

SIMULATION OF RESISTANCE CURVES USING GURSON PLASTICITY MODEL

J. Korouš*, J. Zemánková*

Summary: *The concept of J_R curves is well established in structure assessment. However, the shape of J_R curves is influenced by constraint effects significantly. Such phenomena can be modelled using micromechanical models of plasticity. The paper presents simulation of J_R curves using the complete Gurson model of plasticity, which was implemented into the finite element system WARP3D. The calculations were focused on stable crack growth in pipes. The correlation between triaxiality parameter and crack extension was also studied.*

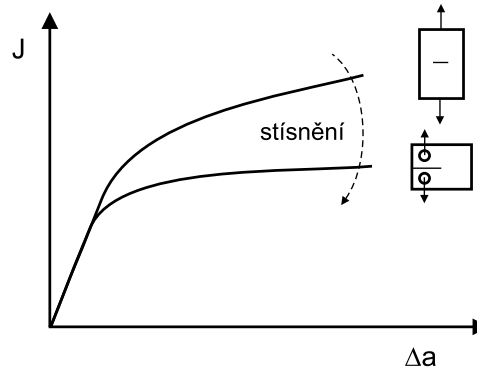
1. Úvod

Za uplynulých 50 let poskytla lomová mechanika řadu postupů, které byly úspěšně použity při řešení mnoha technických problémů. Již rozvoj lineární lomové mechaniky byl počátkem 50. let 20. století průlomovým činem. Koncepce založená na součiniteli intenzity napětí a předpokladu lineárně elastického napětí poskytla vhodný nástroj pro posouzení chování tělesa s trhlinou v křehkém materiálu. Relativní jednoduchost tohoto přístupu, vedla ke snaze tento přístup modifikovat a použít i v případech, kdy nejsou splněny podmínky platnosti lineární lomové mechaniky, tj. v případech, kdy se materiál chová nelineárně. Lze se tak mnohdy setkat s názorem, že odhady chování trhliny na základě metod klasické lineární lomové mechaniky, představují konzervativní odhady a případné elasticko-plastické chování představuje jakousi rezervu bezpečnosti. O tom, jak jsou tyto závěry unáhlené svědčí řada prací, jako např. (Zemánková a další, 1998). K velkému překvapení badatelů se zjistilo, že v řadě případů je u tvárných materiálů skutečné lomové zatížení výrazně nižší, než hodnoty predikované pomocí lineární lomové mechaniky.

Ve snaze zlepšit predikce stability trhliny se zrodil koncept dvouparametrové lomové mechaniky. Ta k tradičním parametrům, jako je součinitel intenzity napětí K a J -integrál zavedla další parametry, které jsou odvozeny z pole napětí před čelem trhliny a mají postihnout tzv. „constraint“. Pojem „constraint“ lze do češtiny přeložit jako stísnění rozvoje plastické zóny na čele trhliny. Pro případ, kdy je plastická zóna na čele trhliny malá vzhledem k jejím rozměrům, bylo zavedeno T -napětí (Larsson a Carlsson, 1973), v případě, kdy dojde k plastizaci značného rozsahu a pole napětí před čelem trhliny je charakterizováno tzv. HRR (Hutchinson-Rice-Rosengren) polem (Rice a Rosengren, 1967; Hutchinson, 1968) je často používán Q -parametr (O'Dowd a Shih, 1991; O'Dowd a Shih, 1992; O'Dowd, 1995; Shih a další, 1993). V řadě prací (např. (Brocks a Schmitt, 1995; Kordisch a další, 1989)) se vyskytuje charakterizace stísnění pomocí parametru triaxiality $h = \sigma_m / \sigma_e$, kde $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3$ je hydrostatické napětí a σ_e je redukované napětí HMM.

Vliv stísnění je evidentní při určování J_R křivek. Ty vyjadřují „odpor“ tělesa vůči nárůstu trhliny při monotónně rostoucím zatížení. U těles s vyšší úrovní stísnění je J_R -křivka strmější než je tomu v případě s nízkým stísněním jak názorně ukazuje obr. 1.

