata jsou iterační procesy a jejich konvergence byla posuzována vztahem

$$\frac{(\mathbf{W}_{ik}^{n+1})_m - (\mathbf{W}_{ik}^n)_m}{(\mathbf{W}_{ik}^{n+1})_m} \leq \epsilon_m, \quad \forall i, k, \quad m = 1 \dots 4 \quad (27)$$

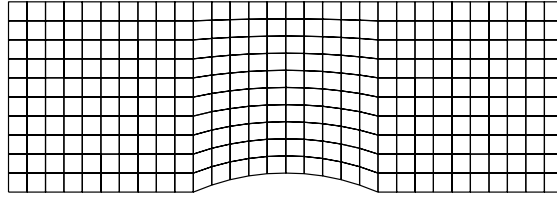
kde  $m$  představuje index složky vektoru neznámých  $\mathbf{W}_{ik}$  ( ve 2D je délka vektoru  $\mathbf{W}_{ik}$  rovna 4 ) a tedy posuzujeme konvergenci jednotlivých rovnic.

Při hledání řešení dané úlohy se ukázalo, že dostačujícími faktory konvergence iteračního procesu je jednotná volba  $\epsilon_m = 0.001, \forall m$ , nezávisle na volbě iteračního schématu. Dále se ukázalo, že rychlost konvergence rovnic 1, 2 a 4 je mnohonásobně větší než konvergence rovnice 3, takže při dosažení přesnosti  $\epsilon_3 = 0.001$  je dosažená přesnost rovnic 1, 2 a 4 nejméně o 3 řády větší, viz. obr. 8.

## Stabilita

Všechna uvedená schémata jsou podmíněně stabilní s tzv. CFL podmínkou stability, která klade omezení na volbu iteračního časového kroku  $\Delta t$

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \left( \frac{|u_{ik}^n| + a_{ik}^n}{\Delta x} + \frac{|w_{ik}^n| + a_{ik}^n}{\Delta z} \right)^{-1}, \quad \text{CFL} \leq 1, \quad (28)$$



Obr. 3: Ukázka zvoleného typu sítě pro GAMM kanál ve 2D pro 30x10 buněk

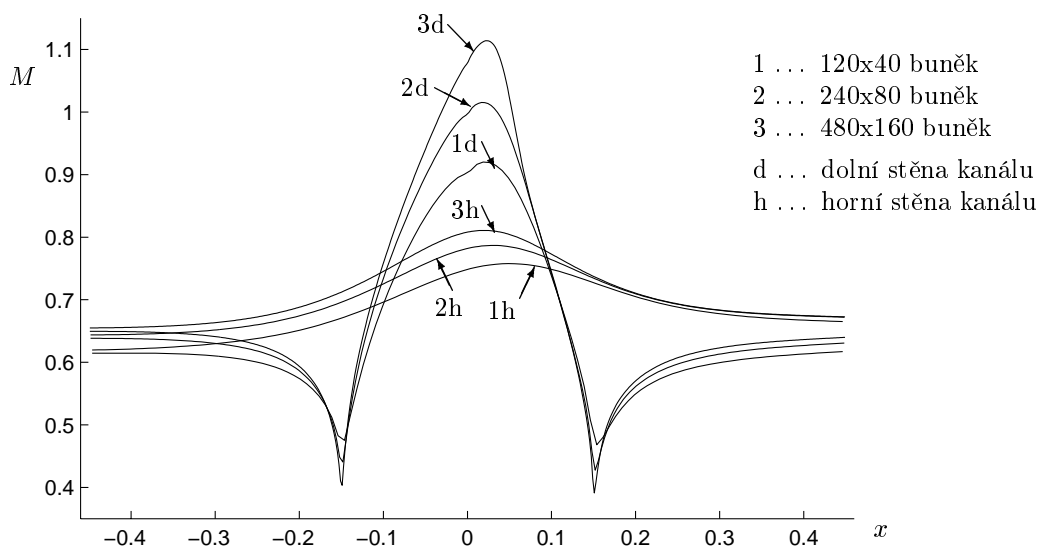
kde CFL představuje volitelnou konstantu.

