



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**Formulace podmínek křehkého porušení
pro materiálově složená tělesa**

L. Náhlík¹, Z. Knésl²

Abstract

A stability criterion based on generalized strain energy density factor for a crack terminating at the bi-material interface is suggested. The strain energy density distribution in the vicinity of the crack as well as the generalized stress intensity factors, and the crack propagation direction are calculated. The crack is oriented arbitrarily to the interface and both stress singularities around the crack tip are taken into account. The problem is solved by combination of analytical and numerical approaches. A numerical example of application of the proposed approach is presented.

Klíčová slova: Bi-materiálové rozhraní, křivé napětí, směr šíření trhlin, factor hustoty deformační energie.

Úvod

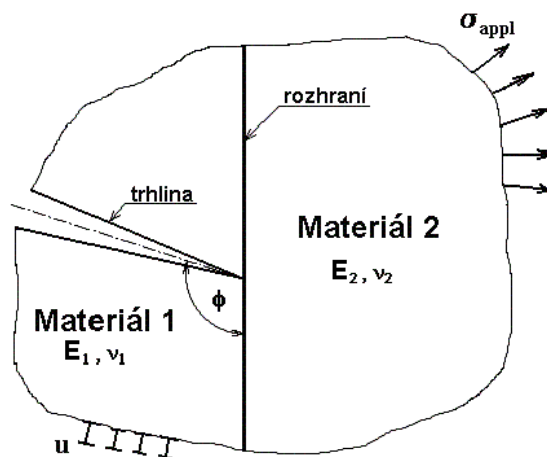
Reálná tělesa často obsahují oblasti s různými materiálovými charakteristikami, které jsou od sebe odděleny rozhraním. Existence takových rozhraní, kde se materiálové parametry mění skokem, podstatně ovlivňuje rozdělení napětí v tělese a tím i odolnost proti lomovému poškození.

Rozhraní jednak ovlivňuje rozdělení napětí v uvažovaném tělese v makroskopickém měřítku a jednak mění charakteristiky popisující lokální rozložení napětí v okolí kořene trhliny. Na rozdíl od trhliny v homogenním tělese, kde je rozdělení napětí v okolí kořene trhliny typu $1/\sqrt{r}$, je pro trhlínu s vrcholem ležícím na materiálovém rozhraní odpovídající napětí typu $1/r^p$, kde r je vzdálenost od kořene trhliny a exponent singularity $0 < p < 1$ závisí na materiálových vlastnostech obou materiálů a úhlu, který

¹ Ing. Luboš Náhlík, Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žižkova 22, 616 62 Brno a
Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno
tel. +420 5 3229 0351, e-mail: nahlik@ipm.cz

² Prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc., Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žižkova 22, 616 62 Brno
tel. +420 5 3229 0358, e-mail: knesl@ipm.cz

svírá trhlina s rozhraním. Právě tato skutečnost neumožňuje použití klasických představ a kritérií lomové mechaniky na tento případ .



Obr. 1. Bi-materiálové těleso s trhlinou na rozhraní

Cílem příspěvku je na základě lineární elastické lomové mechaniky navrhnout kritérium stability trhliny jejíž vrchol se nachází na rozhraní dvou elastických materiálů a jenž je obecně orientována vůči tomuto rozhraní. Formulované kritérium by mělo vycházet z energetických úvah a mít obecnou platnost pro odhad stability singulárních koncentrátorů napětí v případě obecného namáhání kombinovaným módem.

Základním krokem pro aplikaci navrženého kritéria stability je znalost pole napětí pro trhlinu s vrcholem ležícím na rozhraní dvou elastických materiálů. V literatuře presentované výsledky ukazují, že u trhliny libovolně orientované k bi-materiálovému rozhraní existují, v obecném případě, dvě singularity napětí a okolí trhliny je namáháno normálovým a smykovým namáháním, přičemž jednotlivé módy jsou na sobě závislé.

K provedení kompletní analýzy pole napětí v okolí vrcholu trhliny ležící na rozhraní dvou materiálů je zapotřebí následujících dvou kroků.

- Nejprve je nutné z analytického řešení určit odpovídající exponenty singularity napětí jenž jsou závislé na elastických konstantách obou materiálů a úhlu, který svírá trhlina s rozhraním.
- V dalším kroku pak za pomoci metody konečných prvků určit hodnoty zobecněných součinitelů intenzity napětí pro obě singularity napětí.

Na základě znalosti exponentů singularity a zobecněných součinitelů intenzity napětí, které plně popisují pole napětí v okolí kořene trhliny, je možné v dalším kroku za pomoci kritéria hustoty deformační energie odhadnout předpokládaný směr šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu a stanovit kritické napětí při kterém se trhlina začne šířit z rozhraní.

Za předpokladu, že oba materiály jsou izotropní a elastické a že složky posunutí a odpovídající složky napětí přecházejí přes rozhraní spojitě, lze v literatuře nalézt obecná analytická řešení pro polonekonečnou trhlinu orientovanou libovolně k rozhraní např.

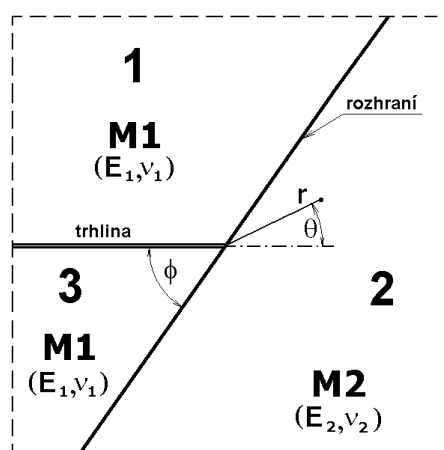
[4],[7]. Výraz pro složky napětí v okolí vrcholu trhliny pak lze pro účely lomové mechaniky representovat singulárními členy odpovídajícími oběma singularitám, tj.

