

## INFLUENCE OF CROSS-COUPPLING ON AIRCRAFT DYNAMIC STABILITY

V. Daněk\*

**Summary:** *The stability of the asymmetric flight regimes, where the couplings between longitudinal and lateral aerodynamic characteristics are significantly influencing each other, is investigated here. The system matrix is enlarged by the coupling matrixes. In the coupling matrixes and basic matrixes, the influence of the roll angle and the sideslip angle is included. The built-up computational model was applied for investigating the dynamic stability with six degrees of freedom at the real aeroplane, where the mutual strong aerodynamic couplings of longitudinal and lateral-directional motions, caused by the interference between wing and fuselage, were demonstrated by the results from the tunnel tests. The influence of propeller and engine rotate parts of gyroscopic effect is ignored.*

### 1. Úvod

Při zkoumání dynamické stability letounu se běžně využívá skutečnosti, že úplný pohyb letounu lze rozdělit (separovat) na podélný pohyb a stranový pohyb (Etkin, Reid, 1996). To je přijatelné pro klasický letoun s jednou rovinou souměrnosti (x,z) a uvažováním absolutně tuhého letounu. Pak lze každý z těchto pohybů řešit samostatně, přičemž se berou v úvahu vždy jen tři odpovídající stupně volnosti. Pro podélný pohyb dva stupně volnosti v translaci ve směru os x,z a jeden stupeň volnosti v rotaci kolem osy y. V případě stranového pohybu to jsou dva stupně volnosti v rotaci kolem os x,z a jeden stupeň volnosti v translaci ve směru osy y. Tímto způsobem lze řešit podélnou i dynamickou stabilitu libovolného symetrického ustáleného přímočarého letu. Řešení je schůdné pouze uplatněním metody malých poruch a linearizace pohybových rovnic letounu. Tento přístup nám neumožňuje řešit více stupňů volnosti, aniž bychom uvažili vzájemné vazby podélného a stranového pohybu letounu. U reálného letounu tyto vazby, vždy ve větší, či menší míře existují. Běžně je však zanedbáváme. Tím se však omezujeme pouze na zkoumání stability symetrických referenčních režimů letu. Je věcí diskuse a dalšího zkoumání do jaké míry je samotná linearizace ještě fyzikálně přípustná. V reálném letu mohou být poruchy větší než tzv. malé a je otázkou kam až sahá velikost malé poruchy.

Chceme-li zkoumat stabilitu letounu v jiných než symetrických režimech letu, nelze již obecně zanedbávat vliv vzájemných vazeb. V těchto režimech letu se již mohou

---

\* Doc.Ing.Vladimír Daněk,CSc.: Letecký ústav, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně;Technická 2896/2, 616 69 Brno; tel.+420-541142229, fax+420-541142879, e-mail: danek@lu.fme.vutbr.cz

významněji projevit změny některých podélných aerodynamických charakteristik na úhlu vybočení a naopak některých stranových aerodynamických charakteristik na úhlu náběhu. Míra vlivu těchto vazeb je závislá hlavně na vzájemné poloze křídlo-trup (hornoplošník versus dolnoplošník). Mimo aerodynamických vazeb se však mohou uplatnit i další vazby propulsní a hmotnostní (inerční).

V předkládaném článku je pojednáno o rozšíření pohybových rovnic absolutně tuhého letounu o aerodynamické vazby pro řešení obecnějších režimů letu. Je zahrnut vliv příčného sklonu a úhlu vybočení. Vliv úhlu vybočení a příčného sklonu na charakteristiky dynamické stability je zkoumán konkrétně pro malý dopravní letoun určený pro regionální leteckou dopravu. Do úvahy jsou zahrnuty pouze aerodynamické vazby, které bylo možno získat z výsledků měření daného letounu v aerodynamickém tunelu.

