National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2003
Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2003
paper no. **128**

VIBRATION OF STRAIGHT PIPING UNDER MOVING LOAD WITH SUPERCRITICAL VELOCITY

L. Pečínka[1], I. Krásný[2], J. Bláha[3], J. Kovařík[3]

Summary: *Moving load is such a load, which vary both in time and space. As the result the stress state of piping increase and frequency spectrum decrease. If the flow velocity is equal to so called critical velocity then vibration are transformed in buckling. If the flow velocity increase over critical one then the related vibration mode represent specific case of flutter.*

1. Úvod

Pohyblivé zatížení potrubí je takové zatížení, které se mění v prostoru a čase. U energetických zařízení tento režim nastane u výfukových potrubí do atmosféry po otevření pojišťovací ventilů, u jaderných elektráren navíc i u přepouštěcího potrubí mezi kompenzátorem objemu a barbotážní nádrží, opět po stejné iniciační události. Vzhledem k tomu, že se vždy jedná o výtok z vysokého tlaku (řádu MPa) do protitlaku 0,1 MPa, rychlost páry bude vždy dosti blízká rychlosti kritické. To se dle [1] projeví posuvem frekvenčního spektra směrem k nižším hodnotám resp. změnou tlumení. Je-li rychlost proudu rovna rychlosti kritické, nastane vzpěr [2]. V dalším bude analyzován případ nadkritické rychlosti proudění pro takový typ okrajové podmínky, kdy ani jeden konec není volný. Diskutována je i okrajová podmínka vetknutý – volný, která vyžaduje specielní postup.

2. Systém základních rovnic

Zvažujme v dalším příčný nosník délky *L*, zatím s libovolnou okrajovou podmínkou a rovnoměrným zatížením pohybujícím se rychlostí U. V práci [2] byla odvozena jeho pohybová rovnice s respektováním tlumení *b* ve tvaru:

$$E J \frac{\delta^4 v}{\delta x^4} + \left(m_F U^2 + p A - S\right)\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \left(M + m_F\right)\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} + b\frac{\delta v}{\delta t} + 2U m_F \frac{\delta^2 v}{\delta x\, \delta t} = Q \qquad (1)$$

[1] Ing. Ladislav Pečínka, CSc., Ústav jaderného výzkumu Řež a.s., 250 68 Řež, e-mail pel@ujv.cz

[2] Ing. Ivan Krásný, CSc., VAMET s.r.o., Slávy Horníka 16a/1021, 150 00 Praha 5, e-mail ivan.krasny@vamet.cz

[3] Mgr. Jan Bláha, Mgr. Josef Kovařík, Západočeská univerzita v Plzni, KMA, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, e-mail blaha@kma.zcu.cz , joskov@kma.zcu.cz

Řešení provedeme rozkladem pomocí nosníkových funkcí, tj.

$$\mathrm{v}_m\left(x,t\right)=F_m\left(x\right)q_m\left(t\right) \tag{2}$$

Po dosazení (2) do (1) a integrováním dle x v mezích $\langle 0;L\rangle$ dostaneme jako výsledek

$$\left(M+m_F\right)\ddot{q}_m(t)+\left(b+2U\,m_F\,\frac{\int_0^L F_m'(x)F_m(x)dx}{\int_0^L F_m(x)}\right)\dot{q}_m(t)+k_m^{red}q_m(t)=\frac{Q}{\int_0^L F_m^2(x)dx}\int_0^L F_m(x)dx \tag{3}$$

přičemž

$$k_m^{red}=\frac{1}{\int_0^L F_m^2(x)dx}\left[E\,J\int_0^L F_m^{iv}(x)F_m(x)dx+\left(m_F\,U^2+p\,A-S\right)F_m''(x)F_m(x)dx\right] \tag{4}$$

je tzv. zobecněná (redukovaná) tuhost příslušná m-tému tvaru kmitu a má standardní složku danou materiálem a geometrií nosníku ($E\ J$) a rychlostní úměrnou U^2. Pro další výpočty se v rovnici (3) zavedou následující označení

$$\kappa=\frac{m_f}{M};\quad \overline{M}=M+m_F=M\left(1+\kappa\right)$$

$$\omega_m^2=\frac{k_m^{(EJ)}}{\overline{M}}=\frac{k_m^{(EJ)}}{M\left(1+\kappa\right)}=\frac{\omega_{om}^2}{1+\kappa}$$

m-tá vlastní frekvence nosníku zaplněného nepohyblivým médiem.

