



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svatka, Česká republika

**OPTIMAL DIMENSIONS OF A METAL-DIAPHRAGM
OF A MEASURING ELEMENT**

Adam Křístek, Ivan Krásný¹

Summary: The dimensioning of the metal-diaphragm depends on the maximum measured pressure and on necessary preload. Classic methods of elasticity were used to get some preliminary estimates. Final optimal dimensions of the diaphragm were determined numerically by FEM using large displacement contact algorithm.

Key words: metal-diaphragm, FEM, large displacement, contact

Úvod

Membrána snímače má kruhový tvar, její vnější obvod je pevně upnut (obvykle přes hliníkové folie, snižující lokální špičky napětí), vnitřek se opírá o kruhovou dosedací plochu přenašeče, který zprostředkuje přenos síly vyvolané tlakem na vlastní siloměrné čidlo - piezoelektrické nebo tensometrické. Při funkci snímače se deformuje („pracuje“) především její mezikruhová část mezi vnějším upnutím a přenašečem. Vnější průměr membrány je dán požadovanými rozměry snímače, průměr dosedací plochy přenašeče je omezen zdola přípustným kontaktním tlakem mezi membránou a přenašečem. Pro dosažení aspoň přibližné linearitu snímače je nutno membránu předepnout. Styčná plocha přenašeče by proto měla mít tvar kulového vrchlíku, aby se pokud možno zamezilo (především v jeho nekovovém materiálu) vzniku nežádoucích špiček napětí. Při práci snímače vzniká v membráně napětí původu silového (přímé působení tlaku) i deformačního (poddajnost přenašeče a čidla). Membrána musí splňovat další podmínky, např. těsnost, korosivzdornost a požadovanou hodnotu mezní frekvence. Namáhání membrány je značné, proto se pro ni volívá ocel s vysokou mezí kluzu i pevností. To je nutně doprovázeno malou tažností i plastickou rezervou, proto by se „práce“ membrány měla odehrávat v elastické oblasti.

Předběžné odhady

Při daném materiálu a tloušťce membrány, jejím vnějším průměru, míře předpětí a maximálním tlaku zbývá ještě vhodně určit dva volné parametry: průměr přenašeče a poloměr jeho kulového vrchlíku. Pro základní orientaci a prvé hrubé odhady optimálních variant byly použity jednoduché metody klasické technické pružnosti. Šířka mezikruhové části membrány byla přitom nahrazena nosníkem o délce L a tloušťce h ; je zřejmé, že toto zjednodušení je přijatelné jen pro „pracovní“ šířky malé vůči průměru

¹ Ing. Adam Křístek, Ing. Ivan Krásný CSc., VAMET s.r.o., Slávy Horníka 16a, 150 00 Praha 5,
e-mail: kristek@vamet.cz, krasny@vamet.cz

membrány. Vzhledem k „deskovitosti“ membrány jsme počítali s efektivní hodnotou modulu pružnosti v tahu $E/(1 - \mu^2)$, kde μ je Poissonův poměr.

Krajní případy zatížení tohoto jednoduchého modelu membrány jsou:

- a) předpětí membrány vynuceným posuvem δ „vnitřního“ okraje (při nulovém přetlaku),
- b) vynuceným posuvem $\delta/2$ při maximálním přetlaku p (výhodnost této volby vysvitne později).

Při vynucených posuvech δ resp. $\delta/2$ předpokládáme, že se nosník chová jako krakorec zatížený na volném konci silou, při zatížení přetlakem p jako oboustranně vetknutý nosník, dále ještě zatížený ohybovým momentem, rovným aritmetickému průměru jeho obou krajních hodnot (ve vetknutí a uprostřed pole):

$$(|p.L^2/12| + |p.L^2/24|)/2 = |p.L^2/16|.$$

Pro přibližné hodnoty maximálních napětí v obou zatěžujících případech pak platí:

$$a) \sigma_a = \sigma_{\delta} = (3/2) \cdot [E/(1 - \mu^2)] \cdot (h \cdot \delta)/L^2 \quad (1)$$

$$b) \sigma_b = \sigma_{\delta/2} + \sigma_p = (3/4) \cdot [E/(1 - \mu^2)] \cdot (h \cdot \delta)/L^2 + (3/8) \cdot p \cdot (L/h)^2. \quad (2)$$

Pro dané hodnoty E , μ , h , δ , p pak vyjde z podmínky $d\sigma_b/dL = 0$ (tj. $\sigma_b \rightarrow \text{Min}$) i z podmínky stejné maximální napjatosti v obou případech $\sigma_a = \sigma_b$ tatáž optimální hodnota délky L_{opt} (právě tato skutečnost je podmíněna volbou posuvu $\delta/2$ v případě b)):

$$L_{\text{opt}} = [2 \cdot E \cdot h^3 \cdot (\delta p)/(1 - \mu^2)]^{1/4}, \text{ pro niž je} \quad (3)$$

$$\sigma_a = \sigma_b = (3/2^{3/2}) \cdot [E/(1 - \mu^2)]^{1/2} \cdot (\delta p/h)^{1/2} \text{ a } \sigma_{\delta/2} = \sigma_p = \sigma_a/2. \quad (4)$$

