

## DETERMINATION OF ELASTIC MODULI BY THE RESONANT ULTRASOUND SPECTROSCOPY METHOD

R. Kolman\*, J. Plešek\*, M. Landa\*

**Summary:** *An optimization method for the determination of elastic moduli by resonant ultrasound spectroscopy (RUS) was proposed. All components of the fourth-order tensor of elastic moduli for a general anisotropic material is determined from the knowledge of the resonance response (spectrum) of the mechanical system. This spectrum is obtained from experimental measurements, using the RUS method on the prismatic specimen. For the iterative computation of elastic moduli an identification algorithm based on the direct iteration method is used. Spatial discretisation is performed by the finite element method. The paper closes with test examples and discussion.*

### 1. Úvod

Elastické konstanty, ve smyslu tuhostních charakteristik, je možné určovat statickými metodami z lineární závislosti zátěžné síly na malém posunutí. Při dynamickém měření se využívá šíření akustických vln ve zkoumaném materiálu. Většina tabelovaných hodnot elastických konstant známých materiálů byla získána na základě měření doby průletu (TOF) akustického pulsu [9], [12].

Relativně nedávno byla pro měření elastických konstant vyvinuta metoda rezonanční ultrazvukové spektroskopie (Resonant Ultrasound Spectroscopy, RUS), [5], [6], [7], [8]. Touto metodou jsou měřeny komplexní amplitudy vynuceného harmonického kmitání a vyhodnoceny vlastní frekvence (resonance) daného vzorku materiálu. Máme-li k dispozici dostatečný počet naměřených resonancí, známe-li hustotu materiálu, rozměry a tvar vzorku, můžeme získat jedním měřením na jednom vzorku všechny elastické konstanty; tedy obecně až 21 nezávislých konstant. Vzorky mohou mít nejenom prizmatický tvar, ale i jiný např. kulový, [15]. Teoreticky není nutné, aby tvar vzorku byl orientován vzhledem ke krystalografické souřadnicové soustavě. Vzorky mohou mít rozměry pod 1 mm, ale velikosti vzorků mohou být i v jednotkách cm až km (stavebnictví nebo geofyzika). Metoda RUS není čistě experimentální metoda, neboť pro vyšetření hodnot elastických konstant je nutný výpočet vlastních frekvencí pro dané hodnoty elastických konstant

---

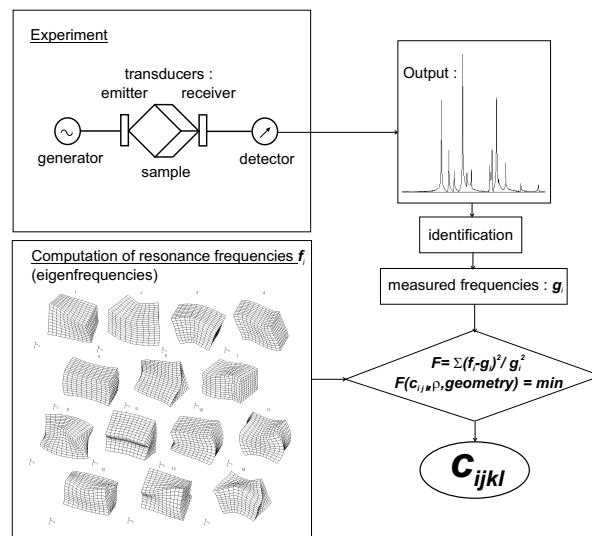
\*Ing. Radek Kolman, Ing. Jiří Plešek, CSc., Ing. Michal Landa, CSc.: Ústav termomechaniky AV ČR; Dolejškova 5; 182 00 Praha 8; tel. +420 266 053 292; fax: +420 285 584 695; email: kolman@it.cas.cz

(forward problem). Na základě příslušného výpočtového modelu kmitání zkušebního tělesa lze pomocí minimalizace odchylek naměřených a vypočtených vlastních frekvencí určovat hledané parametry, jimiž jsou elastické konstanty. Vztahy mezi parametry jsou zpravidla nelineární, a proto je tato úloha (inverse problem) nelineární povahy.