## 2. Použitá označení

A	(1)	štíhlost křídla
b	(m)	rozpětí křídla
$c_A$	(m)	hloubka střední aerodynamické tětiny křídla
$C_L, C_D, C_m$	(1)	součinitele vztlaku, odporu a klopivého momentu
$C_G$	(1)	součinitel tíhové síly
D	(N)	aerodynamický odpor letounu
e	(1)	Oswaldův koeficient aerodynamické účinnosti letounu
G	(N)	tíha letounu
H	(m)	geopotenciální výška
$I_x, I_y, I_z$	( $\text{kgm}^2$ )	momenty setrvačnosti k podélné, bočné a kolmé ose letounu
$I_{xz}$	( $\text{kgm}^2$ )	deviační moment letounu
$l_{VOP}$	(m)	rameno vodorovných ocasních ploch
$l_{SOP}$	(m)	rameno svislých ocasních ploch
L	(N)	vztlak letounu
L, M, N	(Nm)	klonivý moment, klopivý moment a zatáčivý moment
m	(kg)	hmotnost letounu
p, q, r	(rad/s)	úhlové rychlosti v klonění, klopení a zatáčení
S	( $\text{m}^2$ )	plocha křídla
$S_{VOP}$	( $\text{m}^2$ )	plocha vodorovných ocasních ploch
$S_{SOP}$	( $\text{m}^2$ )	plocha svislých ocasních ploch
T	(s)	perioda kmitání
t	(s)	čas
$t_{1/2}$	(s)	čas potřebný na útlum odchylky na jednu polovinu
$t_2$	(s)	čas potřebný na zdvojnásobení odchylky
u, v, w	(m/s)	odchylky složek lineární rychlosti ve směru os letounu x,y,z
$V_R$	(m/s)	rychlost letu v referenčním režimu letu
X, Y, Z	(N)	složky výsledné aerodynamické síly letadla
$\bar{x}_T$	(1)	poloha těžiště letounu (centráž)
$\alpha$	(°)	úhel náběhu
$\beta$	(°)	úhel vybočení letounu
$\lambda$	(1/s)	kořen charakteristické rovnice ( $\lambda = \delta + i\omega$ )
$\rho$	( $\text{kg/m}^3$ )	hustota vzduchu
$\Theta$	(°)	podélný sklon letounu
$\Phi$	(°)	příčný sklon letounu

$(\ )_{VOP}$	index „VOP“ označuje vodorovné ocasní plochy
$(\ )_R$	index „R“ označuje veličiny v referenčním režimu letu
$(\ )_{SOP}$	index „SOP“ označuje svislé ocasní plochy
$\{x\}$	stavový vektor odchylek po poruše režimu letu
$\{u\}$	vektor řídicích veličin
$X_y = dX/dy$	zkrácený zápis derivací.

### 3. Výpočtový model

Pro řešení dynamické stability letounu se šesti stupni volnosti byl odvozen modifikovaný výpočtový model. Modifikace spočívala v úpravách úplných pohybových rovnic absolutně tuhého letounu na linearizované odchylkové rovnice ve stabilitní souřadnicové soustavě. Byly zanedbány aéroinertní vazby a zanedbán vliv stlačitelnosti vzduchu na aerodynamické stabilitní derivace letounu. Použitý matematický model můžeme zapsat v obecné maticové podobě takto

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad , \quad (1)$$

kde matice  $A$  je matice soustavy tvořená prvky, které zahrnují kombinace aerodynamických stabilitních derivací a dalších parametrů letounu. Vektor  $x$  je vektor stavových veličin. Pro řešení úplné dynamické stability letounu byla matice  $A$  odvozena ve tvaru:

$$[A] = \begin{bmatrix} [P] & [Q] \\ [R] & [S] \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Matice soustavy s uvážením šesti stupňů volnosti je oproti oddělenému řešení podélné a stranové dynamické stability (Daněk, 2000) rozšířena o vazební matice  $Q$  a  $R$ . Vazební matice vyjadřují vliv stranových kinematických veličin na podélný pohyb a vliv podélných kinematických veličin na stranové pohyby. V tomto výpočtovém modelu je zanedbán vliv gyroskopických účinků vrtulí a rotujících částí motorů. Příslušné prvky vazebních matic v obecném případě obsahují „křížové“ aerodynamické stabilitní derivace  $C_{x\beta}, C_{z\beta}, C_{m\beta}, C_{y\alpha}, C_{l\alpha}, C_{n\alpha}$ . V obou vazebních maticích i v základních maticích je zahrnut vliv úhlu podélného sklonu a příčného sklonu, stejně tak úhlu vybočení v referenčním režimu letu, jehož stabilita se zkoumá. Tvary zmíněných submatic jsou následující:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} V_{xR} & 0 & -g \cos \Theta_R \\ \frac{Z_u}{(m-Z_w)V_{xR}} & \frac{Z_w}{m-Z_w} & \frac{(Z_q/V_{xR} + m)}{m-Z_w} & -\frac{mg \sin \Theta_R \cos \Phi_R}{V_{xR}(m-Z_w)} \\ \frac{1}{I_y} \left[ M_u + \frac{M_w Z_u}{m-Z_w} \right] & \frac{V_{xR}}{I_y} \left[ M_w + \frac{M_w Z_w}{m-Z_w} \right] & \frac{1}{I_y} \left[ M_q + \frac{M_w (Z_q + mV_{xR})}{m-Z_w} \right] & -\frac{M_w mg \sin \Theta_R \cos \Phi_R}{I_y (m-Z_w)} \\ 0 & 0 & \cos \Phi_R & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[Q]=\begin{bmatrix} \frac{X_v}{m}V_{xR} & 0 & V_{yR} & 0 \\ \frac{Z_v}{m-Z_{\dot{w}}} & -\frac{mV_{yR}}{V_{xR}(m-Z_{\dot{w}})} & 0 & -\frac{mg\cos\Theta_R\sin\Phi_R}{V_{xR}(m-Z_{\dot{w}})} \\ \frac{V_{xR}}{I_y}\left[M_v+\frac{M_{\dot{w}}Z_v}{m-Z_{\dot{w}}}\right] & -\frac{M_{\dot{w}}mV_{yR}}{I_y(m-Z_{\dot{w}})} & 0 & -\frac{M_{\dot{w}}mg\cos\Theta_R\sin\Phi_R}{I_y(m-Z_{\dot{w}})} \\ 0 & 0 & -\sin\Phi_R & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[R]=\begin{bmatrix} \frac{Y_u}{mV_{xR}} & \frac{Y_w}{m} & 0 & -\frac{g\sin\Theta_R\sin\Phi_R}{V_{xR}} \\ 0 & \frac{I_zL_w+I_{xz}N_w}{I_xI_z-I_{xz}^2}V_{xR} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_xN_w+I_{xz}L_w}{I_xI_z-I_{xz}^2}V_{xR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & tg\Theta_R\sin\Phi_R & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[S]=\begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{mV_{xR}} & \left(\frac{Y_r}{mV_{xR}}-1\right) & \frac{g\cos\Theta_R\cos\Phi_R}{V_{xR}} \\ \frac{I_zL_v+I_{xz}N_v}{I_xI_z-I_{xz}^2}V_{xR} & \frac{I_zL_p+I_{xz}N_p}{I_xI_z-I_{xz}^2} & \frac{I_zL_r+I_{xz}N_r}{I_xI_z-I_{xz}^2} & 0 \\ \frac{I_xN_v+I_{xz}L_v}{I_xI_z-I_{xz}^2}V_{xR} & \frac{I_xN_p+I_{xz}L_p}{I_xI_z-I_{xz}^2} & \frac{I_xN_r+I_{xz}L_r}{I_xI_z-I_{xz}^2} & 0 \\ 0 & 1 & tg\Theta_R\cos\Phi_R & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Stavový vektor  $\mathbf{x}$  obsahuje následující kinematické letové veličiny:

$$\{x\}=[u, \Delta\alpha, q, \Delta\Theta, \Delta\beta, p, r, \Delta\Phi]^T \quad (7)$$

V obecném případě, matice  $\mathbf{B}$  je matice řízení a vektor  $\mathbf{u}$  je vektor řídicích veličin. Jelikož v našem případě jde o řešení stability s pevným řízením, pak vektor odchylek orgánů řízení je nulový a druhý člen v rovnici (1) odpadne. Matici řízení  $\mathbf{B}$  pro stabilitní problém není třeba uvažovat. Rozměrové aerodynamické stabilitní derivace, použité v matici  $\mathbf{A}$ , jsou pro referenční režim letu, jehož stabilitu zkoumáme, definovány následujícími vztahy:

$$\begin{aligned} X_u &= C_{Xu}\rho V_R S/2 + C_{GR}\rho V_R S \sin\Theta_R & X_v &= C_{x\beta}\rho V_R S/2 \\ X_w &= C_{X\alpha}\rho V_R S/2 & X_q &= C_{xq}\rho V_R S c_A/4 \\ X_{\dot{w}} &= C_{X\dot{\alpha}}\rho S c_A/4 & Y_v &= C_{y\beta}\rho V_R S/2 \\ Y_p &= C_{yp}\rho V_R S b/4 & Y_r &= C_{yr}\rho V_R S b/4 \\ Z_u &= C_{Zu}\rho V_R S/2 - C_{GR}\rho V_R S \cos\Theta_R & Z_v &= C_{z\beta}\rho V_R S/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_w &= C_{Z\alpha} \rho V_R S / 2 & Z_q &= C_{Zq} \rho V_R S c_A / 4 \\
Z_{\dot{w}} &= C_{Z\dot{\alpha}} \rho S c_A / 4 & L_v &= C_{l\beta} \rho V_R S b / 2 \\
L_p &= C_{lp} \rho V_R S b^2 / 4 & L_r &= C_{lr} \rho V_R S b^2 / 4 \\
M_u &= C_{mu} \rho V_R S c_A / 2 & M_v &= C_{m\beta} \rho V_R S c_A / 2 \\
M_w &= C_{m\alpha} \rho V_R S c_A / 2 & M_q &= C_{mq} \rho V_R S c_A^2 / 4 \\
M_{\dot{w}} &= C_{m\dot{\alpha}} \rho S c_A^2 / 4 & N_v &= C_{n\beta} \rho V_R S b / 2 \\
N_p &= C_{np} \rho V_R S b^2 / 4 & N_r &= C_{nr} \rho V_R S b^2 / 4
\end{aligned} \tag{8}$$

#### 4. Aplikace

Sestavený výpočtový model byl aplikován na zkoumání dynamické stability se šesti stupni volnosti na reálném letounu, u něhož výsledky tunelových měření ukázaly významné vzájemné aerodynamické vazby podélného a stranového pohybu v důsledku interference mezi křídlem a trupem. Jedná se o dvoumotorový letoun hornoplošné konfigurace, určený pro regionální dopravu. Při řešení vlivu vzájemných vazeb na dynamickou stabilitu nesymetrických režimů letu byl pro daný letoun uplatněn pouze vliv změny součinitele klopivého momentu, součinitele vztlaku a součinitele odporu letounu s úhlem vybočení. Z výsledků tunelových měření, uvedených v Mertl (1987), byly výše zmíněné závislosti aproximovány jednoduchými polynomy ve tvaru:

$$\begin{aligned}
C_L &= -0,65656\beta^2 + 0,0497 \\
C_D &= -0,32828\beta^2 + 0,0837 \\
C_m &= -1,64140\beta^2 + 0,0460
\end{aligned} \tag{9}$$

Vztahy platí pro úhel vybočení  $\beta$  v [rad]. Potřebné stabilitní derivace byly stanoveny pomocí programového systému AAA (Roskam, 2001) pro níže uvedené základní geometrické a hmotnostní parametry letounu:

$$\begin{array}{llll}
b = 25,6 \text{ m} & S = 56 \text{ m}^2 & S_{VOP} = 13,5 \text{ m}^2 & S_{SOP} = 15,29 \text{ m}^2 \\
l_{VOP} = 11,512 \text{ m} & l_{SOP} = 10,083 \text{ m} & c_A = 2,269 \text{ m} & \bar{x}_T = 0,30 \text{ (1)} \\
m = 15\,100 \text{ kg} & I_x = 142\,501 \text{ kgm}^2 & I_y = 230\,824 \text{ kgm}^2 & I_z = 377\,558 \text{ kgm}^2.
\end{array}$$

Pro početní odhad aerodynamických charakteristik letounu byla použita analytická náhradní polára ve tvaru

