Národní konference s mezinárodní úcastí

INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Ceská republika

MATEMATICKÝ MODEL ROZVĚTVENÍ TVARU T PRO NESTACIONÁRNÍ PROUDĚNÍ.

Štigler Jaroslav[1], Pochylý František[2]

V příspěvku jsou předneseny nové poznatky o matematickém modelu nestacionárního proudění v rozvětvení tvaru T. Je zde naznačeno jeho odvození a jsou určovány konstanty potřebné pro výpočet.

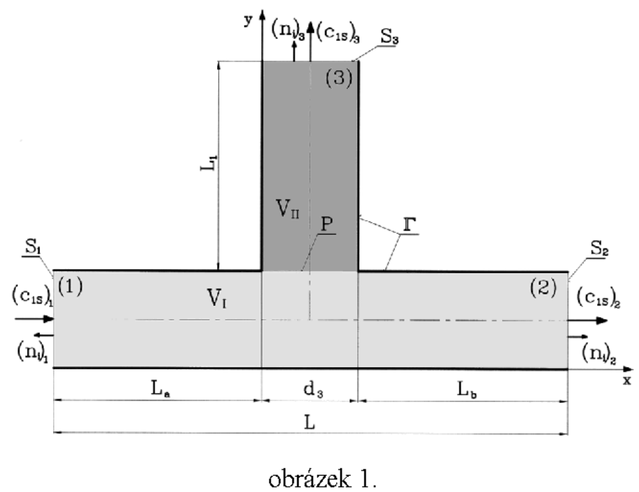
Klíčová slova: matematický model rozvětvení, nestacionární proudění,

Problematika, kterou se příspěvek zabývá byla řešena za finanční podpory Grantové agentury České Republiky v rámci grantu číslo GA 101/99/P027.

Úvod

Důvodem proč je užitečné zabývat se matematickým modelem nestacionárního proudění v rozvětvení je skutečnost, že při řešení nestacionárního proudění v potrubních sítích je v současné době používán velmi zjednodušený matematický model rozvětvení $p_1=p_2=p_3=$konst. Při srovnávání výpočtů a měření nestacionárního proudění v potrubních sítích byly zjištěny velké rozdíly právě v oblasti rozvětvení.

Pod pojmem matematický model rozumíme vztah mezi průtoky a tlaky v jednotlivých větvích rozvětvení. Na obrázku 1. je nakreslena geometrie rozvětvení a uspořádání průtoků, pro které bude matematický model sestavován.



obrázek 1.

[1] Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D, - VUT FSI, EÚ, OHS V.K., Technická 2, Brno 616 69, tel.: 05-4114 2342, E-mail stigler@khzs.fme.vutbr.cz

[2] Prof. Ing. František Pochylý, CSc. - VUT FSI, EÚ, OHS V.K., Technická 2, Brno 616 69, tel.: 05-4114 2335, E-mail stigler@khzs.fme.vutbr.cz

Matematický model rozvětvení

Popis základních použitých veličin

Označení	jednotka	popis
L	m	délka
Q	m^3s^{-1}	objemový průtok
S	m^2	plocha průřezu
V	m3	objem
c_i	ms^{-1}	rychlost
d	m	průměr
n_i	-	vnější jednotkový normálový vektor k ploše
p	Pa	tlak
β, β_1	-	koeficient pro nestacionární proudění
ρ	kg.m-3	hustota
ξ	-	ztrátový součinitel

Výběr typu rozvětvení

Pro vytváření matematického modelu rozvětvení byl vybrán nejčastěji se vyskytující typ rozvětvení tvaru T. Uspořádání průtoků je patrné z obrázku 1. Přítok do rozvětvení je veden přímou větví (je označena indexem 1). Odtok je pokračující přímou větví (je označena indexem 2) a vedlejší větví (je označena indexem 3). Veškeré veličiny související s danou větví jsou označeny odpovídajícím indexem.

Předpoklady

Při odvozování matematického modelu rozvětvení byly brány do úvahy následující předpoklady.

Geometrické předpoklady:

i. jedná se o rozvětvení tvaru T s uspořádáním přítoků a odtoků podle obrázku 1.,

ii. pro průřezy platí $S = S_1 = S_2$, $S \neq S_3$.

Předpoklady týkající se proudění:

iii. jedná se o proudění nestlačitelné kapaliny

iv. průřezy S1 a S2 jsou v dostatečné vzdálenosti od rozvětvení takže na nich platí $\frac{\partial c_x}{\partial x} = 0$, $c_y = c_z = 0$

v. průřez S3 je v dostatečné vzdálenosti od rozvětvení takže na něm platí $\frac{\partial c_y}{\partial y} = 0$, $c_x = c_z = 0$

vi. dále budeme předpokládat, že platí předpoklady pro jednorozměrné proudění potrubím.