Inverzní úlohu lze přeformulovat jako hledání hodnot nezávislých elastických konstant pro daný materiál tak, aby cílová funkce  $\chi$ , např. ve tvaru

$$\chi = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \frac{f_k - g_k}{g_k} \right)^2}, \quad (1)$$

dosáhla svého lokálního minima, popř. aby platilo  $\chi = 0$ . Ve vztahu (1) označuje  $f_k$   $k$ -tou nenulovou vlastní frekvenci zkoumaného systému,  $g_k$   $k$ -tou vlastní frekvenci určenou experimentem,  $N$  počet nenulových vlastních frekvencí.



Obrázek 1: Schéma metody rezonanční ultrazvukové spektroskopie (RUS)

## 2. Optimalizační metoda

Pro řešení inverzní úlohy nalezení elastických konstant při znalosti rezonanční odezvy (spektra) studovaného systému se standardně používá Ritzova metoda ve spojení s Levenbergovou-Marquardtovou metodou (LM) [8],[13],[14]. Ritzova metoda se využívá pro prostorovou diskretizaci systému a na základě variační formulace se odvodí vztahy pro matice tuhosti  $\mathbf{K}$  a matice hmotnosti  $\mathbf{M}$ . Po sestavení  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{M}$  je možné určit vlastní frekvence systému. Použití Ritzovy metody pro prostorovou diskretizaci je omezené na jednoduché

geometrické tvary vzorku a pro homogenní materiál. Toto souvisí s tvarem použitých bá-  
zových funkcí. Možné tvary básových funkcí je možné nalézt v [15]. Možností jak odstranit  
toto omezení je provést prostorovou diskretizaci metodou konečných prvků a to i za cenu  
zvýšení náročnosti výpočtů.

Pro nalezení lokálního minima cílové funkce  $\chi$  je možné použít Levenbergovu-Marquard-  
tovu metodu [10]. LM metoda je v podstatě stabilizovaná Newtonova metoda. Porovnání  
konvergence Newtonovy a LM metody bylo provedeno v [4]. LM metoda vyžaduje re-  
lativně mnoho výpočtů hodnoty cílové funkce  $\chi$ , tj. v tomto případě mnoho výpočtů  
vlastních frekvencí systémů. Použití Ritzovy metody v kombinaci s LM metodou je ve-  
lice rychlé, identifikace trvá řádově sekundy. Problémy z hlediska výpočetní rychlosti by  
nastaly při kombinaci MKP s LM metodou, neboť tato metoda vyžaduje průběžné vý-  
počty všech vlastních frekvencí. Aplikace by tudíž byla velmi neefektivní. Proto se hledal  
nový algoritmus pro identifikaci elastických konstant při použití prostorové diskretizace  
MKP. V následující sekci je popsána metoda použitelná pro identifikaci elastických konstant  
založená na metodě postupných aproximací (Direct Iteration Method - DIM).

## 2.1 Teoretický základ navržené metody

V krátkosti bude uvedeno odvození rekurentního vztahu pro identifikaci elastických kon-  
stant pomocí metody postupných aproximací. Diskretizujme zkoumaný vzorek metodou  
konečných prvků a pro známé předpoklady volného kmitání elastického kontinua diskre-  
tizovaného MKP vznikne zobecněný problém vlastních čísel [1]

$$(-\lambda_k \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{v}_k = 0, \quad (2)$$

kde  $\lambda_k = \Omega_k^2 = 4\pi^2 f_k^2$ ,  $f_k$  je k-tá vlastní frekvence,  $\mathbf{v}_k$  je k-tý vlastní vektor (tvar). Matice  
hmotnosti  $\mathbf{M}$  je definovaná vztahem

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3)$$

a matice tuhosti  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (4)$$

kde  $\rho$  je hustota,  $V$  je objem vzorku,  $\mathbf{N}$  je matice tvarových funkcí,  $\mathbf{B}$  je matice derivací  
tvarových funkcí a  $\mathbf{C}$  je matice elastických konstant. Tuto matici můžeme rozepsat jako  
lineární kombinaci

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^M C_i \mathbf{P}_i, \quad (5)$$

kde  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$  jsou nezávislé elastické konstanty a matice  $\mathbf{P}_i$  jsou básové ma-  
tice příslušející elastickým konstantám  $C_i$ . Po dosazení vztahu (5) pro matici elastických  
konstant do definice matice tuhosti (4) se tato matice může také rozepsat jako lineární  
kombinace