$$\sigma_{ij} = \frac{H_1}{\sqrt{2\pi}} f_{ij1}(\phi, \alpha, \beta, \lambda_1, \theta) \cdot r^{-p_1} + \frac{H_2}{\sqrt{2\pi}} f_{ij2}(\phi, \alpha, \beta, \lambda_2, \theta) \cdot r^{-p_2} \quad , \quad (1)$$

kde (r, θ) jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny a tvar funkcí f_{ij} je znám analyticky. α, β jsou tzv. kompozitní parametry závislé na elastických konstantách obou materiálů a $H_1 [MPa \cdot m^{p_1}]$ a $H_2 [MPa \cdot m^{p_2}]$ jsou zobecněné součinitele intenzity napětí odpovídající silnější a slabší singularitě (tj. předpokládáme, že platí $p_1 > p_2$). Hodnoty p_1, p_2 lze určit řešením charakteristické rovnice plynoucí z okrajových podmínek úlohy, velikost zobecněných součinitelů napětí z analytického řešení stanovit nelze.

Rozdělení napětí pro trhlínu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní

Výpočet napětí v tělese s trhlínou s vrcholem na rozhraní dvou materiálů (viz. obr. 1) se skládá (podobně jako pro homogenní těleso) ze dvou kroků. V první fázi se určí analyticky tvar řešení (včetně exponentu singularity), které obsahuje neznámé multiplikační konstanty. Toto řešení závisí pouze na elastických vlastnostech obou materiálů a vzájemné poloze trhliny a rozhraní. Obvykle se toto řešení uvádí ve tvaru nekonečné řady, jejíž první člen (s multiplikační konstantou odpovídající zobecněnému součiniteli intenzity napětí) je singulární vzhledem k souřadnici r . Tento člen charakterizuje rozložení napětí v okolí kořene trhliny pro potřeby lineární elastické lomové mechaniky. Multiplikační konstanty (zejména zobecněný součinitel intenzity napětí) se pak určí v druhé fázi řešení tak, aby byly splněny odpovídající okrajové podmínky. Hodnoty těchto konstant jsou závislé na geometrii tělesa a předepsaných okrajových podmínkách a jsou úměrné velikosti vnějšího namáhání. Pro stanovení těchto multiplikačních konstant je nutno provést numericky kompletní napěťovou analýzu celého tělesa s trhlínou.



Obr. 2. Studovaný případ trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní. Těleso je tvořeno třemi podoblastmi 1, 2, 3. Podoblasti 1 a 3 tvoří jeden materiál, podoblast 2 druhý materiál. Orientace bi-materiálového rozhraní vůči trhlině je dána úhlem ϕ .

V literatuře lze nalézt obecná analytická řešení orientovanou libovolně vzhledem k rozhraní např. [7],[4]. Předpokládejme nyní těleso jenž je zatíženo vnějším napětím σ_{appl} a na části jeho povrchu může být předepsáno posunutí. Povrch trhliny je volný a orientace trhliny vzhledem k rozhraní je dána úhlem ϕ (viz. obr. 1.). Příslušné výrazy pro složky napětí odpovídající uvedeným předpokladům jsou uvedeny dále v textu.

Pro homogenní těleso je singularita v napětí typu $r^{-1/2}$. V případě trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů je tato singularita typu r^{-p} , kde $0 < p < 1$ závisí na elastických vlastnostech obou materiálů a úhlu ϕ , který svírá trhlina s rozhraním. Stanovení tohoto exponentu je proto nezbytné pro určení pole napětí v tělese s trhlinou s vrcholem na rozhraní dvou materiálů.

V dalším se předpokládá, že těleso je tvořeno dvěma materiály M1 a M2. Tyto předpokládáme jako homogenní, isotropní a lineárně elastické, bez přítomnosti objemového zatížení. Obě složky posunutí a odpovídající složky napětí ($\sigma_{\theta\theta}$ a $\sigma_{r\theta}$) předpokládáme podél rozhraní mezi oblastmi 1, 2 a 3 spojitě. Odpovídající okrajové podmínky jsou uvedeny jako (3). Navíc předpokládáme-li lince trhliny volné a nezatížené, musí být na lících trhliny (v oblasti 1, 3) navíc splněny i okrajové podmínky (2).

$$\begin{aligned} \sigma_{1\theta\theta}(r, \pi) = 0 & \quad \sigma_{1r\theta}(r, \pi) = 0 \\ \sigma_{3\theta\theta}(r, -\pi) = 0 & \quad \sigma_{3r\theta}(r, -\pi) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_{1r}(r, \phi) = u_{2r}(r, \phi) & \quad u_{3r}(r, \phi - \pi) = u_{2r}(r, \phi - \pi) \\ u_{1\theta}(r, \phi) = u_{2\theta}(r, \phi) & \quad u_{3\theta}(r, \phi - \pi) = u_{2\theta}(r, \phi - \pi) \\ \sigma_{1\theta\theta}(r, \phi) = \sigma_{2\theta\theta}(r, \phi) & \quad \sigma_{3\theta\theta}(r, \phi - \pi) = \sigma_{2\theta\theta}(r, \phi - \pi) \\ \sigma_{1r\theta}(r, \phi) = \sigma_{2r\theta}(r, \phi) & \quad \sigma_{3r\theta}(r, \phi - \pi) = \sigma_{2r\theta}(r, \phi - \pi) \end{aligned} \quad (3)$$

Ve výše uvedených okrajových podmínkách značí 1, 2, 3, příslušnost k jednotlivým oblastem 1, 2 a 3.

