

PASSAGE OF A FLEXIBLE SLENDER ROTOR THROUGH CRITICAL SPEED

I. Ballo*, R. Chmúrny*

Summary: *The contribution deals with a mathematical model of bending vibrations of a slender flexible rotor, excited by unbalance when passing the critical speed. The analysed rotor is supported by two short bearings on flexible supports; the influence of hydrodynamic forces is neglected. The rotor is assumed being of constant circular cross-section in his whole length and driven by an engine of limited power. The bending vibrations of the rotor are analysed assuming that the transversal displacement limitation during passage trough the critical speeds is facilitated by one of following three possibilities:*

A/ Increase of driving engine power output and so speed up the passage trough critical speed.

B/ Decrease of rotor natural frequency just before reaching the critical speed

C/ Inclusion of a non-linear element into flexible rotor supports.

The aim of this contribution is to compare the time course and magnitude of rotor transversal displacement in the transient vibrations caused by passing critical speed by one of the three approaches mentioned.

Úvod

Ako vidieť z rozsiahlej literatúry (podrobný súpis je uvedený napr. v práci Wauera a Suhermana), problémom prechodového deja, ktorý vznikne pri prechode rotora kritickými otáčkami, sa zaoberali mnohí autori. Okrem základnej tendencie lepšie poznať dynamické deje pri rozličnom spôsobe prechodu, dôležitým motívom bola aj snaha navrhnúť opatrenia, ktoré by prispeli k zníženiu maximálnej výchylky v prechodovom deji.

Najstarším a aj dnes v prevážnej miere používaným spôsobom prechodu rotora cez kritické otáčky je zvýšenie výkonu poháňajúceho zariadenia tak, aby prechod cez kritické otáčky trval čo najkratšie. Tým sa súčasne obmedzí aj rast maximálnej výchylky ohybového kmitania rotora (napr. Gash, Markert, Pfützner).

Za iný možný prístup, umožňujúci znížiť maximálnu výchylku pri tomto deji, sa vo viacerých prácach pokladá zmena tuhosti sústavy tesne pred dosiahnutím kritických otáčok. Námety na zrealizovanie zmeny tuhosti sú u jednotlivých autorov rozličné a aj podrobnosť, s akou sa celý tento dej sleduje, je u jednotlivých autorov rôzna .

Prof. Ing. Igor Ballo, DrSc., Ing. Rudolf Chmúrny, CSc.

Ústav materiálov a mechaniky strojov, Račianska 75, 831 02 Bratislava 2.

e-mail: ummsibal@savba.sk, ummschmu@savba.sk

Obmedziť výchylku pri ohybovom kmitaní rotora pri prechode cez kritické otáčky, možno aj inými spôsobmi. Možným riešením je aj zaradenie vhodného nelineárneho člena, obmedzujúceho deformáciu rotorovej sústavy. Takýmto prístupom sa zaoberal už V.A.Grobov v šesťdesiatych rokoch. Použil pri tom model, založený na Lavalovom rotore, s lineárnym a nelineárnym podoprením ložísk.

Dej, súvisiaci s prechodom rotora kritickými otáčkami, spravidla významne ovplyvňuje práve obmedzenosť výkonu pohonu. Základné efekty, ktoré pri tom môžu vzniknúť, analyzoval na zjednodušenom modeli Kononenko vo svojej známej práci. V súčasnosti sa vplyv obmedzenosti výkonu poháňajúceho zariadenia sleduje na zložitejších a tým možno realistickejších sústavách.

Dominantným zámerom tejto práce je vzájomne porovnať deje, ktoré prebehnú pri prechode cez kritické otáčky rotora podľa troch spomínaných postupov, pri uvážení obmedzenosti výkonu poháňajúceho stroja. Na rozdiel od väčšiny predošlých prác, budeme tento dej sledovať ako priestorový. Je to príprava na neskoršie sledovanie možných väzieb medzi kmitaním rotora vo vodorovnom a zvislom smere.