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^M C_i \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{P}_i \mathbf{B} dV \right) = \sum_{i=1}^M C_i \mathbf{R}_i. \quad (6)$$

Označení  $\mathbf{R}_i$  bylo zavedeno pro

$$\mathbf{R}_i = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{P}_i \mathbf{B} dV. \quad (7)$$

Pokud se vlastní vektory normují tak, že platí

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{V}$  je modální matice a  $\mathbf{\Lambda}$  je diagonální spektrální matice, platí také pomocí vztahů (6),(7), (8) rovnost

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \left( \sum_{i=1}^M C_i \mathbf{R}_i \right) \mathbf{V} = \sum_{i=1}^M C_i \mathbf{S}_i, \quad (9)$$

kde matice  $\mathbf{S}_i$  je dána vztahem

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{V}^T \mathbf{R}_i \mathbf{V}. \quad (10)$$

Porovnáme-li levé strany rovnic (8) a (9), získáme vztah mezi nezávislými elastickými konstantami a vlastními čísly problému

$$\sum_{i=1}^M C_i \mathbf{S}_i = \mathbf{\Lambda}. \quad (11)$$

Požadavkem je, aby pro cílovou funkci  $\chi$  platilo  $\chi = 0$ , což je ekvivalentní rovnosti  $f_k = g_k$  pro  $k = 1, 2, \dots, N$ . Ve vztahu (11) se proto zamění matice  $\mathbf{\Lambda}$  za experimentálně určenou matici  $\mathbf{\Lambda}_{exp}$ . Spektrální matice  $\mathbf{\Lambda}_{exp}$  se určí podle předpisu

$$\mathbf{\Lambda}_{exp} = \text{diag} (4\pi^2 (g_k)^2). \quad (12)$$

Pro metodu postupných aproximací se využije následující rekurentní vztah

$$\sum_{i=1}^M C_i^{j+1} \mathbf{S}_i^j = \mathbf{\Lambda}_{exp}. \quad (13)$$

Vztah (13) umožňuje určit nový odhad elastických konstant  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$  při znalosti vlastních frekvencí z experimentu, rozměrů a geometrie vzorku, hustoty materiálu, typu symetrie krystalografické mřížky a jejího natočení vůči souřadnicovému systému a vlastních vektorů.

V maticové rovnici (13) jsou  $\mathbf{S}_i^j$  a  $\mathbf{\Lambda}_{exp}$  symetrické matice, takže stačí porovnat jejich horní trojúhelníky. Tím vznikne přeurčená soustava lineárních algebraických rovnic. Počet rovnic je  $N \cdot (N + 1)/2$ , počet neznámých je  $M$ . Můžeme proto psát

$$\mathbf{A}^j \mathbf{c}^{j+1} = \mathbf{b}_{exp}, \quad (14)$$

kde  $\mathbf{c}$  označuje vektor nezávislých elastických konstant

$$\mathbf{c} = [C_1, C_2, \dots, C_M]^T, \quad (15)$$

matice  $\mathbf{A}$  obsahuje vhodně uspořádané koeficienty  $\mathbf{S}$  a vektor  $\mathbf{b}_{exp}$  představuje horní trojúhelník matice  $\mathbf{\Lambda}_{exp}$  ve sloupcové formátu.

## 2.2 Poznámky k numerické implementaci navržené metody pro identifikaci elastických konstant

Postup iteračního výpočtu využívajícího vztah (13) je následující. Pro odhadnutý vektor nezávislých elastických konstant  $\mathbf{c}^j$  známého typu materiálu se sestaví matice elastických konstant  $\mathbf{C}^j$ , matice hmotnosti  $\mathbf{M}$  a matice tuhosti  $\mathbf{K}^j$ , vyřeší se problém vlastních čísel  $(\mathbf{K} - \lambda_k^j \mathbf{M})\mathbf{v}_k^j = \mathbf{0}$  (např. metodou iterace podprostoru) a zkontroluje se podmínka  $\chi^j < \chi_{error}$ . Pokud nerovnost platí, je  $\mathbf{C}^j$  hledaná matice elastických konstant. Pokud nerovnost není splněna, sestaví se matice  $\mathbf{S}_i^j$ . Z rovnice (13) se určí nový odhad vektoru  $\mathbf{c}^{j+1}$  a celý proces se opakuje, dokud není splněna podmínka  $\chi^j < \chi_{error}$ . Celý algoritmus byl implementován v rámci prostředí výpočetního systému PMD a je symbolizován v box.1.