Předpokládejme nyní, obdobně jako u trhliny v homogenním materiálu, řešení ve tvaru:

$$\Phi = r^{\lambda+1} F_i(\lambda, \theta) \quad (4)$$

kde

$$F_i(\lambda, \theta) = a_i \sin(\lambda+1)\theta + b_i \cos(\lambda+1)\theta + c_i \sin(\lambda-1)\theta + d_i \cos(\lambda-1)\theta \quad (5)$$

a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, 3$) jsou zatím neznámé konstanty a λ leží v intervalu $(0,1)$. Vztahy pro složky napětí mají tvar:

$$\begin{aligned}\sigma_{irr} &= r^{\lambda-1} \left[F_i''(\lambda, \theta) + (\lambda+1) F_i(\lambda, \theta) \right] \\ \sigma_{i\theta\theta} &= r^{\lambda-1} \left[\lambda(\lambda+1) F_i(\lambda, \theta) \right] \\ \sigma_{ir\theta} &= r^{\lambda-1} \left[-\lambda F_i'(\lambda, \theta) \right]\end{aligned}\quad (6)$$

a pro posuvy:

$$\begin{aligned}u_{ir} &= \frac{r^\lambda}{2G_i} \left[-(\lambda+1) F_i + \left(\lambda m \frac{1+\nu}{4(1-\nu)} \right)^{-1} \left\{ F_i'' + (\lambda+1)^2 F_i \right\} \right] \\ u_{i\theta} &= \frac{r^\lambda}{2G_i} \left[-F_i' - \left(\lambda(\lambda-1) m \frac{1+\nu}{4(1-\nu)} \right)^{-1} \left\{ F_i''' + (\lambda+1)^2 F_i' \right\} \right],\end{aligned}\quad (7)$$

kde $i = 1, 2, 3$ a značí příslušnost k oblastem 1, 2, 3 a

$$\begin{aligned}m &= 4(1-\nu) \quad \text{uvažujeme-li rovinnou deformaci nebo} \\ m &= \frac{4}{1+\nu} \quad \text{pro případ rovinné napjatosti.}\end{aligned}\quad (8)$$

Substitucí (5) - (7) do okrajových podmínek (2) a (3) obdržíme systém 12 rovnic pro 12 neznámých konstant a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, 3$).

Pro netriviální řešení takto sestavené soustavy rovnic musí být determinant soustavy roven nule. Tato podmínka vede na vlastní rovnici pro λ ve tvaru:

$$f(\phi, \alpha, \beta, \lambda) = 0 \quad (9)$$

V práci [4] lze nalézt transcendentní rovnici pro λ ve tvaru:

$$\begin{aligned}f(\phi, \alpha, \beta, \lambda) &= \left[A\beta^2 + (2A-B)\beta + A-B+1 \right] \alpha^2 + \\ &+ \left[(-2A+B+C)\beta^2 + (-4A+2B+C-D-2)\beta^2 + (-2A+B-C)\beta - C+D \right] \alpha + \\ &+ (A-B-C+D+E+1)\beta^4 + (2A-B-C)\beta^3 + (A+C-D-2E)\beta^2 + C\beta + E = 0\end{aligned}\quad (10)$$

kde:

$$\begin{aligned}
 A &= A(\phi, \lambda) = 4(1-\lambda)^4 \sin^4(\phi) + \sin^2[(1-\lambda)(2\phi-\pi)], \\
 B &= B(\phi, \lambda) = 4(1-\lambda)^2 \sin^2(\phi) + 2\sin^2[(1-\lambda)(2\phi-\pi)], \\
 C &= C(\phi, \lambda) = 4(1-\lambda)^2 \sin^2(\phi) \{ \sin^2((1-\lambda)\phi) + \sin^2[(1-\lambda)(\phi-\pi)] - 1 \}, \\
 D &= D(\phi, \lambda) = 2 \{ \sin^2((1-\lambda)\phi) + \sin^2[(1-\lambda)(\phi-\pi)] - 1 \}, \\
 E &= E(\lambda) = 1 - \sin^2((1-\lambda)\pi).
 \end{aligned}$$

Zde jsou α, β kompozitní parametry (někdy zvané Dundursovy) zavedené Dundursem v [6], mající za účel charakterizovat složená tělesa a jsou definovány jako:

$$\alpha = \frac{\mu_1 m_2 - \mu_2 m_1}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1}, \quad \beta = \frac{\mu_1 (m_2 - 2) - \mu_2 (m_1 - 2)}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1} \quad (11)$$

Ve výše uvedených vztazích m_1, ν_1, μ_1 jsou veličiny příslušející materiálu M1 a m_2, ν_2, μ_2 příslušejí M2 (ν je Poissonovo číslo a μ modul pružnosti ve smyku).

Vztah (10) je třeba řešit numericky. Jejím vyřešením získáme hledané hodnoty λ , respektive exponenty singularity napětí p . Relace mezi exponentem singularity napětí a λ je:

$$p = 1 - \lambda \quad (12)$$

Vlastní řešení λ je obecně komplexní. Našemu problému vyhovuje řešení $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$. V případě, že je trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní ($\phi = 90^\circ$) existuje pouze jedno takové řešení λ pro danou kombinaci E_1, E_2 a ν_1, ν_2 respektive α, β . V případě že $\phi = 0^\circ$ tj. trhlina leží v bi-materiálovém rozhraní, je reálná část $\lambda = 0,5$ a komplexní část řešení je závislá na aktuální kombinaci elastických konstant obou materiálů. V intervalu $0 < \phi < 90^\circ$ je možné nalézt jedno nebo dvě řešení λ . Pro malé úhly ϕ je pro λ známo jedno koplexní řešení v daném intervalu, pro ostatní úhly ϕ pak dvě reálná řešení, třeba [7].

Dosadíme-li λ do soustavy rovnic vzniklé dosazením (6) a (7) do okrajových podmínek (2) a (3) získáme soustavu 12 homogenních rovnic a 12 neznámých koeficientech a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, 3$), jejíž determinant musí být roven nule. Neznámé koeficienty získáme řešením této soustavy známými metodami.