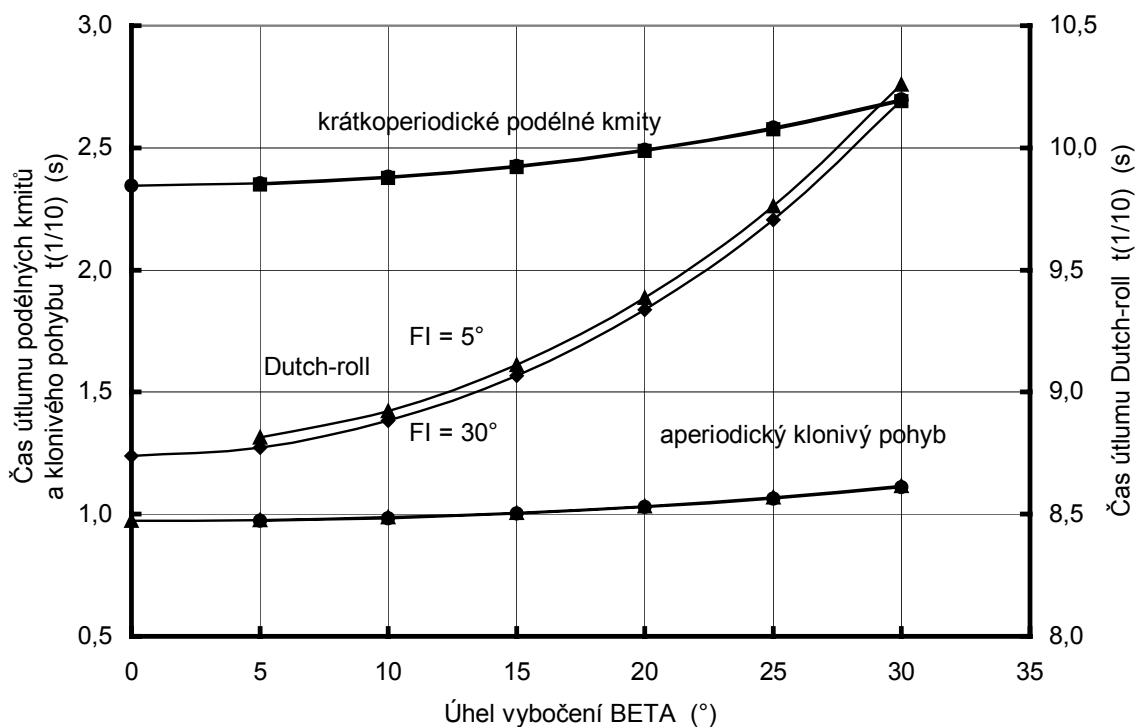
$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi A e}, \tag{10}$$

kde  $C_{D0} = 0,0375$  (1),  $e = 0,751$  (1),  $A = 11,703$  (1).

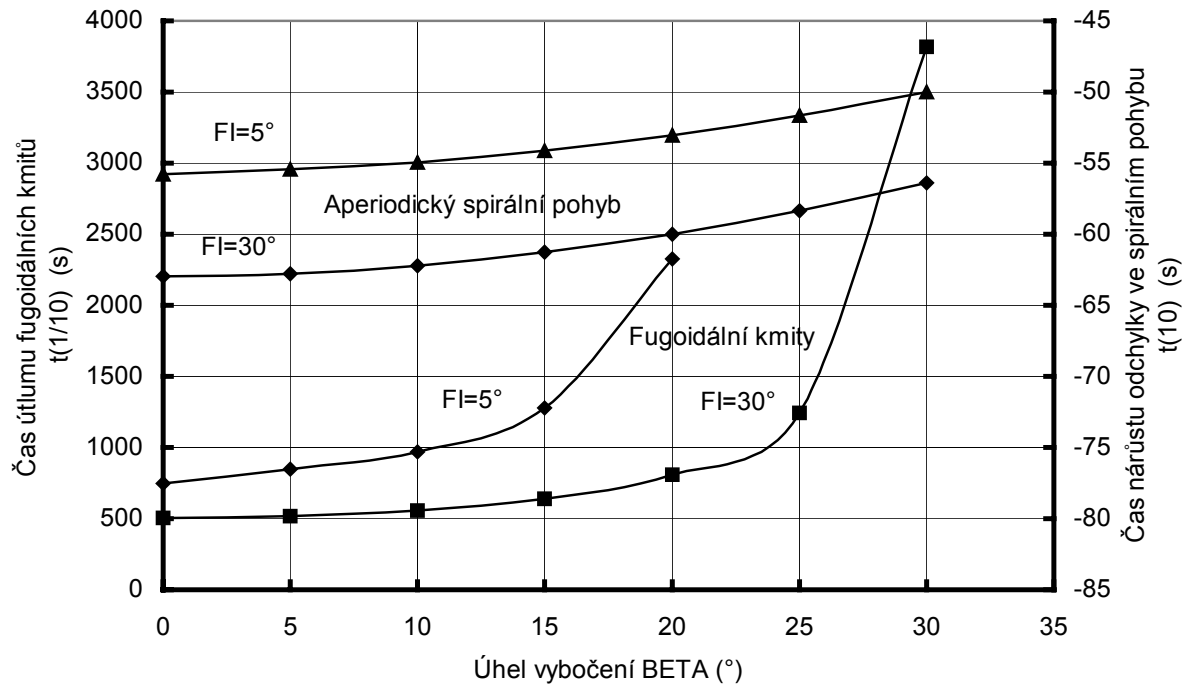
#### 5. Výsledky řešení

Cílem řešení bylo posoudit vliv úhlu vybočení a příčného sklonu na charakteristiky dynamické stability, jako jsou časy útlumu amplitudy na jednu polovinu, resp. na jednu