Při hledání řešení dané úlohy byla hledána vhodná volba koeficientu stability CFL. Výpočty ukázaly, že nejlepší volbou je co největší možná hodnota CFL, což je pro Lax-Friedrichsovo schéma hodnota 1. Pro schémata druhého řádu je stanovení největší možné hodnoty CFL složitější - viz. tabulka 1.

## Numerické řešení

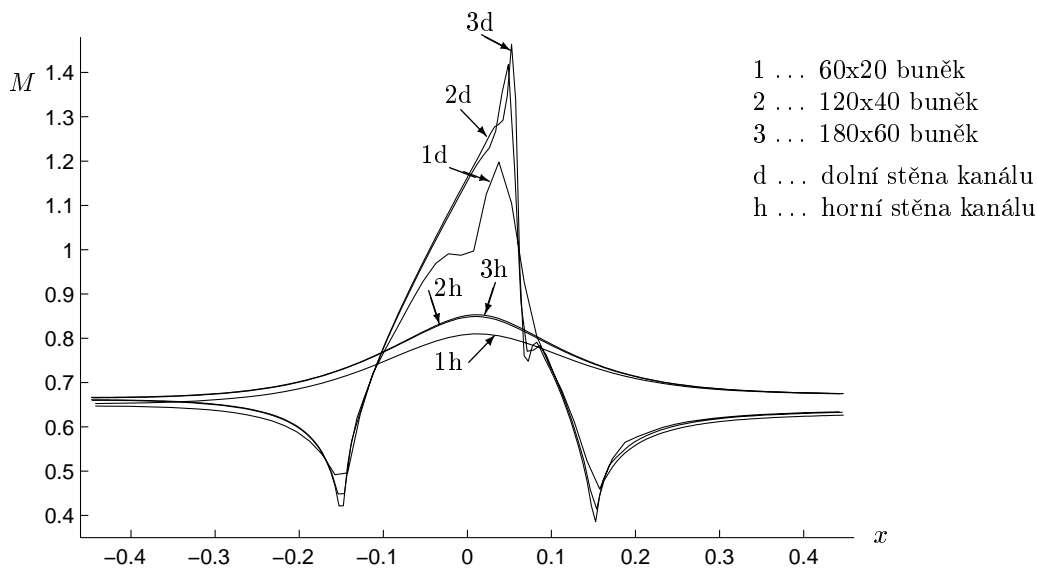
Vlastní numerický výpočet transonického proudění v GAMM kanále byl proveden na typu sítě podle obr. 3 a jeho rozměry byly zvoleny takto - výška kanálu  $Vyska = 1\text{ m}$ , ostatní parametry oblasti viz. obr. 1. Plynem uvnitř kanálu je vzduch, jehož parametry jsou Poissonova konstanta  $\kappa = 1.4$ , měrná plynová konstanta  $r = 287.1\text{ m}^2\text{K}^{-1}\text{s}^{-2}$  a počáteční hustota, teplota a počáteční rychlost  $u_0$  v kanále je  $\rho_0 = 1.133\text{ kg m}^{-3}$ ,  $T_0 = 293.15\text{ K}$  a  $u_0 = 250\text{ m s}^{-1}$ . Okrajové podmínky na vstupu do kanálu byly zvoleny - stagnační hustota a stagnační tlak  $\rho_{in}^s = 1.133\text{ kg.m}^{-3}$ ,  $p_{in}^s = 100000\text{ Pa}$  a úhel náběhu proudu  $\alpha_0 = 0^\circ$ . Na výstupu z kanálu byl zvolen tlak  $p_{out}$  podle vztahu (9), kde  $M_{out} = 0.675$ .

Uvažujme nejprve jediné schéma prvního řádu, schéma Lax-Friedrichsovo. Na obr. 4 můžeme vidět rozložení Machova čísla podél dolní a horní stěny GAMM kanálu. Z obrázku je patrné, že pokud chceme zachytit ostrost rázové vlny, je nutné volit velké množství buněk. V našem případě bylo voleno maximálně 480 buněk ve směru  $x$  a 160 ve směru  $z$ , přičemž koeficient  $CFL=1$ .