Známe-li konstanty a_i, b_i, c_i, d_i a omezíme-li se pouze na první, singulární člen rozvoje můžeme s využitím (6) a (7) výjádřit složky napětí, respektive posunutí v blízkosti vrcholu trhliny, jenž se nachází na rozhraní mezi dvěma elastickými materiály následovně:

$$\sigma_r^{(j)} = -\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} r^{\lambda^{(j)}-1} [a_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \sin(\lambda^{(j)} + 1)\theta + b_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \cos(\lambda^{(j)} + 1)\theta +$$

$$+ c_i^{(j)} (\lambda^{(j)} - 1) \sin(\lambda^{(j)} - 1)\theta + d_i^{(j)} (\lambda^{(j)} - 1) \cos(\lambda^{(j)} - 1)\theta] A^{(j)}$$

$$\sigma_\theta^{(j)} = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) r^{\lambda^{(j)}-1} [a_i^{(j)} \sin(\lambda^{(j)} + 1)\theta + b_i^{(j)} \cos(\lambda^{(j)} + 1)\theta +$$

$$+ c_i^{(j)} \sin(\lambda^{(j)} - 1)\theta + d_i^{(j)} \cos(\lambda^{(j)} - 1)\theta] A^{(j)} \quad (13)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(j)} = -\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} r^{\lambda^{(j)}-1} [a_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \cos(\lambda^{(j)} + 1)\theta - b_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \sin(\lambda^{(j)} + 1)\theta +$$

$$+ c_i^{(j)} (\lambda^{(j)} - 1) \cos(\lambda^{(j)} - 1)\theta - d_i^{(j)} (\lambda^{(j)} - 1) \sin(\lambda^{(j)} - 1)\theta] A^{(j)}$$

$$u_r^{(j)} = -\frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^n r^{\lambda^{(j)}} [a_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \sin(\lambda^{(j)} + 1)\theta + b_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \cos(\lambda^{(j)} + 1)\theta +$$

$$+ c_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1 - m) \sin(\lambda^{(j)} - 1)\theta + d_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1 - m) \cos(\lambda^{(j)} - 1)\theta] A^{(j)} \quad (14)$$

$$u_\theta^{(j)} = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^n r^{\lambda^{(j)}} [-a_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \cos(\lambda^{(j)} + 1)\theta + b_i^{(j)} (\lambda^{(j)} + 1) \sin(\lambda^{(j)} + 1)\theta -$$

$$- c_i^{(j)} (\lambda^{(j)} - 1 + m) \cos(\lambda^{(j)} - 1)\theta + d_i^{(j)} (\lambda^{(j)} - 1 + m) \sin(\lambda^{(j)} - 1)\theta] A^{(j)}$$

Ve vztazích (13) a (14) n odpovídá počtu nalezených řešení λ na intervalu $0 < \lambda < 1$. Konstanty m resp. μ se rovnají m_1 resp. μ_1 pro $i = 1$ a 3 (oblast 1 a 3, materiál M1), respektive m_2 a μ_2 pro $i = 2$ (oblast 2, materiál M2).

Tím byly určeny složky napětí respektive posunutí až na multiplikativní konstanty $A^{(i)}$, které odpovídají zobecněným součinitelům intenzity napětí a musí být v dalším určeny numericky, řešením úplné úlohy za pomoci např. metody konečných prvků.

Určení zobecněných součinitelů intenzity napětí

Pro úhel trhliny ϕ v intervalu přibližně (závisí na elastických konstantách obou materiálů) $30^\circ - 90^\circ$ existují dva exponenty singularity napětí p_1 a p_2 a napjatost před vrcholem trhliny je popsána vztahem (1), tj. pomocí dvou zobecněných součinitelů intenzity napětí. Každému z exponentů singularity napětí přísluší i jiný součinitel intenzity napětí H_1 resp. H_2 , jenž v sobě zahrnuje jak normálový, tak i smykový mód namáhání. Příspěvky jednotlivých módů namáhání nelze v těchto součinitelích vzájemně odlišit. Pro jejich stanovení je třeba využít tzv. přímé metody tj. porovnání známého analytického řešení složek napětí s řešením numerickým a následnou extrapolací takto získaných hodnot zobecněných součinitelů intenzity napětí pro $r \rightarrow 0$. Protože napjatost je popsána kombinací H_1 a H_2 je zapotřebí k jejich určení dvou rovnic. K jejich určení použijeme některou ze složek napětí uvedených jako (13) např. složku $\sigma_{\theta\theta}$. Pomocí MKP určíme velikost vybrané složky napětí v závislosti na vzdálenosti r

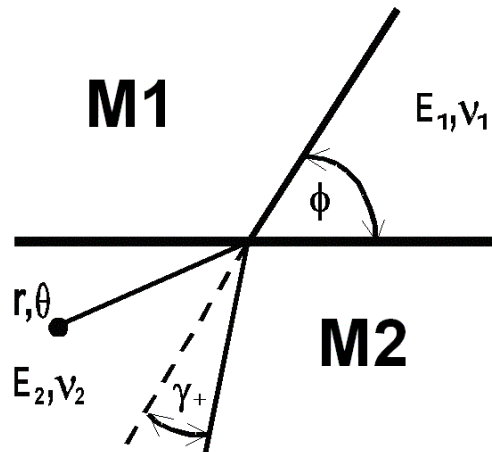
od vrcholu trhliny pro dva různé úhly θ_1, θ_2 . S využitím znalosti analytického rozdělení napětí a numerického řešení řešíme soustavu:

$$\begin{bmatrix} r^{-p_1} f_{\theta\theta_1}(\phi, \alpha, \beta, \lambda_1, \theta_1) \cdot (2\pi)^{-1/2} & r^{-p_2} f_{\theta\theta_2}(\phi, \alpha, \beta, \lambda_2, \theta_1) \cdot (2\pi)^{-1/2} \\ r^{-p_1} f_{\theta\theta_1}(\phi, \alpha, \beta, \lambda_1, \theta_2) \cdot (2\pi)^{-1/2} & r^{-p_2} f_{\theta\theta_2}(\phi, \alpha, \beta, \lambda_2, \theta_2) \cdot (2\pi)^{-1/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_1) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_2) \end{bmatrix} \quad (15)$$

a následnou extrapolací pro $r \rightarrow 0$ určíme i hledané součinitele intenzity napětí H_1 a H_2 .