Matice elastických konstant  $\mathbf{C}$  musí být pozitivně definitní. V navrženém rekurentním schématu není tento požadavek přímo respektován, proto se musí provést dodatečná kontrola. Pro test pozitivní definitivnosti matice  $\mathbf{C}$  se doporučuje použít zobecněný Choleského rozklad [3]

$$\mathbf{C} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z}, \quad (16)$$

kde  $\mathbf{Z}$  je horní trojúhelníková matice s kladnými diagonálními prvky,  $\mathbf{Q}$  je diagonální matice, pro kterou platí:  $\mathbf{Q} = \text{diag}(\pm 1)$ . Pokud matice  $\mathbf{C}$  je pozitivně definitní, jsou diagonální prvky matice  $\mathbf{Q}$  rovny jedné, tj.  $Q_{ii} = 1$  pro  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

Přeurčenou soustavu lineárních algebraických rovnic (14) je výhodné řešit pomocí pseudoinverzní matice [3], čímž se získá řešení soustavy (14) ve smyslu nejmenších čtverců

$$\mathbf{c}^{j+1} = (\mathbf{A}^j)^+ \mathbf{b}_{exp}, \quad (17)$$

kde  $(\mathbf{A}^j)^+$  je pseudoinverzní matice k matici  $\mathbf{A}^j$ . Matice  $\mathbf{A}^+$  je definovaná vztahem

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (18)$$

Pro výpočet matice  $\mathbf{A}^+$  je výhodné rozložit matic  $\mathbf{A}$  pomocí singulárního rozkladu (SVD) [11],[3] na součin matic

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}^T, \quad (19)$$

kde platí  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  je diagonální. Pomocí vztahu (18) je možno určit

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T. \quad (20)$$

Hledané řešení rovnice (14) je možné nalézt ve tvaru

$$\mathbf{c}^{j+1} = \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_{exp}. \quad (21)$$

Matici hmotnosti  $\mathbf{M}$  a matice  $\mathbf{R}_i$  je možné určit před zahájením výpočtu. Při realizaci této identifikační metody se ukázalo, že je nutné sledovat průběh cílové funkce  $\chi$ . Pro některé případy materiálu se nedosáhne toho, aby platilo  $\chi < \chi_{error}$ , ale hodnota  $\chi$  stagnuje. Najde se tak alespoň lokální minimum. Iterace je proto nutné ukončit, pokud hodnota cílové funkce  $\chi$  neklesá nebo počet iterací je větší než určitá zvolená hodnota  $NI_{max}$ .

Občas se může vyskytnout případ, že se v průběhu realizace experimentu vynechá nějaká vlastní frekvence  $g_k$  nebo některé vlastní frekvence vzorku splývají. Proto je nutné

znát nejen hodnoty vlastních frekvencí  $g_k$ , ale i jejich pořadí ve spektru. Uvedený algoritmus umožňuje určení elastických konstant tak, aby se přibližně shodovaly vybrané vlastní frekvence. Dále je nutné pro daný typ materiálu stanovit minimální počet frekvencí, pro které lze nezávislé elastické konstanty určit. Při testech byl pro isotropní materiál stanoven minimální počet frekvencí 12, pro kubický materiál bylo potřeba 9 frekvencí.

O konvergenci metody postupných aproximací pojednává známá Banachova věta o pevném bodě [2]. V průběhu výpočtu může nastat situace, že aproximace leží mimo poloměr konvergence metody. V takovém případě se musí výpočet restartovat s jiným odhadem elastických konstant  $\mathbf{c}^0$ .