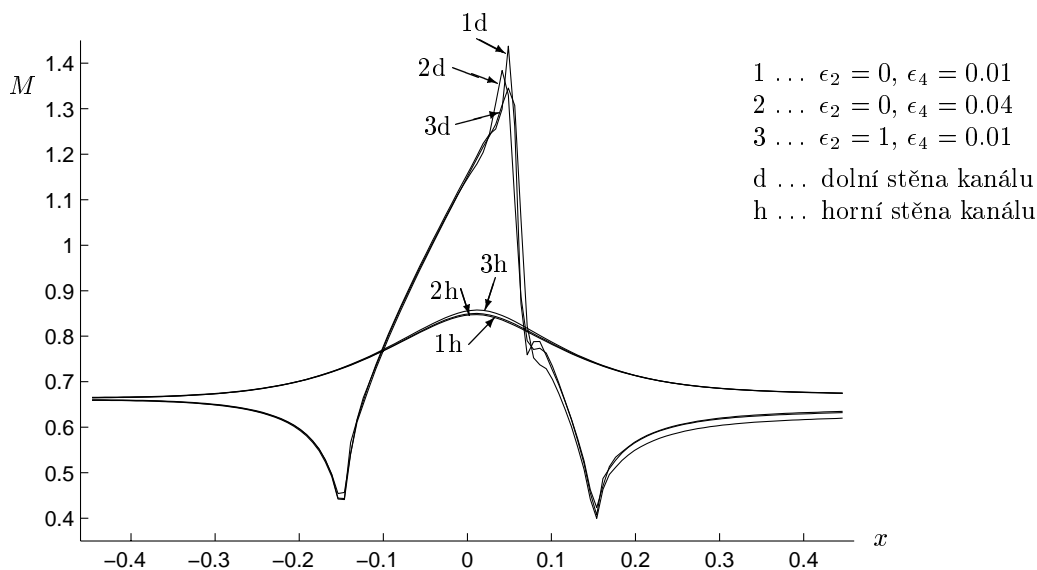


Obr. 4: Rozložení Machova čísla - výpočet Lax-Friedrichsovým schématem

Nyní uvažujme schémata druhého řádu. Pro tato schémata byl sestaven celý cyklus výpočtů, jehož cílem bylo vyhledat takové kombinace koeficientů  $\epsilon_2$  a  $\epsilon_4$  Jamesonova tlumení, pro které výpočet konverguje. Dalšími proměnnými v tomto cyklu výpočtů byly počty buněk ve směrech  $x$  a  $z$  a koeficient CFL. V tabulce 1 je uveden souhrnný přehled některých provedených výpočtů. Je třeba upozornit, že intervaly pro  $\epsilon_2$  a  $\epsilon_4$  nelze nikdy určit zcela přesně. V tomto případě byl krok pro stanovení intervalů koeficientu  $\epsilon_2$  volen 0.2 mezi 0 a 1 a dále pak 1 mezi 1 a 6. V případě koeficientu  $\epsilon_4$  byl krok 0.01. Dále je třeba uvést, že pro velké množství kombinací nebyl proveden výpočet pro  $\epsilon_2 \geq 1$  (pro CFL=0.2 se dokonce provedly pouze výpočty pro  $\epsilon_2 = 0$ ), protože v těchto případech, by již byla rázová vlna velmi silně utlumená a výsledek by se blížil k výsledkům získaných Lax-Friedrichsovým schématem.