Matematický model rozvětvení

Matematický model rozvětvení je odvozen na základě výše uvedených předpokladů, při jeho odvození se vycházelo z rovnice kontinuity a ze středovaných Navier-Stokesových rovnic v gravitačním poli (dále již NS).

$$\rho\frac{\partial c_i}{\partial t}+\rho\frac{\partial c_i}{\partial x_j}c_j+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}=\rho g_i \tag{1}$$

Výsledkem jsou tři rovnice, které tvoří model rozvětvení. První rovnici získáme integrací NS rovnice přes celou oblast rozvětvení $V=V_I+V_{II}$.

$$\int_V\rho\frac{\partial c_i}{\partial t}dV+\int_V\rho\frac{\partial c_i}{\partial x_j}c_j dV+\int_V\frac{\partial p}{\partial x_i}dV-\int_V\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}dV=\int_V\rho g_i dV \tag{2}$$

Po úpravě dostaneme:

$$p_2-p_1=-\int_V\rho\frac{\partial c_i}{\partial t}dV+\rho\frac{Q_1^2}{S^2}-\rho\frac{Q_2^2}{S^2}+\rho g_1\frac{V_0}{S}-\frac{1}{2}\rho\xi_2\frac{Q_1^2}{S^2} \tag{3}$$

Druhou rovnici získáme vynásobením NS rovnice rychlostí a následnou integrací přes objem V. Je to energetická rovnice.

$$\int_V\rho\frac{\partial c_i}{\partial t}c_i dV+\int_V\rho\frac{\partial c_i}{\partial x_j}c_j c_i dV+\int_V\frac{\partial p}{\partial x_i}c_i dV-\int_V\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}c_i dV=\int_V\rho g_i c_i dV \tag{4}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\int_V\rho\frac{\partial\left(\frac{c^2}{2}\right)}{\partial t}dV-\left(\frac{\rho}{2}\frac{Q_1^2}{S^2}+p_1\right)Q_1+\left(\frac{\rho}{2}\frac{Q_2^2}{S^2}+p_2\right)Q_2+\left(\frac{\rho}{2}\frac{Q_3^2}{S_3^2}+p_3\right)Q_3+\frac{1}{2}\rho\xi_c\frac{Q_1^2}{S^2}Q_1= \tag{5}$$
$$=\rho\int_V g_i c_i dV$$

V obou případech se nám podařilo na základě uvedených předpokladů jednotlivé členy upravit do přijatelné formy, kromě nestacionárního členu. Přičemž byla do výrazů zavedena ztráta ve formě ztrátových součinitelů ξ_2 a ξ_c. Ztráta je vztažena k celkovému průtoku rozvětvením Q_1.

Úprava nestacionárních členů

V obou případech při úpravě nestacionárních členů využijeme první a druhé věty o střední hodnotě. Nestacionární člen v rovnici (4) upravíme následovně

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_I}c_1 dV=\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^L Q dL\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[Q_1\int_0^\beta dL+Q_2\int_\beta^L dL\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\beta Q_1+(L-\beta)Q_2\right], \tag{6}$$

tedy

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_I}c_1 dV=\beta\frac{\partial Q_1}{\partial t}+(L-\beta)\frac{\partial Q_2}{\partial t} \tag{7}$$

Nestacionární člen v rovnici (5) rozdělíme na integrál přes oblast V_I a V_{II} ty dále upravíme

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_I} c^2 dV = \frac{1}{2.S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^L Q^2 dl\right) = \frac{1}{2.S}\frac{\partial}{\partial t}\left[Q_1^2\int_0^{\beta_1} dl + Q_2^2\int_{\beta_1}^{L} dl\right] = \frac{1}{2.S}\frac{\partial}{\partial t}\left[\beta_1\frac{Q_1^2}{S_1^2} + \left(L-\beta_1\right)\frac{Q_2^2}{S_2^2}\right] \tag{8}$$

a tedy

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_I} c^2 dV = \beta_1\frac{1}{S}\frac{\partial Q_1}{\partial t}Q_1 + \left(L-\beta_1\right)\frac{1}{S}\frac{\partial Q_2}{\partial t}Q_2 \tag{9}$$