1. Type of material symmetry  $\Rightarrow$  number of independent elastic moduli  $M$  and assembly matrix  $\mathbf{P}_i$
2. Specimen dimensions  $\Rightarrow$  FEM mesh  $\Rightarrow \mathbf{N}, \mathbf{B}$
3. Input experimental frequencies  $g_k, k = 1, 2, \dots, N \Rightarrow \mathbf{b}_{exp}$
4.  $\mathbf{R}_i = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{P}_i \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$
5. Choose  $\mathbf{c}^0$ , check on positive definiteness  $\mathbf{C}^0, j=0$
6.  $\mathbf{K}^j = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}^j \mathbf{B} dV$
7. General eigenvalue problem  $(\mathbf{K}^j - \lambda_k^j \mathbf{M}) \mathbf{v}_k^j = 0$ , for  $k = 1, 2, \dots, N$
8.  $\lambda_k^j \Rightarrow f_k^j = \sqrt{\frac{\lambda_k^j}{4\pi^2}} \Rightarrow$  target function  $\chi^j = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \frac{f_k^j - g_k}{g_k} \right)^2}$
9. If  $(\chi^j < \chi_{error})$  and  $(j = NI_{max})$  and  $(\chi^{j-1} < \chi^j)$  EXIT with  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^j$
10.  $\mathbf{S}_i^j = (\mathbf{V}^j)^T \mathbf{R}_i \mathbf{V}^j, \quad \mathbf{A}^j$
11. Singular value decomposition  $\mathbf{A}^j = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}^T$
12. Solution  $\mathbf{c}^{j+1} = \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b}_{exp}$
13. Assembly of  $\mathbf{C}^{j+1}$  from  $\mathbf{c}^{j+1}$
14. If  $\mathbf{C}^{j+1}$  is not positive definite goto 5.
15.  $j = j + 1$ , goto 6.

Box 1: Algorithm for the determination of elastic moduli by DIM and FEM

### 3. Testovací příklady

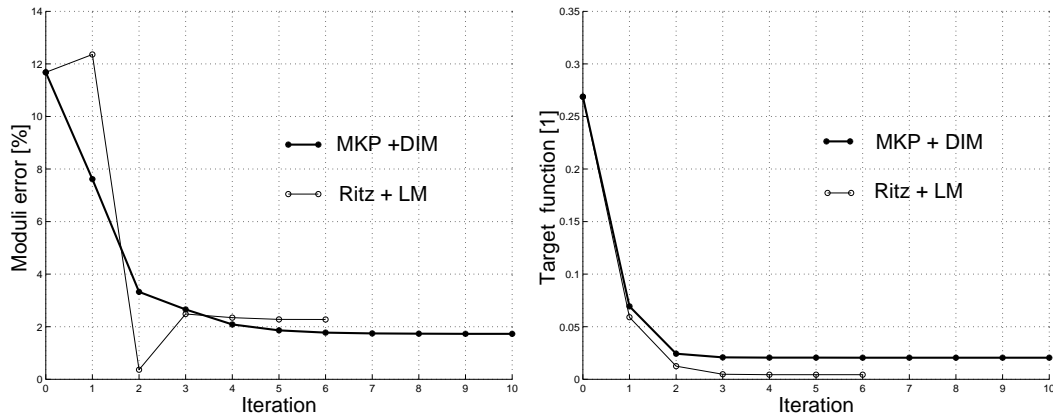
První numerický test byl proveden pro izotropní materiál, ale v ladícím procesu se uvažoval jako kubický (3 nezávislé parametry), a to konkrétně pro sklo s elastickými konstantami  $\bar{C}_{11}=82.0407$  GPa,  $\bar{C}_{12}=23.5666$  GPa,  $\bar{C}_{44}=29.2371$  GPa. Tyto hodnoty byly měřeny

pulsní metodou. Rozborem přesnosti byl stanoven horní odhad relativní chyby 1.3%. Hustota vzorku se stanovila vážením v kapalině a její hodnota pro sklo je  $\rho=2459.9 \text{ kg/m}^3$ . Metodou RUS se na vzorku tvaru kvádrů o rozměrech  $2.333 \times 2.889 \times 3.914 \text{ mm}$  určilo prvních dvacet nenulových vlastních frekvencí  $g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 20$ , byl stanoven horní odhad absolutní chyby měření vlastních frekvencí na hodnotu 105 Hz (použité krokování 35 Hz). Vlastní frekvence jsou řádově rovny  $5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ , takže lze odhadnout hodnotu cílové funkce  $\chi$  odpovídající přesnosti měření. Podle (1) je  $\chi_{error}=0.01 \%$ . Pokud je ve výpočtu hodnota cílové funkce menší nebo rovna této odhadnuté hodnotě, nemá význam pokračovat, protože by se tím dosáhlo meze přesnosti experimentu.