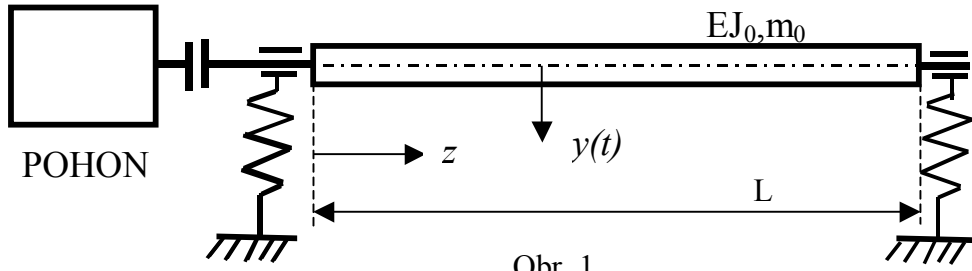
O rotore, ktorého chovanie sledujeme v tejto práci, budeme ďalej predpokladať, že je uložený v dvoch krátkych ložiskách, bez uvažovania hydrodynamických síl. Ložiská sú pružne podoprené v dvoch, navzájom kolmých smeroch nelineárnymi pružinami o rozdielnych tuhostných vlastnostiach. Predpokladá sa, že pri prechode cez kritické otáčky je možné lineárne meniť tuhosť uloženia ložísk a tým meniť aj modálne vlastnosti rotorovej sústavy. V práci sa ďalej berie do úvahy vonkajšie lineárne tlmenie, brzdiaci moment, úmerný otáčkam a obmedzený výkon poháňajúceho zariadenia.

Dôležitým krokom pri riešení matematického modelu je jeho diskretizácia. Podobne, ako v práci Ballu (1985) použijeme princíp metódy veľkých konečných prvkov, ktorý je založený na aproximácii priehybovej čiary rotujúceho hriadeľa, odlišnej od bežne používanej MKP. Takýto prístup zabezpečí zjednodušenie diskretizovaného nelineárneho matematického modelu, v ktorom sú oddelené matice, popisujúce tuhosť podoprení ložísk, ohybovú tuhosť rotora a rozloženie jeho hmotnosti. Riešenie matematického modelu sa uskutoční jednou z modifikácií metódy malého parametra (Mitropolskij).

V závere práce sa uvedú vybrané číselné výsledky a ich grafické znázornenie, spolu s ich zhodnotením a komentovaním.

2. Mechanický a matematický model

Mechanický model sledovanej sústavy je znázornený na obrázku č.1. Premenné, charakterizujúce prehnutie hriadeľa v nepohyblivej súradnej sústave sú $x(z,t)$ a $y(z,t)$, kde z je dĺžková súradnica v ose nedeformovaného hriadeľa a t je čas. Výchylky ľavého a pravého konca hriadeľa sú $x_0(t), y_0(t)$ a $x_L(t), y_L(t)$. Analogický význam v pohyblivej súradnej sústave, rotujúcej spolu s hriadeľom okolo osi z , majú premenné $\xi(z,t)$ a $\eta(z,t)$. Intenzita hmotnosti hriadeľa je m_0 a jeho ohybová tuhosť EJ_0 .



Obr. 1

Pohybové rovnice sformulujeme v pohyblivej súradnej sústave. Ohybovú deformáciu hriadeľa v dvoch kolmých smeroch budeme pritom aproximovať výrazmi (Ballo, 1998):

$$\xi(z, t) = X_{01}(z) \cdot \xi_0(t) + X_{02}(z) \cdot \xi_L(t) + \sum_{j=1}^n X_j(z) \cdot \Psi_j(t) \quad (1a)$$

$$\eta(z, t) = X_{01}(z) \cdot \eta_0(t) + X_{02}(z) \cdot \eta_L(t) + \sum_{j=1}^n X_j(z) \cdot \Theta_j(t) \quad (1b)$$

V rovniciach (1a,b) sú súradné funkcie X_{01}, X_{02} Hermitovské polynómy, umožňujúce splniť okrajové podmienky:

$$X_{01} = 1 - \frac{z}{L} \quad X_{02} = \frac{z}{L}, \quad (2a,b)$$

zatiaľ čo súradné funkcie X_j sú vlastné funkcie prste podopretého nosníka:

$$X_j = \sin\left(\frac{j\pi z}{L}\right) \quad j=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Ak neznáme časové funkcie z rovníc (1a,b) zoradíme do dvoch stĺpcových matic $\mathbf{w}_\xi, \mathbf{w}_\eta$, uhol pootočenia hriadeľa okolo osi z označíme symbolom φ , po vykonaní príslušných matematických operácií a úprav, dostaneme sústavu rovníc v maticovej forme:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}_\xi + \mathbf{K}_K \mathbf{w}_\xi = \mathbf{M}(\dot{\varphi}^2 \mathbf{w}_\xi + \dot{\varphi} \mathbf{w}_\eta + 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{w}}_\eta) + \mathbf{G} \cdot \sin \varphi + \mathbf{F}_x \cdot \cos \varphi + \mathbf{F}_y \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \mathbf{C} + \ddot{\varphi} \mathbf{S} \quad (4a)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}_\eta + \mathbf{K}_K \mathbf{w}_\eta = \mathbf{M}(\dot{\varphi}^2 \mathbf{w}_\eta - \dot{\varphi} \mathbf{w}_\xi - 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{w}}_\xi) + \mathbf{G} \cos \varphi - \mathbf{F}_x \cdot \sin \varphi + \mathbf{F}_y \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \mathbf{S} - \ddot{\varphi} \mathbf{C} \quad (4b)$$

V predošlých rovniciach je \mathbf{M} matica hmotnosti, \mathbf{K}_K matica ohybovej tuhosti samotného rotujúceho hriadeľa. Ich prvkami sú skalárne súčiny súradných funkcií, resp. skalárne súčiny ich druhých derivácií podľa dĺžkovej premennej z :

$$\mathbf{M} = m_0 [(X_i, X_j)] \quad \mathbf{K}_K = EJ_0 [(X_i'', X_j'')] \quad i, j=01, 02, 1, 2, \dots, n \quad (5a,b)$$

V rovniciach (4a,b) ďalej vystupuje stĺpcová matica zaťaženia vlastnou tiažou \mathbf{G} , stĺpcové matice $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$, vyjadrujúce účinok pružného podoprenia koncov hriadeľa a \mathbf{C}, \mathbf{S} , súvisiace s nevyváženosťou hriadeľa. Ich štruktúra je daná výrazmi:

$$\mathbf{G} = [(m_0 g, X_k)] \quad \mathbf{C} = [(\varepsilon_0 \cdot \cos \beta_0, X_k)] \quad \mathbf{S} = [(\varepsilon_0 \cdot \sin \beta_0, X_k)] \quad k=01, 02, 1, 2, \dots, n \quad (6a,b,c)$$

kde g je zemské zrýchlenie, ε_0 je vyosenie ťažiska prierezu hriadeľa vo vzdialenosti z od ľavého konca a β_0 je uhlová poloha tohto vyosenia. Štruktúra posledných dvoch vektorov je:

$$\mathbf{F}_x^T = [\alpha_{0x}x_0 + \beta_{0x}x_0^3, \alpha_{Lx}x_L + \beta_{Lx}x_L^3, 0, 0, \dots, 0] \quad (7a)$$

$$\mathbf{F}_y^T = [\alpha_{0y}y_0 + \beta_{0y}y_0^3, \alpha_{Ly}y_L + \beta_{Ly}y_L^3, 0, 0, \dots, 0] \quad (7b)$$

kde α_{ij}, β_{ij} ($i = 0, L$ $j = x, y$) sú konštanty. Po zavedení bezrozmerných konštánt γ_{ij}, δ_{ij} vzťahmi $\gamma_{ij} \cdot M_1 \lambda_1^2 = \alpha_{ij}$ $\delta_{ij} \frac{m_0 g L}{y_s^3} = \beta_{ij}$, kde λ_1 je vlastná uhlová frekvencia proste podopretého nosníka a M_1 je modálna hmotnosť, prislúchajúca k λ_1 . y_s je statické prehnutie proste podopretého nosníka pod vlastnou tiažou. Takto dostaneme:

$$\mathbf{F}_x^T = M_1 \lambda_1^2 [\gamma_{0x}x_0, \gamma_{Lx}x_L, 0, \dots, 0] + \mathbf{F}_{xN}^T \quad \mathbf{F}_y^T = M_1 \lambda_1^2 [\gamma_{0y}y_0, \gamma_{Ly}y_L, 0, \dots, 0] + \mathbf{F}_{yN}^T \quad (8a,b)$$

$$\mathbf{F}_{xN}^T = \frac{m_0 g L}{y_s^3} [\delta_{0x}x_0^3, \delta_{Lx}x_L^3, 0, \dots, 0] \quad \mathbf{F}_{yN}^T = \frac{m_0 g L}{y_s^3} [\delta_{0y}y_0^3, \delta_{Ly}y_L^3, 0, \dots, 0] \quad (8c,d)$$

Po pretransformovaní do stacionárneho súradného systému a po úprave dostaneme:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_K + \mathbf{K}_X) = \varepsilon \Psi_X \quad (9a)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K}_K + \mathbf{K}_Y) = \varepsilon \Psi_Y \quad (9b)$$

