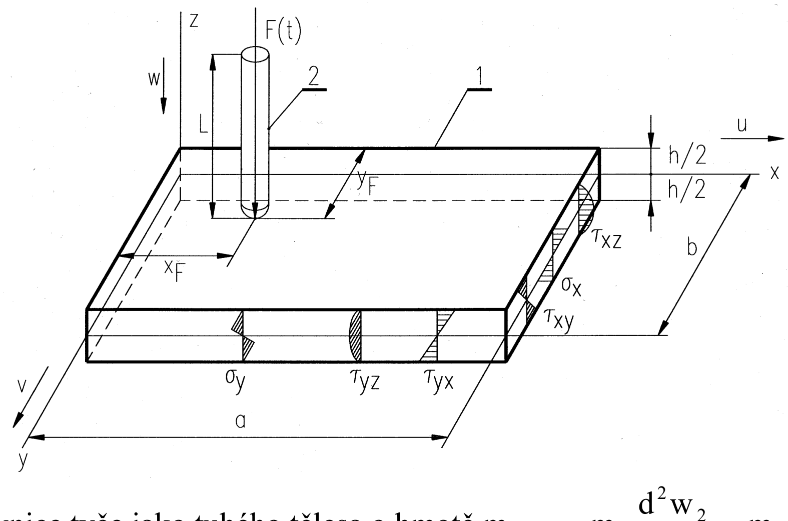
Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002
13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

TRANSVERSALE IMPACT OF ELASTIC ROD ON THIN ELASTIC RECTANGULAR PLATE

J. Volek, J. Soukup, V. Karásek*

In relation to previous solution of non-stationary state of stress in elastic plate excited by singular force, the solution of transversale impact an elastic thin rod on the thinelastic isotropic rectangular plate including rotary inertia and shear effects is published here.

V návaznosti na řešení nestacionární napjatosti v tenké elastické isotropní obdélníkové desce vyvolané osamělou skokovou silou (grantový projekt GAČR č. 101/00/0674 [1]) a na dřívější příspěvky k řešení příčného rázu tenké elastické tyče na nosník [2], [7], [8] je uvedeno řešení příčného rázu tenké elastické tyče na tenkou elastickou isotropní obdélníkovou desku. Dosud byl řešen příčný ráz na desku vyvolaný pouze tuhým tělesem, podobně jako v případě příčného rázu na nosník.
Výchozím předpokladem řešení je rovnost posuvu tyče razníku 2) a desky 1) v místě rázu (x_F, y_F). Volná tyč padá volným pádem do okamžiku dotyku, od kterého působí na obě tělesa rázová síla F(t) neznámého průběhu.



Pohybová rovnice tyče jako tuhého tělesa o hmotě m_2 $$m_2 \frac{d^2 w_2}{dt^2} = m_2 g - F(t)$$

---

* PhDr. Ing. Jan Volek[1,2], Ing. Josef Soukup[1], Ing. Vladimír Karásek[1]
[1] Ústav techniky a řízení výroby, Univerzita J. E. Purkyně Ústí nad Labem, 400 96 Ústí nad Labem, Na Okraji 1001, tel.:047/560 11 91, fax.: 047/520 06 06, e-mail: utrv@pf.ujep.cz
[2] ČD – Výzkumný ústav železniční, Oblast materiálů a konstrukcí, 281 02 Cerhenice, tel., fax.: 0321/ 792 410, e-mai.: koci@pds.pce.cdrail.cz

Její řešení udává posuv těžiště tyče jako tuhého tělesa

$$w_{21}(t) = v_0 t + g\frac{t^2}{2} - \frac{1}{m_2}\int_0^t t_1 \int_0^{t_1} F(\tau)d\tau$$

resp. vyjádřeno konvolutorním integrálem

$$w_{21}(t) = v_0 t + g\frac{t^2}{2} - \frac{1}{m_2}\int_0^{t_1} F(\tau)(t - \tau)\, d\tau$$

Rázová síla F(t) působící na konci tyče vyvolá podélné kmitání tyče definované pohybovou rovnicí podélného kmitání

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \frac{E_2}{\rho_2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = \frac{F(t)\delta(z_F)}{\rho_2 S_2}$$

kde ρ_2 - hustota, S_2 - průřez, E_2 - modul pružnosti tyče, $\delta(z_F)$ je Diracův impuls [3] a řešení této rovnice pro volnou tyč na jejímž dolním volném konci $z_F = L_2$ působí osamělá síla F(t) obecného časového průběhu

$$w_{22}(z,t) = \frac{2}{m_2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j}\cos\frac{j\pi x}{L_2}.\cos\frac{j\pi x_F}{L_2}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)\, d\tau$$

pro koncový řez z_F

$$w_{22}(t) = \frac{z}{m_2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j}\int_0^t F(\tau).\sin\omega_j(t-\tau)\, d\tau$$