Zobecněný faktor hustoty deformační energie

Faktor hustoty deformační energie S byl původně zaveden Sihem [13] pro trhliny v homogenních materiálech. V dalším uvedeme nejprve výraz pro zobecněný faktor hustoty deformační energie Σ pro trhlinu s vrcholem na rozhraní.



Obr. 3. Trhlina s vrcholem na rozhraní dvou materiálů, orientovaná pod úhlem ϕ vůči rozhraní. Směr dalšího šíření trhliny je dán úhlem γ .

Hustota deformační energie

Hustota deformační energie w je dána výrazem

$$w = \frac{dW}{dV} = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (16)$$

kde σ_{ij} a ϵ_{ij} jsou odpovídající složky napětí a přetvoření a dV je objemový element. Omezíme-li se na rovinnou úlohu, můžeme w vyjádřit následovně (uvažujeme pouze materiál 2)

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{16\mu_2} \left[k(\sigma_x + \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]. \quad (17)$$

Pro stav rovinné deformace je $k = (1 - 2\nu_2)$, μ_2 je modul pružnosti ve smyku ν_2 je Poissonovo číslo materiálu 2.

Rozdělení hustoty deformační energie

Výraz pro hustotu deformační energie v okolí vrcholu trhliny můžeme vyjádřit ze vztahů (13) a (17). Poté dostaneme

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{r} [A_{11}H_1^2 + 2A_{12}H_1H_2 + A_{22}H_2^2] \quad (18)$$

kde A_{11} , A_{12} a A_{22} jsou funkce polárního úhlu θ , kompozitních parametrů α, β , vzdálenosti r od vrcholu trhliny a úhlu ϕ mezi trhlinou a rozhraním. H_1 a H_2 jsou hodnoty zobecněných součinitelů intenzity napětí.

Faktor hustoty deformační energie

Výraz (18) můžeme napsat ve formě

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\Sigma(\alpha, \beta, \theta, \Phi, r)}{r}, \quad (19)$$

kde

$$\Sigma = (A_{11}H_1^2 + 2A_{12}H_1H_2 + A_{22}H_2^2). \quad (20)$$

Veličina Σ je zobecněný faktor hustoty deformační energie a je v dalším použit pro formulaci kritéria stability. Na rozdíl od faktoru hustoty deformační energie pro homogenní tělesa S je zobecněný faktor hustoty deformační energie Σ závislý na vzdálenosti r od vrcholu trhliny, viz.(21).

Ve vztahu (20) je:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{16\mu} r^{1-2p_1} \left[k(f_{rr_1} + f_{\theta\theta_1})^2 + (f_{rr_1} - f_{\theta\theta_1})^2 + 4f_{r\theta_1}^2 \right] \\ A_{12} &= \frac{1}{16\mu} r^{1-p_1-p_2} \left[(k+1)(f_{rr_1}f_{rr_2} + f_{\theta\theta_1}f_{\theta\theta_2}) + \right. \\ &\quad \left. + (k-1)(f_{rr_1}f_{\theta\theta_2} + f_{\theta\theta_1}f_{rr_2}) + 4f_{r\theta_1}f_{r\theta_2} \right] \\ A_{22} &= \frac{1}{16\mu} r^{1-2p_2} \left[k(f_{rr_2} + f_{\theta\theta_2})^2 + (f_{rr_2} - f_{\theta\theta_2})^2 + 4f_{r\theta_2}^2 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

a

$$\begin{aligned}
f_{r_1} &= -\lambda_1 \left[a^{(1)} (\lambda_1 + 1) \sin(\lambda_1 + 1)\theta + b^{(1)} (\lambda_1 + 1) \cos(\lambda_1 + 1)\theta + \right. \\
&\quad \left. + c^{(1)} (\lambda_1 - 3) \sin(\lambda_1 - 1)\theta + d^{(1)} (\lambda_1 - 3) \cos(\lambda_1 - 1)\theta \right] \\
f_{r_2} &= -\lambda_2 \left[a^{(2)} (\lambda_2 + 1) \sin(\lambda_2 + 1)\theta + b^{(2)} (\lambda_2 + 1) \cos(\lambda_2 + 1)\theta + \right. \\
&\quad \left. + c^{(2)} (\lambda_2 - 3) \sin(\lambda_2 - 1)\theta + d^{(2)} (\lambda_2 - 3) \cos(\lambda_2 - 1)\theta \right] \\
f_{\theta_1} &= \lambda_1 (\lambda_1 + 1) \left[a^{(1)} \sin(\lambda_1 + 1)\theta + b^{(1)} \cos(\lambda_1 + 1)\theta + \right. \\
&\quad \left. + c^{(1)} \sin(\lambda_1 - 1)\theta + d^{(1)} \cos(\lambda_1 - 1)\theta \right] \\
f_{\theta_2} &= \lambda_2 (\lambda_2 + 1) \left[a^{(2)} \sin(\lambda_2 + 1)\theta + b^{(2)} \cos(\lambda_2 + 1)\theta + \right. \\
&\quad \left. + c^{(2)} \sin(\lambda_2 - 1)\theta + d^{(2)} \cos(\lambda_2 - 1)\theta \right] \\
f_{r_{\theta_1}} &= -\lambda_1 \left[a^{(1)} (\lambda_1 + 1) \cos(\lambda_1 + 1)\theta - b^{(1)} (\lambda_1 + 1) \sin(\lambda_1 + 1)\theta + \right. \\
&\quad \left. + c^{(1)} (\lambda_1 - 1) \cos(\lambda_1 - 1)\theta - d^{(1)} (\lambda_1 - 1) \sin(\lambda_1 - 1)\theta \right] \\
f_{r_{\theta_2}} &= -\lambda_2 \left[a^{(2)} (\lambda_2 + 1) \cos(\lambda_2 + 1)\theta - b^{(2)} (\lambda_2 + 1) \sin(\lambda_2 + 1)\theta + \right. \\
&\quad \left. + c^{(2)} (\lambda_2 - 1) \cos(\lambda_2 - 1)\theta - d^{(2)} (\lambda_2 - 1) \sin(\lambda_2 - 1)\theta \right]
\end{aligned}$$

kde λ_1, λ_2 jsou řešení rovnice (9), přičemž $\lambda_1 < \lambda_2$, a konstanty a, b, c, d , náleží oblasti 2 (viz. obr. 2).