Po jednoduchých úpravách [1] dostaneme výraz pro redukovanou frekvenci

$$\left(\omega_m^{red}\right)^2=\omega_m^2+\frac{\frac{m_F}{\overline{M}}U^2\int_0^L F_m''(x)F_m(x)d\,x}{\int_0^L F_m^2(x)d\,x}$$

$$=\frac{\omega_{om}^2}{1+\kappa}\left[1+\kappa\left(\frac{U}{c_{wb}}\right)^2\varepsilon_m\right] \tag{5}$$

$$c_{wb}=2\,L\,f_m$$

V dalších výpočtech zvolíme okrajovou podmínku vetknutí – vetknutí. Pro daný typ funkce $F_m\left(x\right)$ lze po integraci ε_m v rovnici (5) upravit do tvaru

$$\varepsilon_m=\frac{\delta_m}{\pi^2}\alpha_m\left[2-\delta_m\,\alpha_m\right]<-1,\quad m=1,2,...$$

kde

δ_m je bezrozměrný parametr pro danou okrajovou podmínku

α_m je bezrozměrný frekvenční parametr

Tímto se rovnice (3) změní na

$$\ddot{q}_m(t) + 2\xi\,\omega_m^{red}\,\dot{q}_m(t) + \left(\omega_m^{red}\right)^2 q_m(t) = \frac{1}{\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\,\frac{1}{M}\,\frac{Q}{1+\kappa}\,\frac{2\delta_m}{\beta_m}\left[1-(-1)^m\right] \qquad (6)$$

$$\beta_m = \frac{\alpha_m}{L}$$

Je tedy zřejmé, že pro zvolený typ okrajové podmínky a daný způsob výpočtu, Coriolisovo zrychlení [2], vyvolané proudem chladiva, nemá vliv na tlumení, zatímco dostředivé zrychlení snižuje vlastní frekvence. Obecně toto platí pro ty typy okrajových podmínek, kdy ani jeden konec není volný.

3. Případ dosažení kritické rychlosti

Kritickou rychlostí se v dalším rozumí taková rychlost proudu, při níž bude platit $\omega_m^{red} = 0$, viz rovnici (5). V případě okrajové podmínky, kdy ani jeden konec není volný, dostaneme

$$U_{krit}^{(m)} = \frac{c_{wm}}{\sqrt{\kappa(\varepsilon_m)}}$$

přičemž při odvození se respektovala skutečnost, že $\varepsilon_m < 0$ pro m = 1, 2, …. Tím se zkrácená rovnice (6) změní na

$$\frac{d^2 q_m}{d t^2} = 0$$

čili $q_m(t) = C_1^{(m)} t + C_2^{(m)}$, hodnoty integračních konstant $C_1^{(m)}$ a $C_2^{(m)}$ závisí na typu počáteční podmínky. Je tedy zřejmé, že v těchto případech dochází ke vzpěru.

4. Případ překročení kritické rychlosti

Je-li $U > U_{krit}^{(m)}$, pak $\left(\omega_{red}^m\right)^2 < 0$ a rovnice (6) se změní na tvar (zabýváme se opět zkráceným řešením)

$$\ddot{q}_m(t) + 2\xi\, i\,\omega_m^{red}\,\dot{q}_m(t) - \left(\omega_m^{red}\right)^2 q_m(t) = 0 \quad m = 1, 2, ... \qquad (7)$$

přičemž ω_m^{red} se vypočte ze vztahu (5).