Jelikož jsou hodnoty elastických konstant pro daný materiál známy z nezávislého měření, je možné sledovat, jak vzdálené jsou v průběhu iterací aktuální hodnoty elastických konstant. Vzdálenost aktuálních hodnot od známých hodnot elastických konstant je možné určit podle vztahu

$$\delta C = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{i=1}^M \left( \frac{C_i - \bar{C}_i}{\bar{C}_i} \right)^2} \cdot 100 \quad [\%]. \quad (22)$$

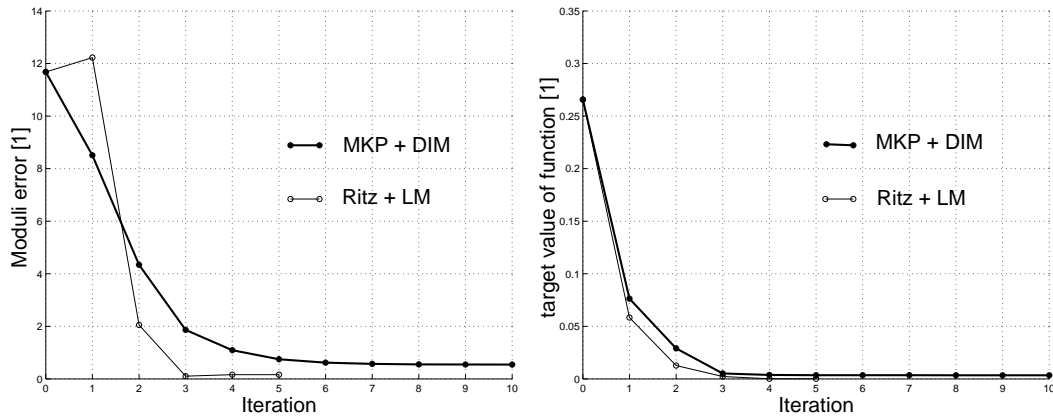
První odhad hodnot nezávislých elastických konstant byl zvolen takto:  $C_{11}=90 \text{ GPa}$ ,  $C_{12}=30 \text{ GPa}$ ,  $C_{44}=35 \text{ GPa}$ . Kvádr byl diskretizován kvadratickými konečnými prvky, hustota sítě byla  $10 \times 10 \times 10$  elementů. Pro toto zadání je na obr. 2. sledován průběh hodnoty  $\delta C$  a cílové funkce  $\chi$  v závislosti na počtu iterací. Po deseti iteracích výpočtu metodou DIM se dosáhlo hodnoty cílové funkce  $\chi=2.052e-2$ , tj. relativní chyba na jednu frekvenci 0.459 %, tomu odpovídaly hodnoty elastických konstant  $C_{11}=82.5675 \text{ GPa}$ ,  $C_{12}=24.7699 \text{ GPa}$ ,  $C_{44}=29.4032 \text{ GPa}$  a chyba vůči známým hodnotám byla  $\delta C=1.7 \%$ . Pro porovnání jsou také prezentovány výsledky pro kombinaci Ritzovy metody s LM metodou [8].



Obrázek 2: Numerical test 1. Evolution of moduli error  $\delta C$  (left) and evolution of target function  $\chi$  (right).

Další testovací úloha je téměř shodná s předchozí, pouze se liší v tom, že frekvence, pro které se určovali elastické konstanty, byly určeny numericky pomocí MKP na síti  $10 \times 10 \times 10$  prvků. Počáteční hodnoty elastických konstant byly opět zvoleny  $C_{11}=90 \text{ GPa}$ ,  $C_{12}=30 \text{ GPa}$ ,  $C_{44}=35 \text{ GPa}$ . Po deseti iteracích metody DIM se hodnota cílové funkce ustálila na hodnotě  $\chi = 3.4693e-3$ , odpovídající relativní chyba na jednu frekvenci byla 0.0775%,

tomu odpovídaly nalezené hodnoty elastických konstant  $C_{11}=82.1781$  GPa,  $C_{12}=23.938$  GPa,  $C_{44}=29.1208$  GPa a hodnota  $\delta C$  byla 0.5446 %. Na obr. 3 je zobrazen průběh konvergence metody pro tento numerický test, pro porovnání jsou také prezentovány výsledky LM metody [8].