Formulace kritéria stability

Teorie založená na Sihově koncepci hustoty deformační energie pro trhliny v homogenním materiálu (tj. pro exponent singularity $p = 1/2$) vychází ze dvou základních hypotéz o šíření trhliny:

- *trhlina se bude šířit ve směru, kde je hustota deformační energie S minimální a*
- *kritická hodnota hustoty deformační energie $S = S_{cr}$ je určující pro její další šíření.*

Poznamenejme, že S_{cr} je materiálová charakteristika a ve speciálních případech může být v relaci s K_{IC} , lomovou houževnatostí materiálu.

Podobně jako pro trhlinu v homogenním tělese je za pomoci hustoty deformační energie definován zobecněný faktor hustoty deformační energie Σ pro trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní (tj. pro exponent singularity $p \neq 1/2$). Opětovně, z první hypotézy můžeme odhadnout směr šíření trhliny ve druhém materiálu (viz. obr. 3) a z druhé počátek jejího šíření. Mimoto, předpokládáme-li, že přítomnost rozhraní ovlivní šíření trhliny do druhého materiálu pouze kvantitativně, a že mechanismus šíření bude stejný, obdržíme

$$S_{cr} = \Sigma_{cr}(r), \quad (22)$$

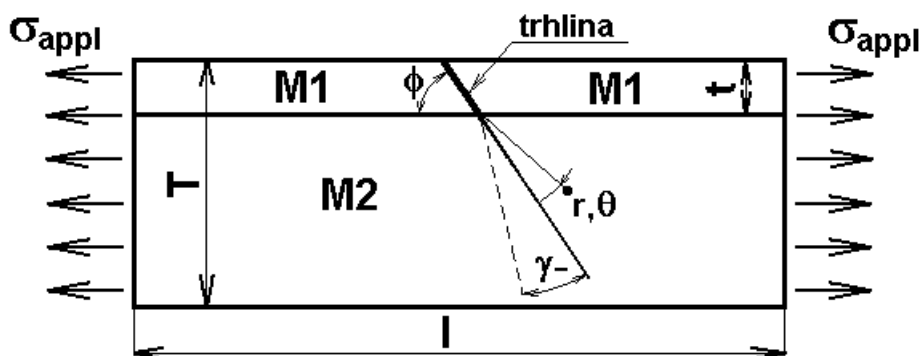
kde r je neznámá vzdálenost od vrcholu trhliny, ve které kritérium aplikujeme. Podmínku stability potom můžeme zapsat ve formě

$$\Sigma < \Sigma_{cr}. \quad (23)$$

Aplikace kritéria stability (23) umožňuje odhad kritického napětí σ_{cr} . Jestliže kritické napětí $\sigma_{appl} > \sigma_{cr}$ trhlina se bude šířit dále z rozhraní do druhého materiálu. Hodnota σ_{cr} závisí na geometrii a okrajových podmínkách, na kompozitních parametrech α a β , na úhlu ϕ , který svírá trhlina s rozhraním a na lomové houževnatosti K_{IC} materiálu M2. Na rozdíl od homogenního tělesa, je v tomto případě podmínka stability, a tudíž i velikost kritického napětí σ_{cr} , závislá na vzdálenosti r ve které je podmínka aplikována. V další kapitole je uveden numerický příklad výpočtu.

Numerický příklad

Jako numerický případ ilustrující uvedený postup je proveden výpočet kritického napětí σ_{cr} a úhlu dalšího šíření trhliny z bi-materiálového rozhraní γ v nehomogenním vzorku dle obr. 4. Napjatost v okolí vrcholu trhliny byla stanovena metodou konečných prvků. Pro výpočet byl použit standardní systém MKP ANSYS. Vzhledem k typu úlohy (odhad velikosti a charakteristik napětí v případě singulárního rozložení napětí) byla značná pozornost věnována volbě sítě MKP v okolí vrcholu trhliny. Poměrně velký počet elementů MKP (cca 9000) a uzlových bodů (cca 30000) je vyvolán nutností použít v okolí vrcholu trhliny velké zjemnění sítě. Velikost nejmenších elementů byla $\delta_{min} = 0,5 \times 10^{-3}$ mm což při délce trhliny $a \sim 1$ mm (viz. obr. 4), odpovídá poměru $a/\delta_{min} \sim 2000$. Lze konstatovat, že další zjemňování sítě v okolí vrcholu trhliny již nemá vliv na získané výsledky. Výsledné hodnoty kritického napětí σ_{cr} , úhlu dalšího šíření trhliny z rozhraní, hodnoty zobecněných součinitelů intensity napětí i příslušné exponenty singularity napětí jsou v závislosti na materiálových parametrech (poměru modulů pružnosti v tahu obou materiálů) a úhlu, který svírá trhlina s rozhraním uvedeny v Tabulce I. Vnější namáhání bylo voleno $\sigma_{appl} = 100$ MPa. Neuvažuje se šíření trhliny podél rozhraní. Ve všech případech bylo zvoleno $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $E_2 = 2 \cdot 10^5$ MPa, lomová houževnatost materiálu M2 $K_{IC} = 6,42$ MPa.m^{1/2} a mez kluzu materiálu M2 $\sigma_o = 800$ MPa.