Výsledný posuv tyče

$$w_2(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{c2g} - \frac{1}{m_2}\int_0^t F(\tau)(t - \tau)d\tau - \frac{2}{m_2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)d\tau$$

Při odvození pohybové rovnice tenké desky je působení osamělé síly F(t) v místě dotyku x_F, y_F vyjádřeno dvojným Diracovým impulsem $\rho(x,y,t) \rightarrow F(t).\delta(x_F)\delta(y_F)$
Rovnice pro výpočet posuvu desky závisí na přijatém modelu tenké izotropní desky:

Kirchhoffův model bez korekcí

$$\Delta\Delta w + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F(t)\delta(x_F).\delta(y_F)}{D}$$

Rayleigho model s korekcí na vliv setrvačných momentů

$$\Delta\Delta w - \frac{1}{c_3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F(t)\delta(x_F).\delta(y_F)}{D}$$

Flüggeho model s korekcí na vliv smyku

$$\Delta\Delta w - \frac{1}{k'c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F(t)\delta(x_F).\delta(y_F)}{D} - \frac{F(t)\Delta(\delta(x_F)\delta(y_F))}{D}$$

Timošenko-Mindlinův model s korekcí na vliv setrvačných momentů a na vliv smyku

$$\Delta\Delta w - \left(\frac{1}{k'c_2^2} + \frac{1}{c_3^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{k'c_2^2 c_3^2}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} =$$

$$= \frac{F(t)\delta(x_F).\delta(y_F)}{D} + \frac{1}{k'Gh}\left[\frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2}.\delta(x_F)\delta(y_F) - F(t)\Delta(\delta(x_F)\delta(y_F))\right]$$

Řešením těchto rovnic pro dané okrajové podmínky se získá posuv desky v místě průsečíku osy tyče neutrální plochy desky [1].

Pro model Kirchhoffův

$$w_1(x;y;t) = \frac{32}{ab\rho hc^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_2(c\gamma_{mn})}{\gamma_{mn}^2}.\frac{X(x_F).X(x).Y(y_F).Y(y)}{\omega_{mn}}.\int_0^t F(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)\,d\tau$$

kde $\gamma_{mn} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$ $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$ $\beta = \frac{m\pi}{b}$

vlastní frekvence $\omega_{mn} = (\alpha_n^2 + \beta_m^2)\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$

D – ohybová tuhost desky
c – poloměr dotykové plošky tyče a desky
J_2 - Besselova funkce prvního druhu, druhého řádu pro argument $(c\gamma_{mn})$ [5]

Pro model Rayleigho

$$w_1(x;y;t) = \frac{32}{ab\rho hc^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_2(c\gamma_{mn})}{\gamma_{mn}^2}.\frac{X(x).X(x_F).Y(y).Y(y_F)}{\omega_R\left[(\alpha_n^2 + \beta_m^2)\frac{D}{\rho hc_3} + 1\right]}.$$

$$.\int_0^t F(\tau)\sin\omega_R(t-\tau)\,d\tau$$

kde $\omega_R = \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2).c_3}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \frac{12}{h^2}}}$

$c_3 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$ rychlost dilatační vlny v dvojrozměrném prostředí

Pro model Flüggeho

$$w_1(x;y;t) = \frac{32}{ab\rho hc^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{X(x).X(x_F).Y(y).Y(y_F)}{\omega_F}.\int_0^t F(\tau)\sin\omega_F(t-\tau)\,d\tau$$

kde $\omega_F = \dfrac{\left(\alpha_n^2+\beta_m^2\right).\sqrt{k'}c_2}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\dfrac{G}{h^2}k'(1-\mu)}}$

$c_2 = \dfrac{G}{\rho}$ - rychlost příčných vln v kontinuu

k' - koeficient respektující rozložení smykových napětí v průřezu

Pro model Timošenko – Mindlinův

$$w_1(x;y;t) = \frac{32k'c_2^2c_3^2}{abc^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_2\left(c\gamma_{mn}\right)}{\gamma_{mn}^2}.\frac{X(x).X(x_F).Y(y).Y(y_F)}{\omega_2^2-\omega_1^2}.$$

$$.\left\{\left[\frac{1}{\omega_1}\left(\frac{1}{D}+\frac{\alpha_n^2+\beta_m^2}{k'Gh}\right)-\frac{\omega_1}{k'Ghc_3^2}\right]\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{\omega_2}\left(\frac{1}{D}+\frac{\alpha_n^2+\beta_m^2}{k'Gh}\right)-\frac{\omega_2}{k'Ghc_3^2}\right]\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