Obdobným způsobem upravíme i integrál přes objem V_{II}.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{II}} c^2 dV = L_1\frac{1}{S}\frac{\partial Q_3}{\partial t}Q_3 \tag{10}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnic tvořící matematický model, dostaneme

$$p_2 - p_1 = -\frac{\rho\beta}{S}\frac{\partial Q_1}{\partial t} + \rho\frac{Q_1^2}{S^2} - \frac{\rho\left(L-\beta\right)}{S}\frac{\partial Q_2}{\partial t} - \rho\frac{Q_2^2}{S^2} + \rho g_1\frac{V_0}{S} - \frac{1}{2}\rho\xi_2\frac{Q_1^2}{S^2} \tag{11}$$

$$\left[\rho\frac{\beta_1}{S}\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{\rho}{2}\frac{Q_1^2}{S^2} - p_1\right]Q_1 + \left[\rho\frac{\left(L-\beta_1\right)}{S}\frac{\partial Q_2}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\frac{Q_2^2}{S^2} + p_2\right]Q_2 + \left[\rho\frac{L_1}{S_3}\frac{\partial Q_3}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\frac{Q_3^2}{S_3^2} + p_3\right]Q_3 +$$
$$+\frac{1}{2}\rho\xi_c\frac{Q_1^2}{S^2}Q_1 = \rho\int_V g_i c_i dV \tag{12}$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \tag{13}$$

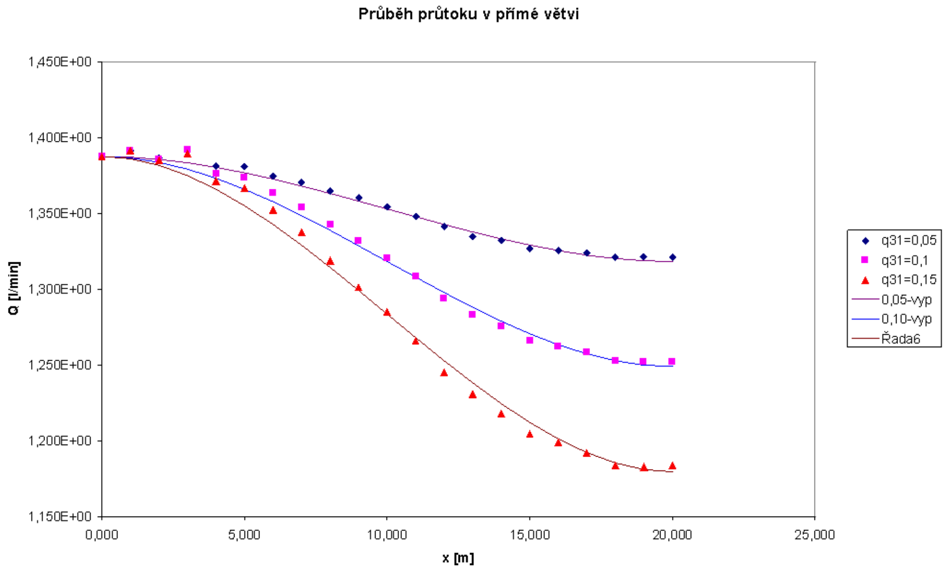
Rovnice (11), (12), (13) tvoří matematický model rozvětvení.

Určení součinitelů β, β_1

Součinitelé β, β_1 závisí na průběhu změny průtoku v přímé větvi z Q_1 na Q_2. Numerickým modelováním třírozměrného proudění v rozvětvení bylo zjištěno, že tento průběh je možné nahradit polynomem třetího stupně. V grafu na obrázku 2 jsou zakreslené hodnoty zjištěné matematickým modelováním. Spojitá čára je vypočtený polynomický průběh.

Průběh změny průtoku můžeme tedy nahradit tímto polynomem

$$Q = \left(Q_2 - Q_1\right)\frac{x^2}{d_3^2}\left(-2\frac{x}{d_3} + 3\right) + Q_1 \tag{14}$$



obrázek 2

Máme-li průběh funkce Q, pak můžeme z rovnice (6) určit koeficient β

$$\beta = L_a + \frac{1}{2} d_3$$

Vidíme, že tento součinitel není závislý na průtoku. Záleží pouze na funkci Q. V případě koeficientu β_1 vycházíme ze vztahu (8) a dostaneme

$$\beta_1 = L_a + d_3 \left(\frac{Q_2}{(Q_2 + Q_1)} - \frac{13}{35} \frac{(Q_2 - Q_1)}{(Q_2 + Q_1)} \right)$$

Vidíme, že v tomto případě je daný koeficient již závislý na průtocích Q_1 a Q_2. To však znamená, že je také závislý na čase.

Závěr

Odvozením těchto koeficientů není ještě matematický model rozvětvení hotový. Tyto vztahy jsou odvozeny pouze pro jednu možnost uspořádání průtoků rozvětvením. Bude-li kapalina přitékat větví 3 a odtékat větví 1 a 2 je nutné matematický model a odvození koeficientů β a β_1 upravit. V současné době je vynakládáno úsilí vytvořit obecný matematický model z hlediska uspořádání průtoků a z hlediska geometrie rozvětvení.

Literatura:

ŠTIGLER, J. POCHYLÝ, F. O matematickém modelu rozvětvení. In *Topical problems in Fluid Mechanics*. Prague 2001, ISBN 80-85918-62-5, (109-112).