



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**THE CONTRIBUTION TO THE IDENTIFICATION OF NON-LINEAR VISCOUS
ELEMENT OF DISSIPATION LAYER IN MECHANICAL SYSTEMS**

Luděk Pešek¹,

Abstrakt: Pro identifikace parametrů slabých nelinearit disipačních vrstev byly rozšířeny stávající numerické metody a odladěny numerické programy pro případ nelineárního disipačního členu závislého na rychlosti kmitání. Pohybové rovnice jsou vyjádřeny pomocí metody malého parametru. Řešení těchto nelineárních rovnic je získáno Newtonovou-Raphsonovou iterační metodou v kombinaci s lineárním odhadem pomocí Greenových rezolvent. Pro identifikaci nelineárních parametrů reologického modelu byla využita metoda nelineární regrese.

Klíčová slova: disipační vrstva, viskózní tlumení, identifikace, nelineární dynamický systém.

1. Úvod

Tento příspěvek je pokračováním našeho výzkumu matematického modelování dynamických vlastností mechanického systému s vnitřní disipační vrstvou. Jeho cílem je navržení metodiky pro identifikaci parametrů fyzikálně vhodně zvoleného nelineárního reologického modelu takovéto vrstvy a tyto přístupy v budoucnu využít pro zpřesněný popis vibro-akustického chování mechanických systémů s disipační vrstvou.

V práci [1] byla navržena metodika pro identifikaci parametrů nelineárních členů reologických modelů disipační vrstvy. Její ověření bylo předvedeno na případě prstence uloženého na vazko-pružných prvcích s příspěvkem nelineární kubické vratné síly. V další etapě byla tato metodika a výpočetní programy rozšířeny o možnosti identifikaci parametrů nelineárního popisu disipačních sil, kdy jde o závislost na rychlosti kmitání pro případy různého typu namáhání, jako tah–tlak, čistý ohyb, čistý krut, a zvoleného typu buzení, jak rázového tak i harmonického.

Tento příspěvek obsahuje stručný popis matematického modelu a jeho řešení s metodikou identifikace pro případ nelineárního viskózního tlumení a na numerické simulaci případu vazko-pružně uloženého nosníku ukazuje přesnost a konvergenci řešení.

¹ Ing., CSc., Ústav termomechaniky AVČR, Dolejškova 5, 182 00 Prague 8, E-mail: pesek@it.cas.cz

2. Popis identifikace parametrů nelineárního disipačního členu

Pro popis dynamického chování mechanických systémů s disipační vrstvou s uvažováním nelineárního disipačního členu závislého na rychlosti kmitání jsme vyšli z pohybové rovnice vyjádřené ve formě

$$\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_b(t) + \dot{\mathbf{a}}\mathbf{p}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t), \quad (1)$$

kde matice tuhosti \mathbf{K} , tlumení \mathbf{B} a hmotnosti \mathbf{M} jsou obecně nehermitovské matice, $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ a $\ddot{\mathbf{x}}$ vektory posuvů, rychlostí, resp. zrychlení. Vektor \mathbf{f}_b představuje vektor buzení a \mathbf{p} s malým parametrem ε vyjadřuje vektor slabých nelineárních vazeb, kde \mathbf{a} je vektor neznámých parametrů těchto vazeb.

Zatímco levá strana (1) popisuje lineární část systému s uvažováním lineárního viskoelastického modelu, mohou být vazby \mathbf{p} navrženy na základě experimentu jako integrovatelné analytické funkce výchylek, rychlostí a času tak, aby vystihovali nelineární příspěvek reologického chování disipačních materiálů. Nelineární disipační vazbu popsanou obecně na rychlosti závislou maticí \mathbf{B}_N představuje vektor $\mathbf{p} = \mathbf{B}_N \dot{\mathbf{x}}$.

Pro sestavení matic \mathbf{K} , \mathbf{B} a \mathbf{M} rovnice (1) jsou použity numerické modely, které jsou dále redukovány na několik málo stupňů volnosti odpovídající dominantnímu kmitání popisovaného dynamického systému, které závisí na typu provozního buzení.

Po převedení rovnice (1) do stavového prostoru lze lineární aproximaci řešení $\dot{\mathbf{x}}$ pro čas t a pro nulové počáteční podmínky vyjádřit pomocí matice Greenových rezolvent [2] $\Gamma(t - \tau)$ vzorcem

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_L(t) + \varepsilon \mathbf{v}_N(t), \quad (2)$$

$$\text{kde } \mathbf{v}_L(t) = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{v}_N(t) = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}, \tau) d\tau, \quad \Gamma(t - \tau) = \mathbf{V} e^{(t-\tau)\mathbf{D}^H} \mathbf{W}.$$

Matice \mathbf{V} a \mathbf{W} představují matice pravostranných a levostranných vlastních vektorů a \mathbf{D} spektrální matici rovnice ve stavovém prostoru v homogenním tvaru a splňují podmínku ortonormality. Řešení nelineární rovnice (2) lze provést například Newtonovou-Raphsonovou iterační metodou.