Matice $\mathbf{K}_X, \mathbf{K}_Y$ v predošlých rovniciach obsahujú údaje o lineárnych častiach tuhostí podoprenia ložísk. Ich štruktúra je daná rovnicami:

$$\mathbf{K}_X = M_1 \lambda_1^2 \begin{bmatrix} \gamma_{0x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_{Lx} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_Y = M_1 \lambda_1^2 \begin{bmatrix} \gamma_{0y} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_{Ly} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (10a,b)$$

Rovnice (9a,b) sú upravené do tvaru, ktorý rešpektuje neskoršie aplikovanie metódy malého parametra. Použitie tejto metódy predpokladá existenciu tzv. nerozrušenej sústavy, na ktorú pôsobia malé rušiacie členy. V tejto práci sme pokladali za nerozrušenú lineárnu netlmenú sústavu s nerovnakými lineárnymi časťami tuhostí podopretí koncov hriadeľa v dvoch kolmých smeroch. Rušiacie členy obsahujú vektory $\varepsilon \Psi_X, \varepsilon \Psi_Y$, kde ε je malý parameter. Štruktúra týchto vektorov je nasledujúca:

$$\varepsilon \Psi_X = -\mathbf{F}_{xN} + \dot{\varphi}^2 (\mathbf{C} \cos \varphi - \mathbf{S} \sin \varphi) + \ddot{\varphi} (\mathbf{S} \cos \varphi + \mathbf{C} \sin \varphi) - \frac{b}{m_0} \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} \quad (11a)$$

$$\varepsilon \Psi_Y = -\mathbf{F}_{yN} + \dot{\varphi}^2 (\mathbf{S} \cos \varphi + \mathbf{C} \sin \varphi) + \ddot{\varphi} (-\mathbf{C} \cos \varphi + \mathbf{S} \sin \varphi) - \frac{b}{m_0} \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G} \quad (11b)$$

Podľa zásad teórie malého parametra riešenie rovníc (9a,b) vychádza zo všeobecného riešenia nerozrušenej ($\varepsilon = 0$) sústavy. V okolí 1. vlastnej uhlovej frekvencie v oboch kolmých smeroch ω_{0x}, ω_{0y} , bude:

$$\mathbf{x} = \mathbf{w}_{0x} \cdot a_R \cdot \cos \psi_R \quad \mathbf{y} = -\mathbf{w}_{0y} \cdot a_I \cdot \sin \psi_I \quad (12a,b)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{w}_{0x} \cdot a_R \omega_{0x} \cdot \sin \psi_R \quad \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{w}_{0y} \cdot a_I \omega_{0y} \cdot \cos \psi_I \quad (12c,d)$$

$$\psi_R = \varphi + \vartheta_R \quad \psi_I = \varphi + \vartheta_I \quad (12e,f)$$

V rovniciach (12) sú $\mathbf{w}_{0x}, \mathbf{w}_{0y}$ vlastné vektory, prislúchajúce k vlastným uhlovým frekvenciám ω_{0x}, ω_{0y} , ku ktorým sa vzťahujú aj modálne hmotnosti M_{1x}, M_{1y} . V

nerozrušenej sústave sú $a_R, a_I, \vartheta_R, \vartheta_I$ integračné konštanty, v rozrušenej ($\varepsilon \neq 0$) sú to funkcie času. Ak budeme pokladať rovnice (12) za transformačné vzťahy pre prechod na nové premenné funkcie času $a_R, a_I, \vartheta_R, \vartheta_I$, potom po úpravách dostaneme rovnice pre ich výpočet v štandardnom tvare (Mitropolskij):

$$-\dot{a}_R = \frac{1}{M_{1x}\omega_{0x}} \mathbf{w}_{0x}^T \cdot \varepsilon \Psi_X \cdot \sin \psi_R \quad (13a)$$

$$-\dot{a}_I = \frac{1}{M_{1y}\omega_{0y}} \mathbf{w}_{0y}^T \cdot \varepsilon \Psi_Y \cdot \cos \psi_I \quad (13b)$$

$$-a_R \dot{\vartheta}_R = a_R (\omega - \omega_{0x}) + \frac{1}{M_{1x}\omega_{0x}} \mathbf{w}_{0x}^T \cdot \varepsilon \Psi_X \cdot \cos \psi_R \quad (13c)$$

$$+ a_I \dot{\vartheta}_I = a_I (\omega_{0y} - \omega) + \frac{1}{M_{1y}\omega_{0y}} \mathbf{w}_{0y}^T \cdot \varepsilon \Psi_Y \cdot \sin \psi_I \quad (13d)$$