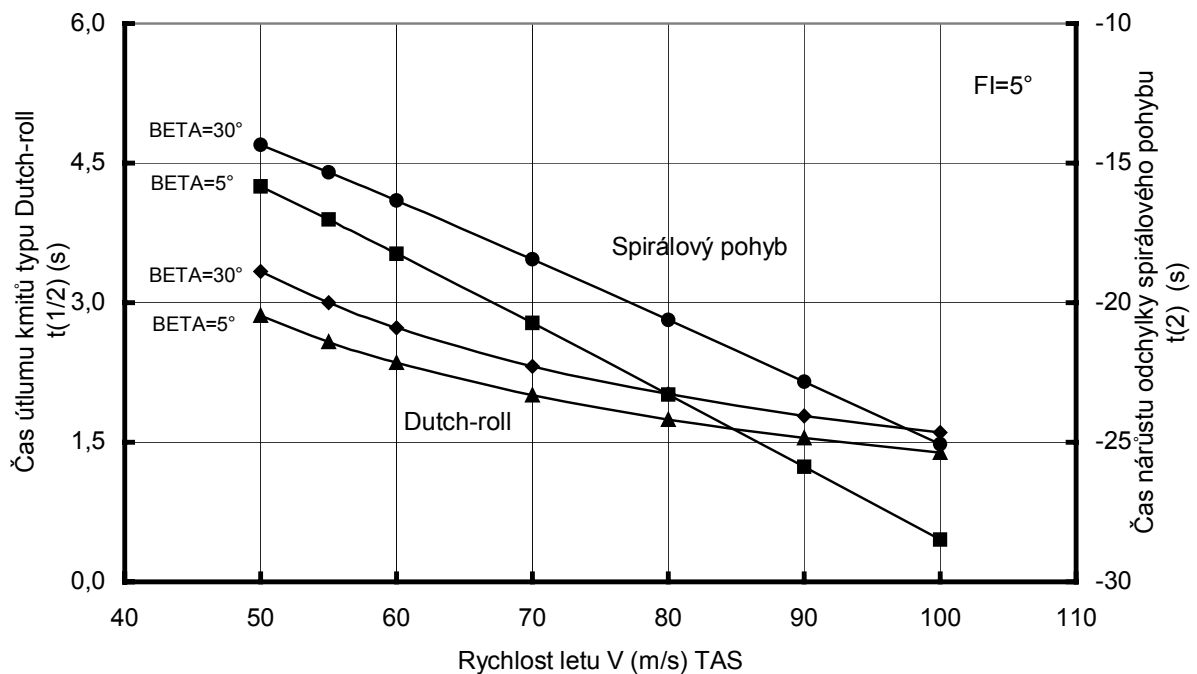
desetinu, periody kmitání apod. pro jednotlivé módy pohybu letounu po poruše referenčního režimu letu. Některé z těchto parametrů byly navíc sledovány pro více režimů letu v závislosti na rychlosti letu. Vybrané výsledky řešení jsou shrnuty v diagramech na obr.1 až obr. 3. Na obr. 1 jsou znázorněny časy potřebné na útlum amplitudy kmitání, resp. odchylky u aperiodického pohybu, na jednu desetinu pro rychlé podélné kmity, stranové kmity typu Dutch roll a aperiodický rychlý klonivý pohyb. Uvedené módy jsou stabilní, vliv úhlu vybočení nejvíce nepříznivě ovlivňuje kmitání typu Dutch-roll. Dále výsledky řešení ukázaly, že aperiodický spirálový pohyb je nestabilní a fugoidální kmity s rostoucím úhlem vybočení se blíží mezi nestability. U fugoidálních kmitů o tom svědčí nápadně dlouhé časy útlumu amplitudy kmitání na jednu desetinu. Podrobněji lze tuto skutečnost posoudit dle závislostí uvedených na obr. 2. Zde jsou znázorněny závislosti času potřebného na zvětšení odchylky pro spirálový pohyb na desetinásobek a zmenšení odchylky pro fugoidální pohyb v závislosti na úhlu vybočení a příčném sklonu při konstantní rychlosti letu. V obou případech je vliv úhlu vybočení nepříznivý. U fugoidálních kmitů dochází se zvětšováním úhlu vybočení k progresivnějšímu projevu poklesu míry stability při konstantním úhlu příčného sklonu. Naopak při konstantním úhlu vybočení je možno vidět, že vliv růstu úhlu příčného sklonu působí u fugoidálních kmitů pozitivně, zvětšuje míru stability. Změna míry stability pro kmity typu Dutch-roll a změna míry nestability pro spirální pohyb v závislosti na rychlosti letu je doplněna na obr. 3. Záporné časy v obr.2 a 3 signalizují nestabilní pohyb po poruše režimu letu.