Řešení hledáme ve tvaru $q_m(t) = e^{\lambda_m t}$ a po dosazení do vztahu (7) dostaneme kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda_1 = -i\,\xi\,\omega_m^{red} + \omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\lambda_2 = -i\,\xi\,\omega_m^{red} - \omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}$$

m = 1, 2, …

Bude tudíž platit

$$q_m(t) = C_1\, e^{-i\xi\omega_m^{red} t}\, e^{\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\, t} + C_2\, e^{-i\xi\omega_m^{red} t}\, e^{-\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\, t}$$

Zvolíme-li počáteční podmínky

$$q\,(0)=0;\quad \dot{q}\,(0)=\mathrm{v}_0$$

dostaneme jako výsledek

$$\begin{aligned}
q_m\,(t) &= \frac{\mathrm{v}_0}{\omega_m^{red}\left(1+\xi^2\right)} sh\,\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\;t\left(\cos\xi\;\omega_m\,t+\xi\sin\xi\,\omega_m^{red}\,t\right)+ \\
&+i\frac{\mathrm{v}_0}{\omega_m^{red}\left(1+\xi^2\right)} sh\,\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\;t\left(\xi\cos\xi\;\omega_m\,t+\sin\xi\,\omega_m^{red}\,t\right) \\
&= \frac{\mathrm{v}_0}{\omega_m^{red}\left(1+\xi^2\right)} sh\left(\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\cos\xi\,\omega_m^{red}\;t- \\
&-i\;\frac{\mathrm{v}_0}{\omega_m^{red}\left(1+\xi^2\right)}\left(sh\,\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\sin\xi\;\omega_m^{red}\;t+ \\
&+\frac{\mathrm{v}_0\,\xi}{\omega_m^{red}\left(1+\xi^2\right)}\,sh\left(\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\sin\xi\,\omega_m^{red}\;t+ \\
&+i\;\frac{\mathrm{v}_0\,\xi}{\omega_m^{red}\left(1+\xi^2\right)} sh\left(\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\sin\xi\,\omega_m^{red}\;t
\end{aligned} \tag{8}$$

což reprezentuje dvě komplexní čísla, jejichž průvodič roste dle zákona $s\,h\left(\omega_m^{red}\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)$. To znamená, že po překročení kritické rychlosti směrem k vyšším hodnotám přejde vzpěr k zvláštní nestabilitě typu „flutter".

5. Okrajová podmínka vetknutí - volný

„Normalisovaná" rovnice dynamiky protékaného potrubí je (η výchylka, ξ souřadnice, τ čas)

$$\partial^4\eta(\xi,\tau)/\partial\xi^4+\gamma_1.\,\partial^2\eta(\xi,\tau)/\partial\xi^2+\gamma_2.\partial^2\eta(\xi,\tau)/(\partial\xi.\partial\tau)+\partial^2\eta(\xi,\tau)/\partial\tau^2=0, \tag{9}$$

kde bezrozměrné parametry γ_1 a γ jsou dány vztahy (L je délka půlvlny deformace, m_M a m_T hmota média a celková na jednotku délky, u rychlost média, p přetlak, A vnitřní průřez, S tahová síla v potrubí a $E.J$ ohybová tuhost potrubí)

$$\gamma_1=(m_M.u^2+p.A-S).L^2/(E.J), \tag{10}$$

$$\gamma_2=2.m_M.u.L/(m_T.E.J)^{1/2}. \tag{11}$$

Za předpokladu harmonického časového průběhu výchylky

$$\eta(\xi,\tau)=\theta\,(\xi).\exp(\mathrm{i}.\omega.\tau) \tag{12}$$

plyne z výchozí rovnice (9) obyčejná lineární diferenciální rovnice pro $\theta\,(\xi)$

$$\mathrm{d}^4\theta/\mathrm{d}\xi^4+\gamma_1.\,\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{i}.\omega.\gamma_2.\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}\xi-\omega^2.\theta=0. \tag{13}$$

Z rovnice (13) je vidět, že vliv proudícího média roste s hodnotami bezrozměrných parametrů γ_1 a γ_2. Ty závisí na délce L kvadraticky resp. lineárně (viz výrazy (10) a (11)), proto pro horní odhady vlivu média postačí se zabývat největší možnou délkou L a tedy nejnižším vlastním kmitem. Hodnotu nejnižší vlastní (bezrozměrné) kruhové frekvence ω lze nalézt iterativním postupem, upravíme-li rovnici (13) do tvaru

$$\mathrm{d}^4\theta_{n+1}/\mathrm{d}\xi^4=+\,\omega_n^{\,2}.\theta_n-\gamma_1.\,\mathrm{d}^2\theta_n/\mathrm{d}\xi^2-\mathrm{i}.\omega_n.\gamma_2.\mathrm{d}^2\theta_n/\mathrm{d}\xi. \tag{14}$$