Ďalej treba sformulovať rovnicu pre časový priebeh ω . Z rovnováhy momentov, pôsobiacich na rotor k ose z dostaneme:

$$I\ddot{\varphi} = [L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})] + \dot{\mathbf{x}}^T [\mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{C}\sin\varphi + \mathbf{S}\cos\varphi] - \dot{\mathbf{y}}^T [\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{C}\cos\varphi - \mathbf{S}\sin\varphi] + \varphi^2 [\mathbf{y}^T (-\mathbf{C}\cos\varphi + \mathbf{S}\sin\varphi) + \mathbf{x}^T (\mathbf{C}\sin\varphi + \mathbf{S}\cos\varphi)] + \mathbf{x}^T \mathbf{G} \quad (14)$$

kde $L(\dot{\varphi})$ je poháňajúci moment a $H(\dot{\varphi})$ je moment, brzdiaci otáčavý pohyb rotora.

Pre ďalšie spracovanie treba do rovnice (14) dosadiť predpokladané riešenie (12) a (13). Pritom budeme brať do úvahy iba členy, úmerné 1. mocnine malého parametra ε . Príslušná rovnica bude:

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} = & [L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})] + M_{1xy}\omega_{0x}^2 a_R a_I \cos\psi_R \sin\psi_I - \frac{M_{1xy}}{M_{1x}} a_I \mathbf{w}_{0x}^T \varepsilon \Psi_X \sin\psi_I - \\ & - M_{1xy}\omega_{0y}^2 a_R a_I \cos\psi_R \sin\psi_I - \frac{M_{1xy}}{M_{1y}} a_R \mathbf{w}_{0y}^T \varepsilon \Psi_Y \cos\psi_R + \mathbf{w}_{0x}^T \mathbf{G} a_R \cos\psi_R + \\ & + \varphi^2 \left\{ \mathbf{w}_{0y}^T a_I \sin\psi_I (\mathbf{C}\cos\varphi - \mathbf{S}\sin\varphi) + \mathbf{w}_{0x}^T a_R \cos\psi_R (\mathbf{C}\sin\varphi + \mathbf{S}\cos\varphi) \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

V rovnici (15) sme zaviedli označenie $\mathbf{w}_{0x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}_{0y} = M_{1xy}$

Sústavu rovníc pre výpočet neznámych funkcií času $a_R, a_I, \vartheta_R, \vartheta_I, \dot{\varphi} \equiv \omega$ v prvom priblížení dostaneme, ak jednotlivé členy v rovniciach (13a,b,c,d) a (15) spriemerujeme podľa javne vystupujúceho času (Mitropolskij) Výsledkom je sústava piatich rovníc:

$$-\dot{a}_R = \frac{\omega^2}{M_{1x}\omega_{0x}} \left[\mathbf{w}_{0x}^T (\mathbf{C}\sin\vartheta_R - \mathbf{S}\cos\vartheta_R) \right] + \frac{b}{m_0} a_R \quad (16a)$$

$$-\dot{a}_I = \frac{\omega^2}{M_{1y}\omega_{0y}} \left[\mathbf{w}_{0y}^T (\mathbf{S}\cos\vartheta_I - \mathbf{C}\sin\vartheta_I) \right] + \frac{b}{m_0} a_I \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} -a_R \dot{\vartheta}_R = & a_R (\omega - \omega_{0x}) - \frac{3}{4M_{1x}\omega_{0x}} \left(w_{0x1}^4 \beta_{0x} + w_{0x2}^4 \beta_{Lx} \right) a_R^3 + \\ & + \frac{\omega^2}{M_{1x}\omega_{0x}} \left[\mathbf{w}_{0x}^T (\mathbf{C}\cos\vartheta_R + \mathbf{S}\sin\vartheta_R) \right] \quad (16c) \end{aligned}$$

$$i+a_I\dot{\vartheta}_I = a_I(\omega_{0y} - \omega) + \frac{3}{4M_{1y}\omega_{0y}}(w_{0y1}^4\beta_{0y} + w_{0y2}^4\beta_{Ly})a_i^3 + \frac{\omega^2}{M_{1y}\omega_{0y}}[\mathbf{w}_{0y}^T(\mathbf{S}\sin\vartheta_I + \mathbf{C}\cos\vartheta_I)] \quad (16d)$$