Obr. 4. Model bi-materiálového tělesa a zvolený souřadný systém v kořeni trhlín s vrcholem na rozhraní dvou materiálů. Pro výpočty bylo zvoleno: $T = 15$ mm, $t = 1$ mm, $l = 60$ mm.

Výpočet zobecněného faktoru hustoty deformační energie pro nehomogenní případ ($E_1 \neq E_2$) byl proveden dle vztahu (20). Jelikož je Σ veličina závislá na vzdálenosti r od vrcholu trhliny (viz. (21)), byli příslušné výpočty provedeny pro r odpovídající velikosti plastické zóny před čelem trhliny r_p , pro $r = 1000 \cdot r_p$ a pro $r = 1$. Příslušné hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. Tabulka 1a obsahuje hodnoty vypočítané pro homogenní případ.

Tabulka I. Vypočítané hodnoty

Ia. Vypočítané hodnoty pro homogenní případ.

$E_1/E_2 = 1$					
ϕ	1°	10°	20°	30°	40°
K_I [MPa.m ^{1/2}]	6,40	6,35	6,09	5,68	5,13
K_{II} [MPa.m ^{1/2}]	0,07	0,69	1,33	1,88	2,32
S [N/m]	130,76	128,65	123,00	114,56	103,46
σ_{cr} [MPa]	100,0	101,4	106,3	114,1	126,4
γ [°]	0	-12	-22	-29	-36

Ib. Vypočítané hodnoty pro $E_1/E_2 = 0,5$.

$E_1/E_2 = 0,5$					
ϕ	1°	10°	20°	30°	40°
p_1	0,4353	0,4466	0,4572	0,4654	0,4711
p_2	0,4325	0,4198	0,4063	0,3973	0,3977
H_1 [MPa.m ^{p₁}]	2,473	2,594	2,674	2,708	2,723
H_2 [MPa.m ^{p₂}]	2,439	2,246	1,952	1,557	1,052
$r = 1$					
Σ [N/m]	97,52	95,10	88,31	76,95	61,00
σ_{cr} [MPa]	134,1	137,5	148,1	169,9	214,4
γ [°]	-1	-13	-22	-29	-32
$r = r_p \cdot 1000$					
r [m]	6,5E-04	7E-04	7,5E-04	0,8E-04	0,85E-04
Σ [N/m]	36,96	36,46	34,35	31,04	27,00
σ_{cr} [MPa]	353,8	358,6	380,6	421,2	484,3
γ [°]	0	-6	-11	-16	-19
$r = r_p$					
r [m]	6,5E-07	7E-07	7,5E-07	8E-07	8,5E-07
Σ [N/m]	14,84	15,14	15,70	16,24	16,46
σ_{cr} [MPa]	881,1	863,6	832,8	805,1	794,4
γ [°]	0	2	4	5	5

Ic. Vypočítané hodnoty pro $E_1/E_2 = 2$

$E_1/E_2 = 2$					
ϕ	1°	10°	20°	30°	40°
p_1	0,5758	0,5864	0,5960	0,6022	0,6039
p_2	0,5732	0,5616	0,5488	0,5373	0,5280
H_1 [MPa.m ^{p₁}]	3,912	3,006	2,111	1,388	0,854
H_2 [MPa.m ^{p₂}]	4,117	4,863	5,483	5,749	5,848
$r = 1$					
Σ [N/m]	147,41	143,88	140,82	132,79	125,23
σ_{cr} [MPa]	88,7	90,9	92,7	98,4	104,4
γ [°]	1	10	17	19	19
$r = r_p * 1000$					
r [m]	4,40E-03	6,00E-03	8,00E-03	1,00E-02	1,65E-02
Σ [N/m]	330,49	304,58	253,11	205,50	165,17
σ_{cr} [MPa]	39,5	44,0	51,7	63,6	79,2
γ [°]	1	4	8	10	11
$r = r_p$					
r [m]	4,40E-06	6,00E-06	8,00E-06	1,00E-05	1,65E-05
Σ [N/m]	925,00	809,02	635,72	455,63	308,71
σ_{cr} [MPa]	14,1	16,2	20,6	28,7	42,4
γ [°]	0	-5	-8	-11	-11

Závěr

V příspěvku je studováno chování trhliny s vrcholem na rozhraní dvou elastických materiálů v rámci jednoparametrové lineárně-elastické lomové mechaniky a jsou stanoveny podmínky, které určují, zda se trhlina bude či nebude šířit z rozhraní do druhého materiálu.

Z lomově-mechanického hlediska představuje konfigurace trhliny s vrcholem na rozhraní singulární koncentrátor napětí. V klasické lineární elastické lomové mechanice je napěťové pole v okolí vrcholu trhliny v homogenním prostředí popsáno jediným singulárním členem typu $\sigma \sim K / r^{1/2}$, tj. exponent singularity napětí je roven 1/2. Konstanta úměrnosti K odpovídá součiniteli intenzity napětí a v případě obecného (rovinného) namáhání lze napětí vyjádřit jako superpozici dvou členů odpovídajících normálovému (K_I) a smykovému (K_{II}) módu.

V případě konfigurace trhliny s vrcholem na rozhraní je pole napětí v okolí jejího vrcholu popsáno obecně pomocí dvou singulárních členů s exponenty singularity $0 < p_2 \leq p_1 < 1$. Konstanty úměrnosti u obou těchto singulárních členů jsou v tomto případě úměrné zobecněným faktorům intenzity napětí H_1 a H_2 . Na rozdíl od klasické trhliny, nelze obecně v tomto případě jednotlivé módy namáhání explicitně odlišit. Existence dvou singularit napětí a skutečnost, že odpovídající exponenty singularity jsou různé od 1/2 znemožňuje formulaci kritéria stability na základě postupů konvenční lineární elastické lomové mechaniky.