Ohybová napětí v membráně, plynoucí z jejího přilehnutí k plochému kulového vrchlíku o poloměru R přenašeče jsou rovna

$$\sigma_R = E \cdot h/[2 \cdot R \cdot (1 - \mu)]. \quad (5)$$

Jako numerický příklad jsme na základě uvedených vzorců pro zvolené veličiny: $E = 210000$ MPa, $\mu = 0,3$, $h = 0,2$ mm, $\delta = 0,2$ mm, $p = 0,50$ MPa spočetli

$$L_{\text{opt}} \approx 6,2 \text{ mm}, \sigma_a = \sigma_b \approx 360 \text{ MPa}.$$

Předpokládáme-li úroveň ohybových napětí membrány ve styku s kulovým vrchlíkem přenašeče $\sigma_R \approx (2/3) \cdot \sigma_a = 240$ MPa, vyjde jeho poloměr $R = 125$ mm. Tím jsme určili aspoň přibližně výchozí parametry pro vlastní numerické řešení membrány

Numerické řešení MKP

Vnější (efektivní) průměr membrány byl zvolen $D = 20$ mm. Oproti předchozímu odstavci byly ještě zadány elastické vlastnosti přenašeče: $E_p = 50000$ MPa a $\mu_p = 0,3$. Všechny výpočty metodou konečných prvků byly provedeny vlastním programovým systémem PMD (viz [1]), jenž respektoval:

- velká posunutí membrány. Byla použita totální Lagrangeovská formulace [2]. Tato formulace vychází z Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření, vystihujícího velkého rotace tělesa, a druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí. Oba tenzory se vztahují k původní konfiguraci tělesa a za předpokladu malých přetvoření (jistě splněného při elastickém chování oceli) jsou vázány lineárním Hookovým zákonem.
- kontakt membrány s kulovým vrchlíkem přenašeče. Řešení bylo provedeno pomocí efektivního algoritmu vyhledávajícího kontakt prostřednictvím integračních bodů numerické integrace [3]. Na rozdíl od klasického uzlového přístupu je vyhledávání kontaktu realizováno na hranicích prvků, nejvýhodněji v příslušných bodech Gaus-

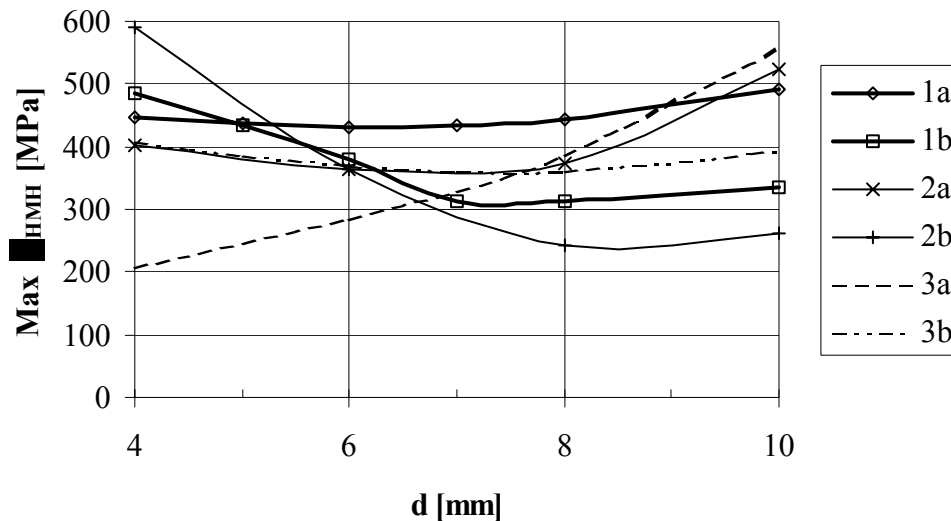
sovy integrace, které jsou v metodě konečných prvků přirozeně dostupné. Implementace algoritmu vyhledávajícího kontakt je díky jejich výhodné poloze oproti standardním uzlovým algoritmům jednodušší. Navíc je tento přístup konzistentní s variačním principem mechaniky kontinua a je použitelný pro izoparametrické prvky jak se středovými uzly, tak bez nich.

Úloha (velké posuvy i kontakt) vede na řešení soustavy nelineárních rovnic. To bylo provedeno kvazi-newtonskou metodou BFGS, vycházející z náhrady tečné matice tuhosti maticí sečnou. Varianty sítí konečných prvků membrány a přenašeče byly pohodlně vytvářeny grafickým pre- a post-procesorem GFEM systému PMD a to pomocí makra, závislého pouze na dvou základních geometrických parametrech.

