



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

MATEMATICKÝ MODEL LEVITAČNÍHO ELEKTROMAGNETU

Miroslav Patočka , Petr Huták *)

Abstrakt:

Príspevek se zabývá matematickými modely levitačního elektromagnetu. Magnetická levitace v dopravě nebo v magnetických ložiskách vyžaduje polohovou regulaci na konstantní tloušťku vzduchové mezery. Elektromagnet je soustavou principiálně nestabilní a silně nelineární, polohová regulace je proto značně obtížná. Pro účely simulace celé regulační soustavy i pro syntézu regulátoru je vhodné vytvořit věrohodný matematický model vlastního elektromagnetu. Je uveden model s linearizovaným feromagnetickým obvodem a nastíněna problematika modelu s nelineárním feromagnetikem. Modely jsou snadno použitelné v prostředí MATLAB - SIMULINK.

Klíčová slova:

Elektromagnet, levitace, matematický model, MATLAB-SIMULINK

1. Úvod

Pro účely simulace je nutno model elektromagnetu vytvořit jako blok, kde vstupní veličinou je okamžité napětí $u(t)$ přiložené na cívku elektromagnetu, výstupní veličinou je okamžitá délka (poloha) $l(t)$ vzduchové mezery, parametrem je tíhová síla G (časově konstantní) a případně další rušivá síla $F_r(t)$ (časově proměnná).

Problematiku lze rozdělit na:

- Modely s *linearizovaným* (lineárním) feromagnetickým materiálem mg. obvodu.
- Modely s *nelineárním* feromagnetickým materiálem mg. obvodu.

Oba dva typy modelů jsou však vždy *nelineární* z těchto důvodů:

- Vždy obsahují matematickou operaci *násobení* dvou (i více) časově proměnných vnitřních signálů.
- Vyvozená vnitřní elektromagnetická síla je silně nelineární funkcí polohy (např. nepřímá úměra).
- Vnitřní elektromagnetická síla při *přítahu* může nabýt libovolné hodnoty (omezeno pouze na F_{max}), síla při *odpadu* může nabýt pouze konstantní hodnoty G .

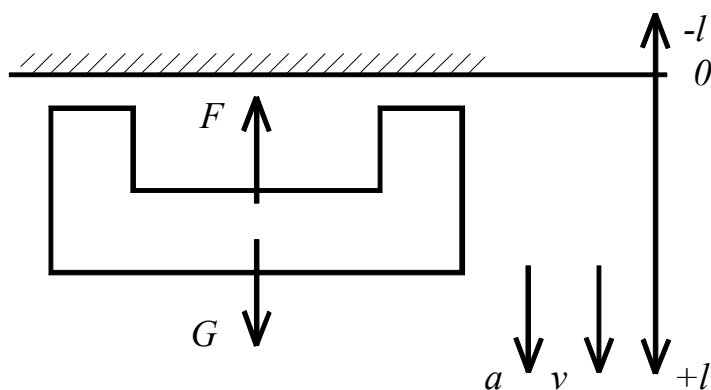
*) VUT FEKT Brno, Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky (UVEE), Technická 8, 616 00 Brno
Doc. Dr. Ing. Miroslav Patočka, E-mail: patocka@feec.vutbr.cz, Tel: +42(05)4114 2690
Ing. Petr Huták, Ph.D, E-mail: hutak@feec.vutbr.cz, Tel: +42(05)4114 2437

Třetí důvod - ač to není na první pohled zřejmé - činí velké problémy při návrhu regulátoru. Levitační elektromagnet se totiž dynamicky chová zcela jinak při *odpadu* z nulového dorazu a zcela jinak při *přítahu* z max. dorazu do jmenovité žádané polohy. Už jenom tento problém vede na použití adaptivního regulátoru, má-li být dosaženo vynikajících regulačních parametrů při regulaci v obou směrech. Tento jev se u magnetických ložisek vyskytuje v méně nepříznivé podobě - dva protilehlé magnety se vzájemně „přetahují“. Klidový pracovní bod magnetů je však i zde rozdílný (různé síly, lišící se o tíhu G).

2. Model elektromagnetu s linearizovaným feromagnetikem

Model vychází ze základního zjednodušení, předpokládajícího přímou úměru mezi spráženým mg. tokem a proudem. Konstantou úměrnosti je indukčnost:

$$\psi = LI \quad (1)$$



Obr.1 Zvolená orientace vektorů v systému elektromagnetu.

Nechť je definován počátek a orientace souřadnic polohy, orientace vektorů rychlosti, zrychlení a sil, podle *Obr.1*. Pak lze sestavit následující rovnice.