Vztah (14) jsme postupně integrovali za respektování všech (geometrických i dynamických) okrajových podmínek. Iterace bylo třeba začít s „rozumně“ zvolenými ω_0 a $\theta_0(\xi)$. S rostoucím n konverguje ω_n k nejnižší hodnotě ω a $\theta_n(\xi)$ k příslušnému vlastnímu tvaru; ω_{n+1} se určí z podmínky schematicky zapsané ve tvaru (viz [4], odst.2.5.5)

$$\int_0^1 \theta_n(\xi).\theta_n(\xi).d\xi = \int_0^1 \theta_n(\xi).\theta_{n+1}(\xi).d\xi . \tag{15}$$

Úvahy a informace, obsažené v předchozím textu, považujeme za užitečné doplnit aspoň informativním odhadem chování protékaného úseku potrubí při takových okrajových podmínkách, kdy lze očekávat nejvýraznější vliv parametrů γ_1 a γ_2. Pro tento účel jsme vybrali případ „vetknutý/volný“, jehož nejnižší (nenulová) vlastní frekvence odpovídající prostému nosníku je minimem ze všech standardních okrajových podmínek. Jsme si vědomi pravděpodobně obtížné technické realisace tohoto případu v obecné podobě (průtok směrem od volného konce k vetknutému!). Okrajové podmínky tedy jsou:

$$\text{pro } \xi = 0\text{: } \theta(0) = 0;\ \theta'(0) = 0, \text{ pro } \xi = 1\text{: } \theta''(0) = 0;\ \theta'''(0) = 0. \tag{16}$$

Za výchozí odhad iterací jsme zvolili „nosníkovou“ funkci, odpovídající nejnižší vlastní hodnotě:

$$\theta_0(\xi) = \cosh(\beta.\xi) - \cos(\beta.\xi) - [(\cos\beta + \cos\beta)/(\sinh\beta + \sin\beta)].[\sinh(\beta.\xi) - \sin(\beta.\xi)],$$

$$\text{kde } \beta = 1{,}85710407. \tag{17}$$

Po prvé iteraci, tj. pro $n = 1$, tak vyšla přibližná rovnice pro nejnižší vlastní kruhovou frekvenci ω (samozřejmě „bezrozměrnou“, pro zaplněné ale neprotékané potrubí s $u = 0$ m/s je $\omega = \omega_0 = 1{,}87510407^2 \approx 3{,}5160$)

$$\omega^2 - 2.i.\gamma_2.\omega - \beta^4 - 0{,}85824.\gamma_1 = 0,\ \omega_{1,2} = i.\gamma_2 \pm (\beta^4 + 0{,}85824.\gamma_1 - \gamma_2^2)^{1/2}. \tag{18}$$

Podle provedených numerických sond je tato rovnice pro technickou praxi dostatečně přesná. Číselné velikosti ω jsou pro technicky zajímavé hodnoty γ_1 a γ_2 (viz [3]) uvedeny v tab.1.

γ_2	γ_1	0	2	4	6	8	10
0	Re(ω)	3,516	3,752	3,974	4,185	4,385	4,577
	Im(ω)	0	0	0	0	0	0
± 1	Re(ω)	3,371	3,616	3,846	4,063	4,269	4,466
	Im(ω)	±1	±1	±1	±1	±1	±1
±2	Re(ω)	2,892	3,175	3,434	3,676	3,902	4,116
	Im(ω)	±2	±2	±2	±2	±2	±2

Tabulka 1. Hodnoty bezrozměrných vlastních kruhových frekvencí ω

Příslušný (přibližný) vlastní tvar kmitu $\theta_1(\xi)$ je až na násobnou konstantu dán výrazem:

$$\theta_1(\xi) \approx f_\omega(\xi).\omega^2 - 0{,}2318.f_1(\xi).\gamma_1 - 0{,}3005.f_2(\xi).i.\omega.\gamma_2, \tag{19}$$

kde všechny tři pomocné funkce $f_\omega(\xi), f_1(\xi)$ a $f_2(\xi)$ vyhovují okrajovým podmínkám (16), mají přibližně tvar základního kmitu klasického nosníku $\theta_0(\xi)$ a navíc platí

$$f_\omega(\xi) = \theta_0(\xi)/2,\ f_\omega(1) = f_1(1) = f_2(1) = 1. \tag{20}$$