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} = & [L(\omega) - H(\omega)] + M_{1xy}(\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2)a_R a_I \sin(\vartheta_I - \vartheta_R) + \\ & + \frac{3M_{1xy}}{4M_{1x}}(w_{0x1}^4\beta_{0x} + w_{0x2}^4\beta_{Lx})a_R^3 a_I \sin(\vartheta_I - \vartheta_R) - \\ & - \frac{3M_{1xy}}{4M_{1y}}(w_{0y1}^4\beta_{0y} + w_{0y2}^4\beta_{Ly})a_R a_I^3 \sin(\vartheta_I - \vartheta_R) - \\ & - \frac{b}{m_0}M_{1xy}a_R a_I [\omega_{0x} \cos(\vartheta_I - \vartheta_R) + \omega_{0y} \cos(\vartheta_I + \vartheta_R)] + \\ & + \omega^2 \left\{ \mathbf{w}_{0x}^T \left[\frac{M_{1xy}}{M_{1x}} a_I (\mathbf{S}\cos\vartheta_I - \mathbf{C}\sin\vartheta_I) + a_R (\mathbf{S}\cos\vartheta_R - \mathbf{C}\sin\vartheta_R) \right] + \right. \\ & \left. i + \mathbf{w}_{0y}^T \left[\frac{M_{1xy}}{M_{1y}} a_R (\mathbf{C}\sin\vartheta_R - \mathbf{S}\cos\vartheta_R) + a_I (\mathbf{C}\sin\vartheta_I - \mathbf{S}\cos\vartheta_I) \right] \right\} \quad (16e) \end{aligned}$$

V rovniciach (16c,d,e) vystupujú veličiny $w_{0x1}, w_{0x2}, w_{0y1}, w_{0y2}$. Sú to 1. a 2. prvky vektorov $\mathbf{w}_{0x}, \mathbf{w}_{0y}$. Hľadané funkcie času $a_R, a_I, \vartheta_R, \vartheta_I, \dot{\varphi} \equiv \omega$ sme získali numerickou integráciou predošlých rovníc (16a,b,c,d,e).

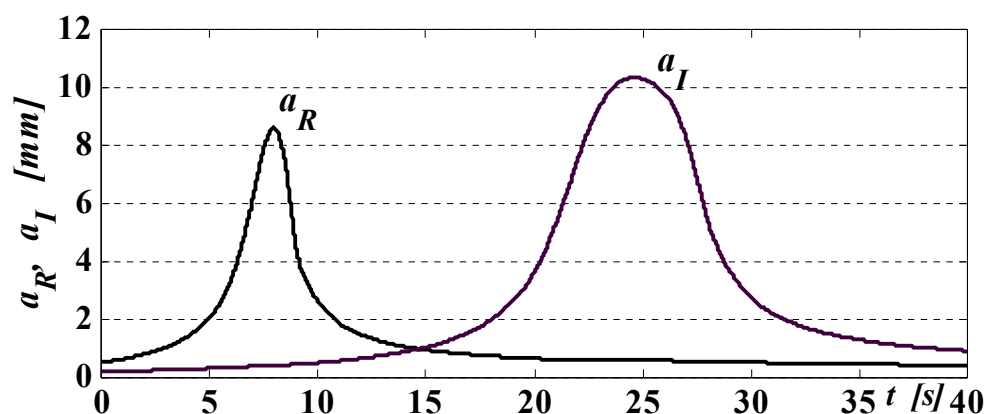
3. Režim prechodu rotora cez kritické otáčky zmenou tuhosti podoprení

Jedným zo spomínaných spôsobov, ako znížiť maximálnu výchylku rotora pri prechode cez kritické otáčky, je zníženie tuhosti podoprení tesne pred dosiahnutím kritických otáčok. V tejto časti práce zostavíme rovnice, ktoré popisujú zmenu lineárnej časti tuhosti podoprení konečnou, danou rýchlosťou. Samotný prechodový dej, ktorý pri tom nastane, budeme sledovať v ďalšej časti.