Pro výslednou akcelerační sílu F_a a tedy i pro výsledné zrychlení a platí

$$F_a = G + F_r - F \quad ma = mg + F_r - F \quad a = g + \frac{1}{m}(F_r - F) \quad (2 \text{ a, b, c})$$

Rychlost lze určit jako integrál ze zrychlení:

$$v = v_0 + \int a dt \quad (3)$$

Podobně okamžitou polohu lze určit jako integrál z rychlosti:

$$l = l_0 + \int v dt \quad (4)$$

Známe-li počet závitů N , průřez železa S_{Fe} , délku siločáry v železe l_{Fe} , indukčnost L vinutí bude

$$L = \frac{N^2 \mu_0 S_{Fe}}{2l + \frac{l_{Fe}}{\mu_r}} \quad (5)$$

Derivace indukčnosti L podle délky l mezery má tvar

$$\frac{dL}{dl} = -2 \frac{N^2 \mu_0 S_{Fe}}{\left(2l + \frac{l_{Fe}}{\mu_r}\right)^2} = -2 \frac{L}{2l + \frac{l_{Fe}}{\mu_0}} \quad (6)$$

Výslednou sílu elektromagnetu určíme dle známého vztahu:

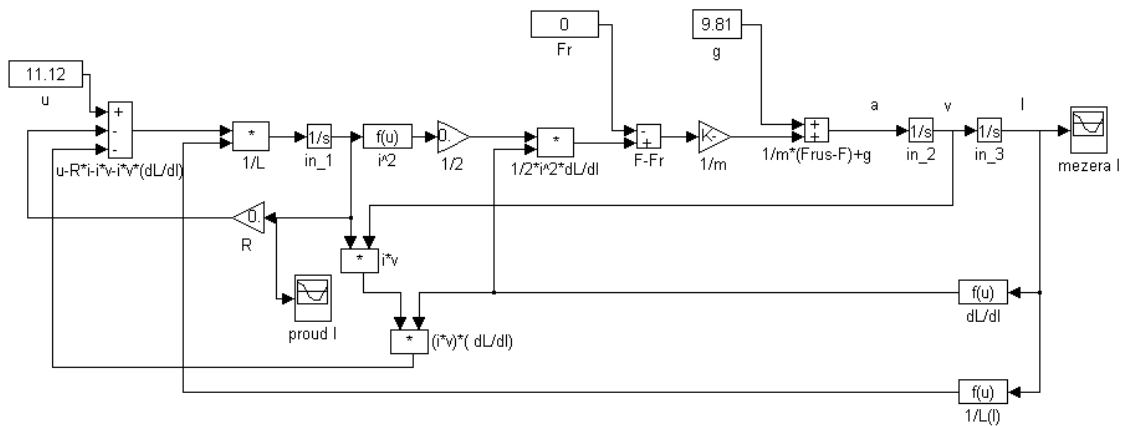
$$F = + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dl} \quad (7)$$

Napětí na svorkách cívky elektromagnetu se skládá z úbytku na odporu R vinutí, ze složky indukované změnou proudu di/dt a ze složky pohybové při pohybu rychlostí v :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} + i v \frac{dL}{dl} \quad (8)$$

S pomocí uvedených rovnic již není obtížné sestavit v programu MATLAB - SIMULINK blokové schéma modelu elektromagnetu podle Obr.2.

Model s *lineárním* feromagnetickým obvodem velmi dobře vystihuje statické i dynamické chování levitačního elektromagnetu v těsné blízkosti jmenovitého bodu (při jmenovité délce mezery l). Bohužel je však téměř nepoužitelný v oblasti velmi malých délek mezery a při mezeře nulové.



Obr.2 Model elektromagnetu s lineárním mg. obvodem v programu MATLAB-SIMULINK.

Důvod principiálně spočívá v linearizaci magnetického obvodu. Model neumí brát v úvahu nelinearitu železa a jeho velmi snadné přesycení při malé mezeře. Výsledkem jsou nerealisticky velké hodnoty vnitřní elektromagnetické síly F při malých mezerách. Nepomůže ani korekční člen l_{Fe}/μ_r , ve jmenovateli rovnic (5), (6), který je použit úmyslně, aby zabránil růstu síly do nekonečna při nulové mezeře l . Tento člen by jinak bylo možno zanedbat.

Nicméně model je však vyhovující ve všech případech, ve kterých zůstává délka (tloušťka) mezery konstantní a mění se pouze plocha, kterou prochází mg. tok : Např. tahový elektromagnet s válcovým jádrem vtahovaným do nemagneticky vyvložkované válcové dutiny, nebo spínaný reluktanční motor SRM a podobně. Musíme však zajistit činnost modelu v lineární oblasti feromagnetika.

3. Model elektromagnetu s nelineárním magnetickým obvodem

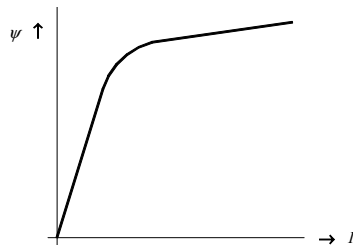
U modelu uvažujícího nelinearitu feromagnetika nelze počítat s přímou úměrou mezi spřaženým mg. tokem a proudem podle (1), nýbrž je nutno brát v úvahu nelineární magnetizační charakteristiku podle Obr.3 ve tvaru

$$\psi = \psi(I) \quad \text{popř.} \quad B = B(H) \quad (9)$$

Z principů *obecné teorie elektrického stroje*, plyne základní univerzální vztah pro výpočet síly F z tzv. koenergie W_{co}

$$F = \frac{\partial W_{co}}{\partial l} \quad (10)$$

kde síla je dána diferenciální změnou koenergie, způsobenou diferenciální mechanickou změnou délky mezery. Velikost koenergie je určena plochou *pod* křivkou na Obr.3, naproti tomu velikost magnetické energie uložené v magnetickém poli je dána plochou *nad* touže křivkou.