Dosazení do (19) za ω dá názornou představu o vlivu parametrů γ_1 a γ_2 protékajícího média na tvar kmitání. Ten je – při nenulovém γ_2 – komplexní, a to jak díky členu s $f_2(\xi)$ v (19), tak díky imaginární části ω, dané vztahem (18). Komplexnost $\theta_1(\xi)$ má s ohledem na rov.(12) za následek fázový rozdíl $\pi/2$ mezi - zhruba řešeno - výchylkou Re[$\theta_1(\xi)$] odpovídající prvému, druhému a čtvrtému členu rov.(13) a výchylkou Im[$\theta_1(\xi)$], poplatnou jejímu třetímu imaginárnímu, o $\pi/2$ fázově posunutému členu.

Na rozdíl od běžnějších okrajových podmínek potrubního úseku (oboustranné podepření nebo oboustranné vetknutí, vetknutí/podpora) vykazuje vyšetřovaný případ růst vlastní frekvence s parametrem γ_1. Tímto parametrem vyjádřené odstředivé účinky proudu média totiž zde působí proti směru okamžité výchylky a tak „zvyšují" tuhost potrubního úseku. Číselně vyjádřeno: znaménka výchylky $\theta(\xi)$ a její druhé derivace $\theta''(\xi)$ jsou po celé délce nosníku stejná, na rozdíl od nosníku oboustranně podepřeného.

Ze vztahu (12) je vidět, že kladná imaginární část kruhové frekvence ω vyjadřuje útlum, kdežto záporná samobuzení. Přitom znaménko imaginární části ω je určeno směrem rychlosti protékání: neohraničený vzrůst výchylek potrubí by teoreticky hrozil při (technicky málo reálném) průtoku od volného konce úseku potrubí k vetknutému. Tento poznatek souhlasí s představou, plynoucí z analysy směru Coriolisova zrychlení v okamžiku průchodu osy potrubí neutrální polohou; v tomto okamžiku je změna úhlového natočení (rotační unášivý pohyb) největší a setrvačný účinek Coriolisova zrychlení tak na účet energie protékajícího média „podporuje" (fázově posunut o $\pi/2$) klasickou reálnou složku výchylky.

6. Důkaz jednoznačnosti a globálnosti řešení

Z matematického hlediska lze rovnici (3) zapsat ve tvaru

$$\alpha\,\ddot{q}_m(t) + \beta\,\dot{q}_m(t) + \gamma\,q_m(t) = \delta \tag{21}$$

Protože se jedná o obyčejnou lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, má tato globální a jednoznačné řešení pro všechny typy okrajových podmínek diskutovaných v předchozím [5].

V případě rovnice (3) resp. (21) s nekonstantními koeficienty se podařilo podat obdobný důkaz pro okrajovou podmínku podpora – podpora [6]. Jeho rozšíření na ostatní typy okrajových podmínek je předmětem současného řešení.

7. Literatura

[1] Pečínka L., Krupa Vl.: Dynamic Response of Piping due to Moving Load. *Inženýrská Mechanika 2002*, 13÷16.5.2002, Svratka

[2] Krásný I., Pečínka L.: Ohybové kmitání přímých úseků a kolen s pohyblivým zatížením. *Colloquium „Dynamics of Machines 2003"* Praha, únor 11-12, 2003

[3] Pečínka L., Krásný I.: Dynamics of Piping with Moving Fluid. *17th Int. Conf. Structural Mechanics in Reactor Technology,* Prague, August 17÷22, 2003

[4] Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání, *Technický průvodce 71*, Praha 1994, Sobotáles

[5] Kalas J., Ráb M.: Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova univerzita Brno, 1995

[6] BláhaJ., Kovařík J.: Beam Equation under the Moving Load, *Colloquium "Dynamics of Machines 2003"*, Praha, únor 11 – 12, 2003