Pre definíciu zmien pomerných tuhostí γ_{ij} sú určujúce nasledujúce údaje. Jednak je to uhlová rýchlosť otáčania rotora ω_{xz}, ω_{yz} , kedy sa začne meniť tuhosť podoprenia v smere x a y, podobne ω_{xk}, ω_{yk} , udáva koniec zmeny v oboch smeroch. Ďalej γ_{ijz} je začiatková hodnota tuhostí a γ_{ijk} konečná hodnota. Pre názornosť zavedieme ešte pomer týchto hodnôt $q\gamma_{ij} = \gamma_{ijk} / \gamma_{ijz}$ ($i = 0, L; j = x, y$).

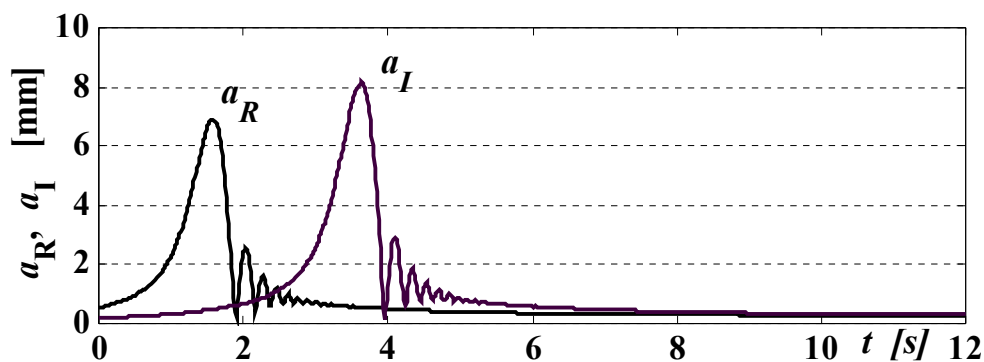
4. Číselné výsledky

Výsledky, ktoré vznikli číselným riešením rovníc (16), sú znázornené priebehom amplitúd a_R, a_I v závislosti na čase pri prechode kritickými otáčkami. Na obrázku č. 2 sú znázornené oba priebehy pri podoprení rotora lineárnymi ($\delta_{ij} = 0$) pružinami ($\gamma_{0x} = \gamma_{Lx} = 1; \gamma_{0y} = \gamma_{Ly} = 2$) pri hodnote poháňajúcom momentu, ktorý práve zabezpečoval prechod cez kritické otáčky ($L_0 = 1,9 \text{ Nm}$).



Obr. 2

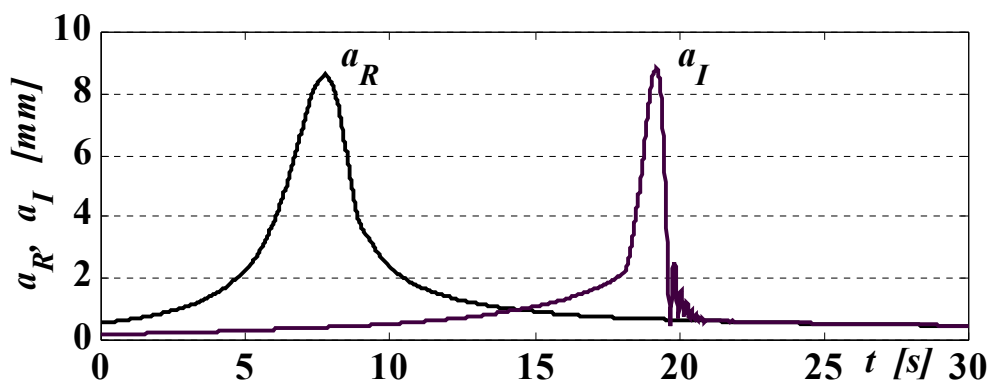
V nasledujúcom obrázku sa nastavené parametre nemenili. Vzástol iba poháňajúci moment ($L_0 = 5,0$ Nm).



Obr. 3

Vidieť, že zvýšením poháňajúceho momentu poklesli hodnoty oboch amplitúd a výrazne sa skrátilo trvanie prechodového deja.