Formulace kritéria stability trhliny na rozhraní dvou materiálů navržená v tomto příspěvku vychází ze dvou předpokladů:

- (1) *pro popis napětového pole v okolí vrcholu trhliny jsou postačující singulární členy v odpovídajícím rozvoji,*
- (2) *mechanismus šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu je stejný jako mechanismus, kterým se trhlina šíří v homogenním prostředí odpovídající druhému materiálu (tj. určující je hodnota lomové houževnatosti druhého materiálu).*

Lomově-mechanického popis trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů vyžaduje obecně výpočet pole napětí v okolí vrcholu trhliny s ohledem na orientaci trhliny vzhledem k rozhraní a formulaci podmínky stability pro singulární koncentrátor napětí s obecnou hodnotou exponentu singularity. V příspěvku bylo pro formulaci kritéria stability použito Sihovo kritérium hustoty deformační energie.

Hlavní získané výsledky práce lze shrnout takto:

- (1) *Na základě limitního analytického řešení pro trhlinu s vrcholem na rozhraní dvou materiálů byla provedena analýza singulárních členů popisujících rozložení napětí v okolí vrcholu trhliny. Je ukázáno, že pro účely lomové mechaniky lze napětí popsat obecně pomocí dvou singulárních členů s exponenty singularity různými od $\frac{1}{2}$. Pro hodnoty p_1 a p_2 odpovídajících exponentů singularity byla sestavena a vyřešena charakteristická rovnice a to v závislosti na úhlu orientace trhliny vzhledem k rozhraní a materiálových parametrech obou prostředí. Každý singulární člen odpovídá kombinaci normálového a smykového namáhání. V obecném případě nelze jednotlivé módy namáhání od sebe oddělit.*
- (2) *Napětí v okolí vrcholu trhliny je určeno dvěma hodnotami zobecněných faktorů intenzity napětí H_1 a H_2 . Je navržen postup výpočtu H_1 a H_2 přímou metodou na základě výsledků získaných metodou konečných prvků.*
- (3) *Byl zobecněn Sihův faktor hustoty deformační energie pro studovanou konfiguraci. Na základě tohoto zobecnění byly formulovány podmínky určující směr šíření trhliny do druhého materiálu a podmínky její stability. Je diskutováno použití těchto podmínek v studovaném případě pro odhad kritického napětí nutného pro šíření trhliny z jednoho materiálu přes rozhraní do materiálu druhého. Postup je ilustrován příklady výpočtu kritického napětí v závislosti na elastických konstantách obou materiálů, orientaci trhliny vzhledem k rozhraní a hodnotě lomové houževnatosti druhého materiálu.*

Poznamenejme závěrem, že presentované výsledky mohou být zobecněny a použity pro popis lomově-mechanického chování obecných singulárních koncentrátorů napětí, zejména pak pro formulaci kritéria jejich stability a tím rozšiřují platnost a použitelnost konvenční lineární elastické lomové mechaniky trhlín. Z praktického hlediska navržený postup výsledky, které lze bezprostředně využít v lomové mechanice složených těles a kompozitů.

Poděkování

Příspěvek byl vypracován v rámci výzkumného záměru Z2 041 904 a za podpory grantu GA ČR č. 106/01/0381.

Použitá literatura

- [1] Anderson, T., L.: FRACTURE MECHANICS Fundamentals and Applications Second Edition. CRC Press, 1995.
- [2] ANSYS, Users Manual. Version 5.6. Swanson Analysis System, Inc. Houston, Pennsylvania, 1999.
- [3] Atkinson, C.: On the stress intensity factors associated with cracks interacting with an interface between two elastic media. International Journal of Engineering Sciences, Vol. 13, pp. 489-504, 1975.
- [4] Bogy, D.B. On the Plane Elastostatic Problem of a Loaded Crack Terminating at a Material Interface. Journal of Applied Mechanics, pp. 911 – 918, December 1971.
- [5] Cook, T.S., Erdogan, F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. International Journal of Engineering Sciences, Vol. 10, pp. 677-697, 1972.
- [6] Dundurs, J. Elastic interaction of dislocation with inhomogeneities. Mathematical theory of dislocations, The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1969.
- [7] Fenner, D.N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. International Journal of Fracture, Vol. 12, No. 5, pp. 705-721, October 1976.
- [8] Meguid, S.A., Tan, M., Zhu, Z.H., Analysis of cracks perpendicular to bimaterial interfaces using a novel finite element. International Journal of Fracture 73, pp. 1-23, 1995.
- [9] Menčík, J. Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston, London, 1996.
- [10] Náhlík, L. Determination of a crack propagation direction initiated at the bi-material interface. Applied mechanics 2001, pp.157-164, Nečtiny, 2001.
- [11] Náhlík, L., Knésl, Z. Analytická a numerická analýza napětíového pole v okolí trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů v případě kombinovaného namáhání. Sborník konference Výpočtová mechanika 2000, str. 291-298, Nečtiny 2000.
- [12] Náhlík, L., Knésl, Z. Estimation of the critical stress for failure of protective layers. Sborník konference Materials structure & micromechanics of fracture, Brno 2001.
- [13] Sih, G. C.: A special theory of crack propagation, in Mechanics of Fracture, ed. G.C.Sih, Noordhoff Intern. Publishing, Leyden 1977.
- [14] Sih, G.C. Mechanics and physics of energy density theory. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 4, pp. 157 – 173, 1985.

- [15] Sih, G.C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *Int. Journal of Fracture*, Vol. 10, No. 3, pp. 305 – 321, 1974.
- [16] Sih, G.C., Ho, J.W. Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 16, No. 3, pp. 179 – 214, 1991.
- [17] Zak, A.R., Williams, M.L. Crack point stress singularities at a bi-material interface. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, pp. 142-143, March 1963.