Dalším krokem je formulace této úlohy z hlediska identifikace neznámých reologických parametrů vektoru \mathbf{a} disipační vrstvy. Pro určení parametrů disipace vycházíme z minimalizace cílové funkce

$$\min \left[{}^T (\dot{\mathbf{x}}_E - \dot{\mathbf{x}}) (\dot{\mathbf{x}}_E - \dot{\mathbf{x}}) \right] \rightarrow 0 \quad (3)$$

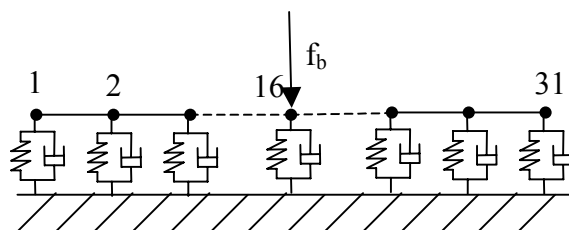
kde $\dot{\mathbf{x}}_E$ jsou experimentálně získaná data, metodou nelineární regrese, která vede při použití Newtonovy-Raphsonovy metody na iterační řešení přeurčené soustavy rovnic

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \mathbf{a}_i} \Delta \mathbf{a}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_E - \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (4)$$

s použitím Monroeho-Penroseovy pseudoinverze. Písmenem i zde označujeme iterační krok; pro $i=0$ je nutné stanovit počáteční odhad neznámých parametrů. Pro posouzení konvergence je vyhodnocována euklidovská norma residua. $RES_i = \|\dot{\mathbf{x}}_E - \dot{\mathbf{x}}_i\|$ v každém iteračním kroku. Gradienty $\partial \dot{\mathbf{x}}_i / \partial \mathbf{a}_i$ v každém integračním kroku jsou vyhodnocovány pomocí Greenových rezolvent.

3. Numerická simulace - kmitání nosníku na pružném podkladě

K testování identifikace parametrů viskózního tlumení pro rovinné namáhání byla použita vazko-pružně uložená deska ve tvaru kotouče. Tato úloha je modelována metodou MKP jako rovinná pomocí 30 nosníkových prvků, její podklad pak upravenými Kelvinovými-Voigtovými členy zavedenými do uzlů prvků nosníku (viz obr.1).



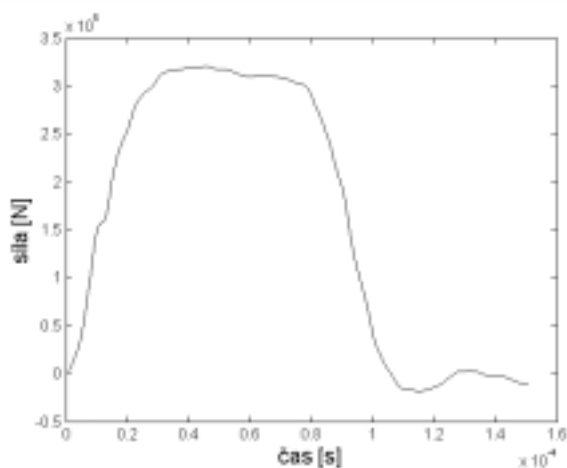
Obr.1 Schéma MKP modelu kotouče s vazko-pružnými členy.

Tyto členy mají vratnou f_v a disipační f_d sílu opět definovanou podle vztahu

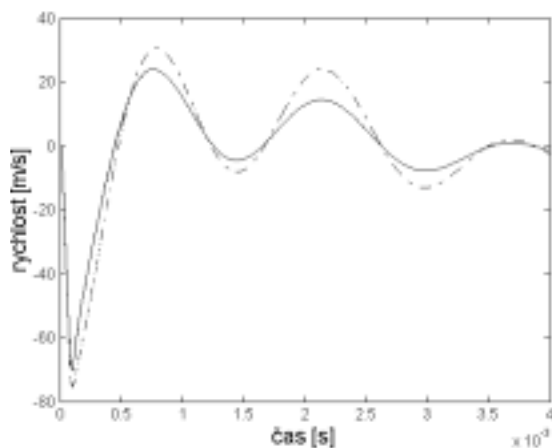
$$f_v = a_1 x, \quad f_d = b_1 \dot{x} + b_{nl} \dot{x}^3, \quad (5)$$

Vektor \mathbf{a} se tím redukuje na prvek b_{nl} . Vstupní parametry numerického modelu jsou: délka $l=0.3195\text{m}$, tloušťka $h=0.01215\text{m}$, šířka $b=0.02485\text{m}$, modul pružnosti ocelového nosníku $E=2.054e11\text{Pa}$, hustota $\rho=7673\text{kg/m}^3$, Poissonova konstanta $\mu=0.3$, $a_1=3.504e4\text{N/m}$, $b_1=11.646\text{N/ms}^{-1}$, počáteční odhad součinitele $b_{nl0}=0.001\text{N/m}$, časový krok integrace $\Delta t=4e-6\text{s}$. Zatížení prstence bylo realizováno silovým pulsem (obr.2) uprostřed nosníku v uzlu 16 (obr.1).