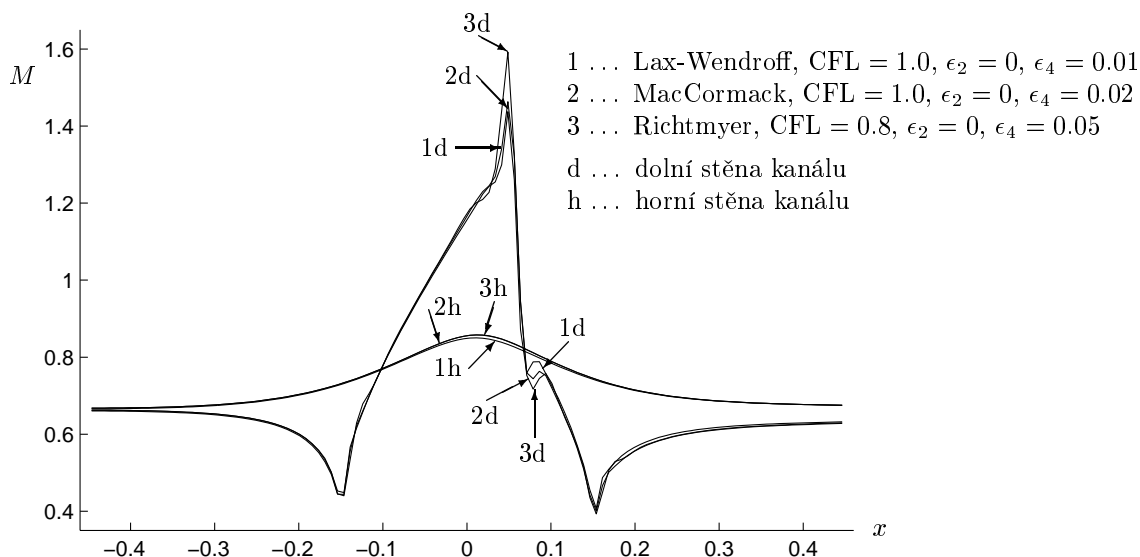


Obr. 5: Rozložení Machova čísla - výpočet Lax-Wendroffovým schématem s Jamesonovým tlumením, kde  $\epsilon_2 = 0$ ,  $\epsilon_4 = 0.02$  a koeficient CFL=1



Obr. 6: Rozložení Machova čísla - výpočet Lax-Wendroffovým schématem s Jamesonovým tlumením pro  $120 \times 40$  buněk a pro koeficient CFL=1



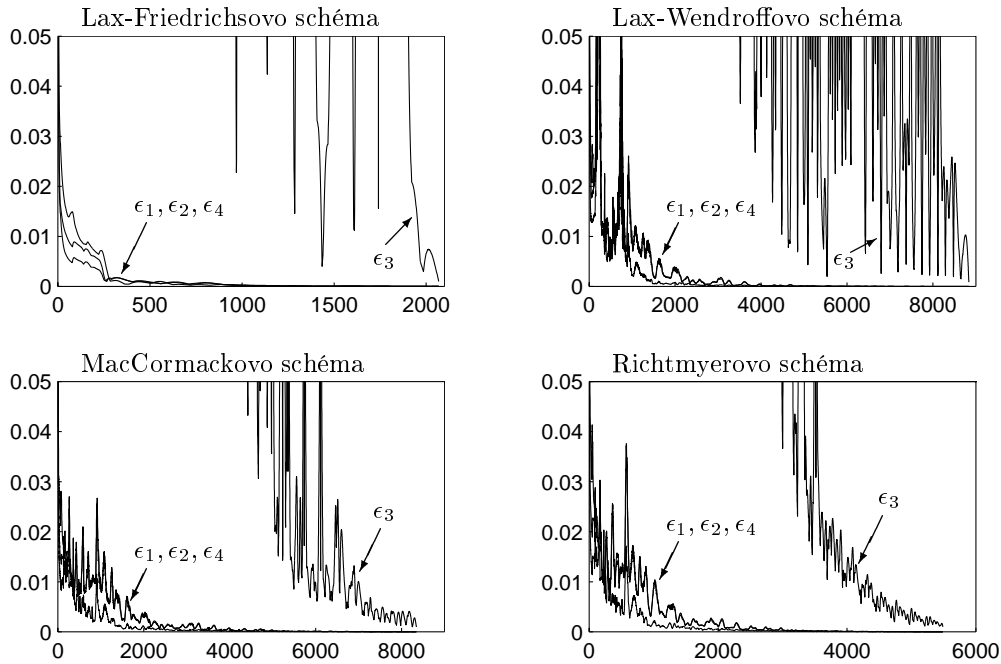


Obr. 7: Rozložení Machova čísla - výpočet schématy druhého řádu s Jamesonovým tlumením pro  $120 \times 40$  buněk

Na obr. 7 jsou zobrazena rozložení Machova čísla v kanále pro různá schémata pro  $120 \times 40$  buněk, přičemž pro porovnání byly vzaty výsledky pro co nejvyšší koeficient CFL a zároveň pro co nejnižší možné koeficienty tlumení - tabulka 1. Výpočty totiž prokázaly, že pokud vezmeme co nejnižší koeficienty tlumení bez ohledu na hodnotu CFL (čím nižší koeficienty tlumení, tím nižší musí být CFL), pak dostaneme prakticky totožné výsledky. Konvergenční faktory jednotlivých rovnic pro řešení z obr. 7 jsou zobrazena na obr. 8.