Obr.1 Závislost časů potřebných na utlumení odchylek na jednu desetinu v závislosti na vybočení pro tři módy: podélné krátkoperiodické kmity, Dutch-roll a klonivý pohyb letounu.



Obr.2 Závislost času potřebného na útlum amplitudy fugoidálních kmitů na jednu desetinu a čas nárůstu aperiodického pohybu v závislosti na úhlu vybočení a příčném sklonu letounu (FI)



Obr. 3 Vliv rychlosti letu a vybočení (BETA) na čas útlumu stranových kmitů typu Dutch-roll a čas nárůstu odchytky v aperiodickém spirálovém pohybu letounu při úhlu příčného sklonu FI = 5°.

## 6. Závěr

Proveden početní rozbor dynamické stability se šesti stupni volnosti pro malý dopravní letoun. Jedná se o hornoplošník, u něhož tunelová měření ukázala jisté závislosti podélného pohybu na úhlu vybočení. Byl sledován vliv úhlu vybočení a příčného sklonu na tlumení jednotlivých modů pro jeden zadaný režim letu. Mimoto byl zahrnut i vliv změny rychlosti letu. Na základě doposud získaných výsledků se ukazuje, že z veličin charakterizujících nesymetričnost letu se nejvíce uplatňuje vliv úhlu vybočení (!). Vliv úhlu příčného sklonu má menší vliv. Vůbec se neprojevil na rychlé krátkoperiodické podélné kmity ani na aperiodický klonivý pohyb letounu. S růstem úhlu příčného sklonu se např. zvětšuje perioda fugoidálních kmitů. V nesymetrickém letu jsou fugoidální kmity málo tlumené a při velkých vybočeních se doby útlumu prudce zvyšují. Při malých rychlostech se rychle blíží až k hranici nestability. U aperiodického spirálového pohybu, který je nestabilní, růst úhlu příčného sklonu prodlužuje časy nárůstu odchylky v širokém rozmezí úhlu vybočení. Samotný úhel vybočení naopak mírně zkracuje doby nárůstu odchylky. Pokud se týká vlivu režimu letu, potvrzuje se i u nesymetrických letů, že s růstem rychlosti letu se zlepšuje útlum nejvíce u podélných krátkoperiodických kmitavých pohybů i u stranových kymácivých pohybů typu Dutch-roll a podobně i u aperiodického rychlého klonivého pohybu letounu.

## 7. Poděkování

Práce vznikla díky institucionální podpoře MŠMT v rámci řešení Výzkumného záměru MSM 262100005: "Experimentální výzkum aerodynamických charakteristik na létajících laboratořích" na FSI VUT v Brně.

## 8. Literatura

DANĚK, V. (2000) Analýza stranové dynamické stability velmi lehkého letounu, In: Sborník konference Nové trendy v rozvoji letectva, Košice, str.28-34.

ETKIN, B., REID, L.D. (1996) Dynamics of Atmospheric Flight – Stability and Control, John Wiley & Sons, Inc., New York, 3.vyd.

MERTL (1987) Atlas aerodynamických a letově-technických charakteristik L-610, LET Kunovice, a.s., (v ruštině).

ROSKAM, J. (2001) Advance Aircraft Analysis (AAA), User's Manual, version 2.3, DARcorporation, Lawrence, Kansas, USA.