Pro identifikaci parametru b_{nl} jsme vybrali časovou odezvu prstence na dané rázové zatížení v uzlu 16 ve směru vertikálním. Tato odezva byla počítána na redukovaném modelu nosníku se třemi hlavními souřadnicemi. Pro redukci byly vybrány první tři vlastní tvary. Prvé dva odpovídají svislému pohybu, resp. natáčení nosníku jako tuhého tělesa na pružném podkladě, třetí tvar je prvním ohybovým tvarem. Vlastní čísla těchto tvarů byly: $(-77.63 + 261.39i)\text{Hz}$, $(-77.68 + 261.46i)\text{Hz}$ a $(-77.67 + 681.88i)\text{Hz}$. Blízkost prvních dvou vlastních frekvencí je dána symetrií úlohy. Rázovým zatížením v uzlu 16 je dominantně vybuzen 1. a 3.mód. Simulace experimentu byla provedena výpočtem nestacionární odezvy na takto redukovaném modelu prstence při použití součinitele $b_{nlR}=1e-2\text{N/m}$ metodou Greenových rezolvent.



Obr.2 Časový průběh zatěžovacího pulsu.



Obr.3 Odezva nosníku na rázové zatížení v uzlu 16 vypočtená pro různé hodnoty součinitele b_{n1} : plná čára – b_{n15} a b_{n1R} , čerchovaná čára - b_{n10} .

Výsledky identifikace:

Po pěti iteračních krocích výpočtu přeuražené rovnice (4) jsme identifikovali součinitel $b_{n15} = 9.99999998e-3 \text{ N/m}$, což proti očekávané hodnotě b_{n1R} činí chybu odhadu cca $2e-7\%$. V obr. 3 jsou vyneseny plnou čarou odezvy “experimentální” a vypočtené pro identifikovanou hodnotu b_{n15} . Obě křivky splývají a jsou v tomto zobrazení neodlišitelné. Čerchovanou čarou je pro zajímavost zobrazena odezva vypočítaná pro počáteční odhad b_{n10} . Dosažené výsledky ukazují na vysokou přesnost a dobrou konvergenci. Bylo dále zjištěno, že proces konvergence při použití residuí posuvů je ve srovnání s residui rychlostí mnohem pomalejší a méně stabilní.

i-tá iterace	1.	2.	3.	4.	5.
$RES_i / \ \dot{\mathbf{x}}_E\ $	0.3345	0.1179	0.0203	7.61e-4	1.34e-6
Δa_{ni}	4.55e-3	3.53e-3	8.79e-4	3.54e-5	6.25e-8

Tab.2 Norma residuí a změny součinitele b_{n1} v iteracích $i=1,2,\dots,5$.

4. Závěr

Pro identifikace parametrů slabých nelinearit disipačních vrstev byly stávající numerické metody a numerické programy rozšířeny o možnost identifikace nelineárního disipačního členu závislého na rychlosti kmitání.

Celá metodika byla ověřena na testovacím případě vazko-pružně uloženého nosníku s nelineárním příspěvkem disipační síly ve formě kubické závislosti na rychlosti kmitání. Při testování rychlosti iteračního procesu při identifikaci nelineárních disipačních parametrů minimalizací kvadrátu residuí posuvů bylo zjištěno, že tento

proces je ve srovnání s použitím residuí rychlostí mnohem pomalejší a méně stabilní na konvergenci výpočtu.

Na základě výsledků těchto numerických simulací je v současné době navržen a realizován experiment na vybraném vzorku pryže a prováděna identifikace parametrů zvoleného reologického modelu.

Z poznatků získaných při ladění a identifikaci parametrů daného fyzikálního modelu disipační vrstvy se ukazuje nutnost dále podrobně zkoumat reologické chování vzorků pryže při dynamickém zatěžování pro návržení nových hysterezních a viskózních reologických modelů těchto materiálů a s ohledem na tyto modely dále rozšiřovat stávající algoritmy výpočtu.

5. Literatura

- [1] **Pešek, L.** (2001): Identification of parameters of mechanical systems with dissipation layer, Proc. of National Conference with International Participation Engineering Mechanics 2001, Svratka, 5 pages.
- [2] **Daněk, O, Kozánek, J.** (1998): Matematické modely dynamických systémů obecné struktury, Strojnícky časopis, 49, 1998, č.2.

Příspěvek byl vypracován v rámci řešení grantového projektu GA ČR č.101/02/0241