Tak byla řešena řada variant dvourozměrných rotačně symetrických úloh, lišících se průměrem přenašeče d a poloměrem jeho kulového vrchlíku R . Optimální průměr přenašeče d byl hledán v okolí hodnoty $d = D - 2 \cdot L_{\text{opt}}$. Hlavní výsledky - závislosti maxima redukované napjatosti případů a) a b) na hledaných parametrech - znázorněné v obr.1 a 2, ukazují přímo jejich přibližné optimální hodnoty: $d \approx 6 \div 7$ mm (odpovídající $L_{\text{opt}} = 7 \div 6,5$ mm) a $R \approx 120$ mm. Pro ilustraci a porovnání jsou v obr.1 zakresleny i výsledky klasického lineárního „nekontaktního“ výpočtu (membrána = deska) a nejjednoduššího „nosníkového“ modelu, jenž je pro malé hodnoty průměru d zatížen již příliš velkou chybou, což se ostatně dalo očekávat. Nicméně provedená numerická řešení prokázala, že přibližný prvotní odhad optimální šířky pracovní části membrány je celkem dobře použitelný. Nalezené závislosti napětí na dimenzích jsou poměrně ploché, malé odchylky od optimálních hodnot nevedou k výraznému růstu maximálních napětí. Numerická řešení kontaktního problému prokázala, že - alespoň v dosti širokém okolí optimálních hodnot d a R - membrána dobře přilehne ke kulovému vrchlíku přenašeče. S růstem R už zůstává maximální napětí v membráně téměř konstantní, ale prudce vzrůstá nežádoucí lokální napětí na hraně přenašeče, kde jediné by membrána dosedla. Díky velkým posuvům membrány (vůči tloušťce) vznikají v její střední ploše - především při přenašeči - významná tahová („membránová“) napětí. Jejich velikost dosahuje při čistě „deformačním“ zatížení a) ve středu membrány zhruba 120 MPa. Směrem k vnějšímu okraji klesají až asi na 40 MPa, jejich dominantní složka je tahové radiální napětí, snažící se zmenšit vnější průměr membrány. Proto je třeba vnější okraj membrány sevřít dostatečně velkým tlakem, aby při práci snímače radiálně „neklouzal“. Maximální redukované napětí v případě a) je asi o 15%÷20% vyšší, než v případě b), což je také důsledkem „tuhnoucí“ charakteristiky membrány při velkých posunutích.

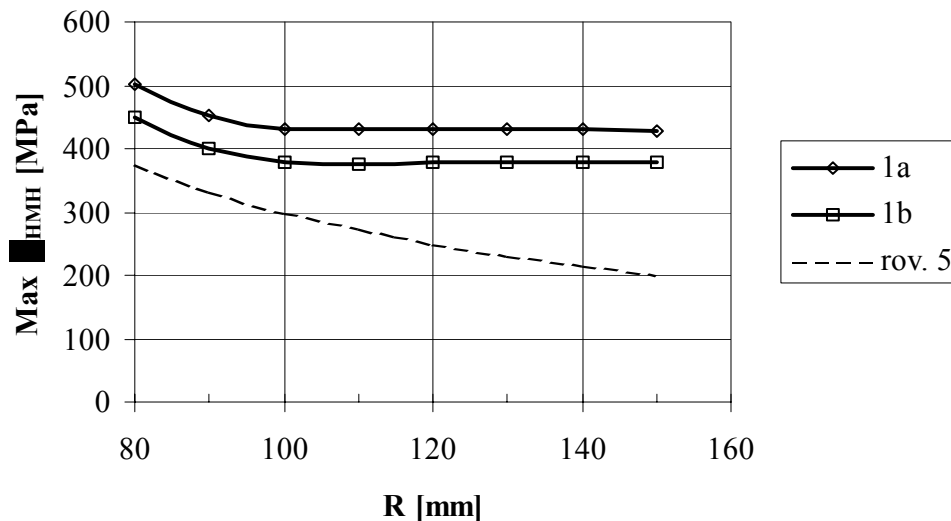
Závěr

Na jednoduché úloze byla otestována korektnost řešení kontaktní úlohy doprovázené velkými posuvy. Uvedený algoritmus lze použít i pro podstatně složitější úlohy, např. při výpočtech moderních celokovových lisovaných těsnění spalovacích motorů (hlava-blok, příruby výfukových i sacích potrubí aj.). Zde je však navíc třeba respektovat i prvotní plastické deformace vzniklé při výrobě a jim odpovídající zbytková napětí.



1 - velká posunutí + kontakt; 2 - lineární výpočet (deska); 3 - „nosník“;
a), b) - případ zatížení

Obr.1. Závislost maxima redukovaného napětí na průměru přenašeče d



1 - velká posunutí + kontakt; - - - - σ_R podle rov.(5); a), b) - případ zatížení

Obr.2. Závislost maxima redukovaného napětí na poloměru vrchlíku přenašeče R

Literatura

- [1] Manuál souborů systému PMD, <http://www.it.cas.cz/manual/pmd/>
- [2] Křístek, A., Okrouhlík, M.: Matice tuhosti dvourozměrných membránových a třírozměrných masivních prvků pro řešení úloh s velkými rotacemi metodou konečných prvků, Inženýrská mechanika 96, str. 87 - 90
- [3] Gabriel, D., Plešek, J., Ulbin, M.: Large displacement frictionless contact algorithm by the pre-discretization penalty method. In: ECCM-2001, 2nd European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Eds. Waszczyszyn, Z., Pamin, J., pp. 500-501, Cracow, (2001).