CFL	schéma		
	Lax-Wendroff	MacCormack	Richtmyer
60 × 20 buněk			
1.0	< 0; 3 > × < .02; .04 >	< 0; 1 > × < .02; .03 >	N
0.8	?	< 0; 1 > × < .02; .04 >	< 0; 1 > × < .04; .05 >
0.6	?	< 0; 1 > × < .01; .05 >	< 0; 1 > × < .03; .06 >
120 × 40 buněk			
1.0	< 0; 3 > × < .01; .04 >	< 0; 3 > × < .02; .03 >	N
0.8	< 0; 6 > × < .01; .04 >	< 0; 1 > × < .02; .04 >	< 0; 1 > × .05
0.6	< 0; 5 > × < .01; .05 >	< 0; 1 > × < .02; .05 >	< 0; 1 > × < .04; .06 >
0.4	< 0; 1 > × < .01; .05 >	< 0; 1 > × < .01; .05 >	< 0; 1 > × < .03; .06 >
0.2	0 × < .01; .06 >	0 × < .01; .06 >	0 × < .02; .06 >
180 × 60 buněk			
1.0	< 0; 2 > × < .02; .04 >	< 0; 1 > × .03	N
0.8	?	< 0; 1 > × < .03; .04 >	N
0.6	?	< 0; 1 > × < .02; .05 >	N
0.4	?	?	< 0; 1 > × < .05; .06 >

Tab. 1: Kartézský součin intervalů  $\epsilon_2 \times \epsilon_4$  koeficientů Jamesonova tlumení, pro které výpočet konverguje. Označení: '?' ... nebylo hledáno, 'N' ... žádný interval nebyl nalezen



Obr. 8: Konvergenční faktory  $\epsilon_m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$  jednotlivých rovnic pro uvažovaná schémata pro  $120 \times 40$  buněk. Jedná se o konvergenční faktory výpočtů, jejichž rozložení Machova čísla je zobrazeno na obr. 4 a 7.

## Závěr

V předloženém příspěvku je ukázáno numerické řešení ustáleného transonického proudění stlačitelné neviské tekutiny v rovinném GAMM kanále.

Cílem této práce bylo porovnat obdržené výsledky s přesnými výsledky uváděnými v literatuře např. [2] a [3] a na tomto základě určit vhodné výpočtové schéma pro řešení problémů v technických aplikacích. Podle těchto kritérií je možno říci, že Lax-Friedrichsovo schéma není vhodné pro řešení úloh, kde se vyskytují rázové vlny, neboť je vyhlazuje. Nejlepší výsledky dává toto schéma pro CFL=1 a co největší počet buněk. Další uvažovaná schémata, přesnosti druhého řádu s Jamesonovým tlumením, již poskytují uspokojivé výsledky a tudíž je lze použít i pro složitější úlohy. Nejostřejší rázovou vlnu dává Richtmyerovo schéma a to i pro relativně malý počet buněk. Všechna schémata vykazují přibližně stejnou rychlost konvergence. Platí, že čím nižší jsou koeficienty tlumení, tím je ostřejší rázová vlna. Jako nejvhodnější se jeví jednokrokové schéma Lax-Wendroffovo a to ze dvou důvodů. Jednak má široké a nejvíce stálé (nejméně závislé na CFL a na počtu buněk) intervaly koeficientů tlumení a jednak dokáže nejrychleji vyčíslit jednu iteraci, přestože je nutné při iteračním procesu vyčíslovat Jacobiho matice.

## Literatura

- [1] Dvořák R. - Kozel K.: Matematické modelování v aerodynamice. ČVUT Praha, 1996.
- [2] Vimmr J., Švígler J. - Numerical solution of compressible inviscid flows using TVD scheme. Výpočtová mechanika 2001, Nečtiny 2001.
- [3] Peyret R. - Handbook of Computational Fluid Mechanics.