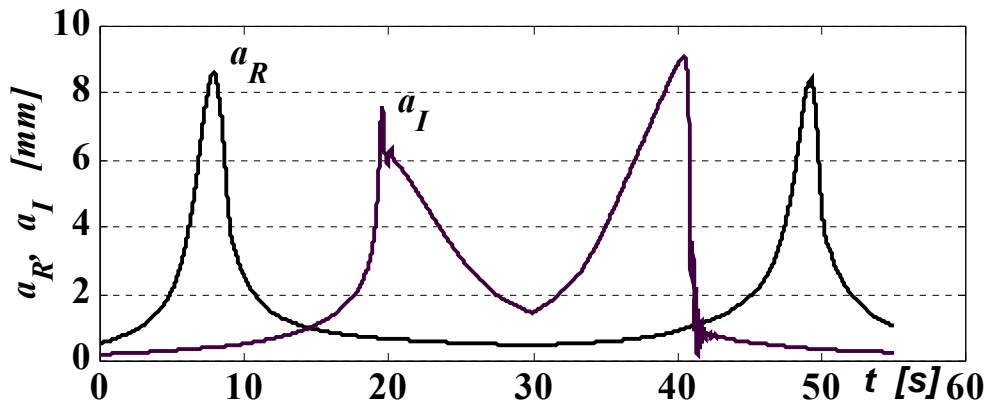
V nasledujúcich priebehoch sa vrátíme k minimálnej hodnote poháňajúceho momentu ($L_0 = 1.9$ Nm), zato však pri dosiahnutí otáčok rotora, rovné 0.97 prvej vlastnej frekvencie vo zvislom smere, sa začne meniť tuhosť podoprení oboch koncov rotora vo zvislom smere a skončí sa, ak otáčky dosiahnu hodnotu 0.99 tejto vlastnej frekvencie. Tuhosť sa pri tom zmení na 1/2 pôvodnej hodnoty.



Obr. 4

V porovnaní s priebehom na obr. 2, sa amplitúda vo zvislo smere výrazne znížila a prechodový dej sa významne skrátil. Obe hodnoty značne závisia od voľby začiatku a konca preladovania a od hodnoty konečnej tuhosti uloženia.

Konečne na poslednom obrázku je znázornený priebeh pri minimálnom poháňajúcom momente ($L_0 = 1.9 \text{ Nm}$) a rovnakom nastavení parametrov, ako pri priebehu na obr. č.2, iba do oboch pružín pre zvislé podoprenie bol pridaný nelineárny člen s degresívnou charakteristikou ($\delta_{0y} = \delta_{Ly} = -0.004$). Na rozdiel od predošlých priebehov, je na tomto obrázku znázornený nielen prechodový dej pri rozbehu, ale aj dej, ktorý vznikne pri vypnutí poháňajúceho momentu v okamžiku dosiahnutia prevádzkových otáčok a dobehu rotora.



Obr. 5

Z obrázku vidieť, že hodnota amplitúdy a_I pri rozbehu mala najnižšiu hodnotu zo všetkých troch uvažovaných spôsobov a aj jej zvýšenie pri dobehu nebolo nijak dramatické a bolo porovnateľné s predošlými priebehmi. Výrazne sa iba predĺžilo trvanie prechodového deja.

5. Záver

Výsledky, uvedené v práci, ktoré sa získali pomocou matematického modelovania, umožňujú porovnať základné vlastnosti prechodových dejov pri prechode cez kritické otáčky pružného rotora jedným z troch uvažovaných spôsobov prechodu.

6. Literatúra

- Ballo I. (1985) Beam element in solving flexural vibrations by the Large Finite Element Method (LFEM) (in slovak). *Journal of Mechanical Engineering (Strojnícky časopis)* **36**, 401-412.
- Ballo I. (1998) . Non-Linear Effects of Vibration of a Continuous Transverse Cracked Slender Shaft. *Journal of Sound and Vibration* **217(2)** 321-333.
- Gasch R. & Markert R. & Pfützner H. (1979) Acceleration of Unbalanced Flexible Shafts Through the Critical Speed. *Journal of Sound and Vibration* **63** 393-409.
- Grobov V.A. (1961) Asymptotic Methods for the Analysis of Flexural Vibration of Turbine Rotors (in russian). *Izdatelstvo Akademii Nauk, Moscow*.
- Kononenko V.O. (1964) Vibrational Systems with Limited Excitation (in russian). *Izdatelstvo Nauka, Moscow*.
- Markert R. & Pfützner H. & Gasch R. (1980) Mindestantriebsmoment zur Resonanz-durchfahrt von unwuchtigen elastischen Rotoren. *Forschung Ingenieur-Wesen* **46**, 33-46.
- Mitropolskij Ju.A. (1964) The Problems of Asymtotic Theory of Nonstationary Vibrations (in russian). *Izdatelstvo Nauka, Moscow*.

Wauer J. & Suherman S. (1998) Vibration Suppression of Rotating Shafts Passing Through Resonances by Switching Shaft Stiffness, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics* **120**, January 1998, 170-180.