Pro prostě uloženou desku $X(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{a}$, $Y(y) = \sin\dfrac{m\pi y}{b}$

Rozdíl posuvů koncového řezu tyče $w_2(t)$ a desky $w_1\left(x_F, y_F, t\right)$ v místě rázu je roven dotykové deformaci, která je popsána Hertzovým vztahem

$$\kappa[F(t)]^{\frac{2}{3}} = w_2(t) - w_1\left(x_F, y_F, t\right)$$

po dosazení $w_2(t)$ a $w_1\left(x_F; y_F; t\right)$ se získá nelineární integrální Volterrova rovnice II. druhu pro neznámou funkci F(t).

$$\kappa[F(t)]^{\beta} = \psi(t) - \int_0^t F(\tau)K(t-\tau)d\tau \qquad \text{kde } \psi(t) = v_0 t + \frac{t^2 g}{2}$$

a jádro rovnice např. pro Kirchhoffův model

$$K(t) = \frac{t}{m_2} + \frac{2}{m_2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j}\sin\omega_j t - \frac{32}{ab\rho hc^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2\left(c\gamma_{mn}\right)}{\gamma_{mn}^2}.\frac{X\left(x_F\right).X(x).Y\left(y_F\right).Y(y)}{\omega_{mn}}.\sin\omega_{mn}t$$

Pro řešení integrální rovnice byla navržena numerická metoda při níž se v časových intervalech Δt, tj. pro τ v intervalu

$$t_{i-1} = (i-1)\Delta t < \tau < i\Delta t = t_1$$

Hledaná funkce F(t) se aproximuje lineární funkcí

$$\varphi_i(\tau) = F_i\left[\frac{\tau}{\Delta t} - (i-1)\right] - F_{i-1}\left[\frac{\tau}{\Delta t} - i\right]$$

kde $F_{i-1} = F(t = (i-1)\Delta t)$ $\qquad F_i = F(t = i\Delta t)$

Integrální rovnice pak změní tvar

$$\kappa F_n^{\beta} = \psi_n - \sum_{i=1}^{n}\left\{F_i\left[\frac{\tau}{\Delta t} - (i-1)\right] - F_{i-1}\left[\frac{\tau}{\Delta t} - i\right]\right\}K(n\Delta t - \tau)d\tau$$

kde $F(t=0) = F_0 = 0$ $\qquad \psi_n = v_0 n\Delta t + \frac{g}{2}(n\Delta t)^2$

Po úpravě se získá nelineární algebraická rovnice pro hledanou hodnotu síly $F(n\Delta t)$

$$L(F_n) = a_2 F_n^{\beta} + a_1 F_n + a_0 = 0$$

Pro řešení této rovnice byla použita vlastní numerická metoda [7]. Ze známých hodnot rázové síly je možno určit hodnoty složek napětí σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} a posuvů u, v.

[1] Volek J.: Nestacionární napjatost tenké desky vyvolaná příčnou osamělou silou. Sdělení o studii v rámci grantového projektu GAVČR č. 101/00/0674: Vliv materiálových nelinearit a geometrických nespojitostí na řešení napěťových vln v pevných tělesech. Bulletin vědeckých, výzkumných a pedagogických prací 2001. Ústav techniky a řízení výroby. Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem
[2] Volek J.: Příčný ráz prutů. Výzkumná zpráva.VŠD Žilina 1971.
Ráz v sústave prútov. Výzkumná zpráva VŠD Žilina 1972.
[3] Balda M.: Úvod do statické mechaniky. Západočeská univerzita. Plzeň 2001.
[4] Štěpánek J.: Distribuce a diferenciální rovnice. Karolinum, Praha 2001
[5] Woinowsky- Krieger S.: Über die Biegung dünner rechteckiger Platten durch Kreislasten. Jugenieur – archiv Bd III. 1952 s.236 – 249
[6] Valeš F., Brepta R., Volek J.: Porovnání napjatosti nestacionárně zatíženého stěnového pásu a Timošenkova nosníku. Strojnický časopis 28, 1977, s. 621 – 730
[7] Brepta R.: Vlny napětí a rázové jevy v lineárně elastických a viskoelastických prostředích. Technická univerzita v Liberci + LENAM Liberec 1997, s. 143 - 147
[8] Volek J.: Ráz pružné tyče na prostý nosník. Dinamics machines Proccedings of the VIII Conference Czechoslovak Academy of Sciences, Institut of Thermomechanics. Praha Liblice, 1973.