Obr.3 Nelineární magnetizační charakteristika železa.

U nelineárních mg. obvodů bývá řešení rovnice (10) obtížné, pro velikost síly ve vzduchové mezeře lze však odvodit vztah

$$F = 2 \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot S_{Fe} = \frac{B^2}{\mu_0} \cdot S_{Fe} \quad (11)$$

Pro svorkové napětí magnetu platí

$$u(t) = R i(t) + \frac{d\psi(t)}{dt} = R i(t) + N S_{Fe} \frac{dB(t)}{dt} \quad (12)$$

Odtud

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{N S_{Fe}} [u(t) - R i(t)] \quad (13)$$

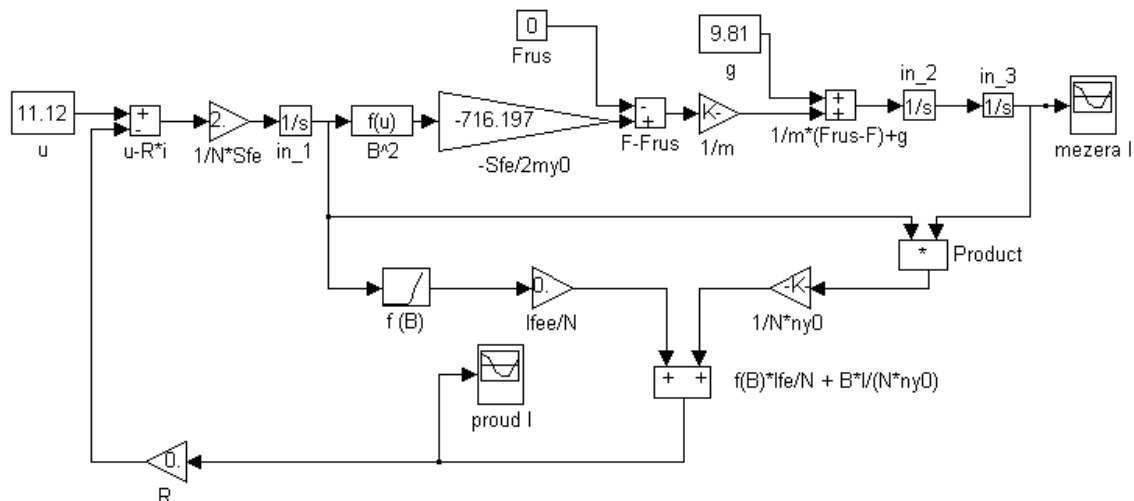
Celkové magnetické napětí v obvodu lze vyjádřit

$$N i = 2 H_v l + H_{Fe} l_{Fe} = 2 \frac{B}{\mu_0} l + f(B) l_{Fe} \quad (14)$$

kde $H_{Fe} = f(B)$ je magnetizační charakteristika uvažovaná jako *inverzní funkce* vzhledem k (9). Touto funkcí je plně definována nelinearita magnetického obvodu. Ze (14) plyne

$$i = \frac{2 B l}{N \mu_0} + f(B) \frac{l_{Fe}}{N} \quad (15)$$

Pomocí rovnic (2), (3), (4), (11), (13), (15) lze pak snadno sestavit v prostředí MATLAB-SIMULINK model podle Obr.4. Tento model neumí brát v úvahu hysterizi feromagnetika, tj. rovnice (9) je brána jako matematicky jednoznačná funkce bez hysterize, podle Obr.3.



Obr.4 Model elektromagnetu s nelineárním mg. obvodem v programu MATLAB-SIMULINK.

4. Závěr

Přesné modelování levitačních elektromagnetů usnadní syntézu regulátoru polohy, jak je ukázáno např. v [1]. V neposlední řadě lze při znalosti přesného matematického modelu realizovat vyšší typy polohové regulace s využitím pozorovatele, čímž je možno eliminovat např. čidlo rychlosti v podřazené rychlostní smyčce.

Na závěr lze poznamenat, že každý model magnetu je nutno navíc vybavit modelem *horního* a *dolního* „dorazu“ s určitým vhodným tlumením. Bez tohoto opatření nelze rozumně sledovat regulační děje v součinnosti s modelem regulátoru.

Problematika magnetické levitace a magnetických ložisek je na pracovišti UVEE řešena za podpory grantové agentury GAČR, v rámci projektu 102/01/1291 *Diagnostika elektromagnetických vlastností elektrických strojů pomocí vibračních a akustických polí*.

Literatura

- [1] Patočka M., Kreysa K., Huták P. : Polohová regulace levitačního elektromagnetu a magnetických ložisek. Sborník konference EPVE'99, Brno, 21 - 22 září 1999.