Obrázek 3: Numerical test 2. Evolution of moduli error  $\delta C$  (left) and evolution of target function  $\chi$  (right).

#### 4. Diskuse a závěr

Na provedených numerických testech je možné sledovat vlastnosti uvedené metody. Průběh cílové funkce v průběhu ladění vykazuje stále klesající tendenci, až se hodnota  $\chi$  ustálí na určité hodnotě, a ladění už nepokračuje. V porovnání s LM metodou lze říci, že u DIM metody pokles  $\delta C$  představuje pokles  $\chi$ , což u LM metody není jisté. LM metoda se zdá přesnější, ale výsledky určené DIM jsou srovnatelné s experimentálně zjištěnými daty.

Značnou výhodou navržené metody je možnost jejího použití pro libovolný tvar vzorku. Při diskretizaci kvadratickými konečnými prvky lze očekávat přesnější výpočet vlastních frekvencí než pro Ritzovu metodu, což se také při testování přesnosti výpočtu frekvencí prokázalo. Metodu je možné dále rozšířit pro určování elastických konstant složitějších materiálů (nehomogenní materiály, bikrystaly), pro určování koeficientů proporcionálního útlumu materiálů, popř. pro zjišťování hodnot elastických konstant vyšších řádů.

#### 5. Poděkování

Tato práce vznikla za finanční podpory grantových projektů GA ČR č. 106/01/0396 a GA ČR č. 101/03/0331. Autoři práce proto děkují Grantové agentuře ČR za podporu.



## Reference

- [1] Bathe, K.J (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- [2] Collatz, L. (1970) *Funkcionální analýza a numerická matematika*. SNTL, Praha.
- [3] Fiedler, M. (1981) *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. SNTL, Praha.
- [4] Jiachao, Y. & Chern, Ch.T. (2001) Comparison of Newton-Gauss with Lavenberg-Marquardt Algorithm for Space Resection, in: *22nd Asian Conference on Remote Sensing*, Singapore.
- [5] Maynard, J. (1996) Resonant Ultrasound Spectroscopy. *Physics Today*, 49, pp.26-31.
- [6] Migliori, A. & Sarrao, J.L. & Wisscher, W.M. & Bell, T.M. & Lei, M. & Fisk, Z. & Leisure, R.G. (1993) *Physica B*, 183, pp.1-24.
- [7] Migliori, A. & Fisk, Z. (1993) *Crystal and Ultrasound*. Los Alamos Science, 21, pp.182-194.
- [8] Migliori, A. & Sarrao, J.L. (1997) *Resonant Ultrasound Spectroscopy, Application to Physics, Materials Measurements and Nondestructive Evaluation*. J. Wiley and Sons, Inc., New York.
- [9] Papadakis, E.P. (1990) The Measurement of Ultrasonic Velocity, The Measurement of Ultrasonic Attenuation, in: *Physical Acoustics, Vol. XIX* (R.N.Thurston & A.D.Pierce eds), Academic Press, Inc. New York.
- [10] Polak, E. (1977) *Computational Methods in Optimization*. Academic Press, London.
- [11] Press, W.H. & Flannery, B.P. & Teukolsky, S.A. & Vetterling, W.T. (1992) *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press.
- [12] Truell, R. & Elbaum, Ch. & Chick, B.B. (1969) *Ultrasonic Method in Solid State Physics*. Academic Press.
- [13] Ulrich, T.J. & McCall, K.R. (2000) *Determination of Elastic Moduli of Rock Samples Using Resonant Ultrasound Spectroscopy*. Thesis work, University of Nevada.
- [14] Ulrich, T.J. & McCall, K.R. (2002) Determination of elastic moduli of rock samples using resonant ultrasound spectroscopy, *J. Acoust. Soc. Am.*, 111, pp.1667-1674.
- [15] Visscher, W.M. & Migliori, A. & Bell, T.M. & Reinert, R.A. (1991) On the normal modes of free vibration of inhomogeneous and anisotropic elastic objects, *J. Acoust.Soc.Am.*, 90, pp.2154-2162.