*Ing. Jan Korouš, Ing. Jaroslava Zemánková CSc., Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9; e-mail: korous@itam.cas.cz, zemankova@itam.cas.cz



Obrázek 1: Průběh J_R křivek pro zkušební tělesa s různou úrovní stísnění

V poslední době se objevila řada prací, které se snaží popsat tvar J_R -křivek pomocí aparátu dvouparametrové lomové mechaniky. V pracích (Chao a Zhu, 2000; Zhu a další, 2001) použili autoři k popisu J_R -křivek Q -parametru, v (Nyhus a další, 2002) je použita normalizace pomocí T -napětí.

Tam, kde se růst trhliny děje mechanismem nukleace, růstu a koalescence dutin, se nabízí využít pro simulaci a predikci J_R křivek relevantní mikromechanické modely. Poškození (nukleací a růstem dutin) i lom (koalescencí) mají ve svém matematickém popisu již zabudovanu funkční závislost na veličinách vyjadřujících triaxialitu napětí. Jinak řečeno, efekt stísnění plastické deformace je již zabudován v mikromechanických modelech, jako je např. Gursonův model plasticity, a pro 3D konfigurace, kde je použití „globálnějších“ parametrů stísnění problematické, tak sebou nese model řadu výhod.

2. Gursonův model plasticity

Postihnout nelineární deformační chování materiálu na základě skutečného vnitřního mechanismu děje, tj. evoluci dutin, se snaží modely plasticity, které lze označit jako „dutinové“ nebo též „dilatační“ modely. Slovo „dilatační“ vystihuje, že podmínka plasticity je též funkcí hydrostatického napětí a dochází k objemovým změnám, což se u klasických modelů plasticity nepředpokládá. Navíc se objevuje v dutinových modelech další stavová proměnná a tou je poměrný objem dutin f .

Existuje celá řada těchto modelů, k nejčastěji používaným však patří tzv. Gursonův model a jeho modifikace. Podmínka plasticity navržená původně Gursonem (Gurson, 1977) a později modifikována Tvergaardem a Needlemanem (Tvergaard a Needleman, 1984) (tzv. GTN model) má tvar:

$$g(\sigma_e, \sigma_m, \bar{\sigma}, f^*) = \left(\frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 \sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right) - (1 + q_3 f^{*2}) = 0. \quad (1)$$

Konstanty q_1 , q_2 a q_3 jsou další materiálové parametry modelu a σ_m je mez kluzu materiálu. V rovnici (1) je korigovaný objem dutin f^* vyjádřen empirickou relací:

$$f^* = \begin{cases} f & \text{pro } f \leq f_c, \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c) & \text{pro } f > f_c. \end{cases} \quad (2)$$

Vztah (2) lze interpretovat tak, že od jistého objemu dutin f_c , který odpovídá počátku koalescence dutin, dojde ke zrychlení růstu objemu dutin. Hodnota f_F odpovídá objemu dutin v okamžiku lomu a $f_u^* = 1/q_1$. Hodnota f_c byla v pracích Tvergaardových a Needlemanových považována za konstantu. Tento předpoklad se však ukazuje jako mylný. Jak ukázalo (Thomason,

1998), kritické parametry závisí na typu namáhání, speciálně pak na úrovni hydrostatického napětí, a na historii zatížení. Odvodil proto kritérium pro koalescenci dutin na základě analýzy mezního stavu vrstvy materiálu s dutinami.

Zhang použil toto řešení (Zhang, 2001) pro kulovou dutinu o poloměru R_x , která se nachází v krychlové „buňce“ materiálu o hraně $2X$ a formuloval podmínku pro počátek koalescence v závislosti na poměru mezi prvním hlavním napětím σ_1 a mezí kluzu materiálu matrice $\bar{\sigma}$. Je-li splněna nerovnost:

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} < \left(0, 1 \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{1, 2}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) , \quad (3)$$

potom ke koalescenci nedojde. Začátek koalescence dutin je určen okamžikem, kdy platí:

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \left(0, 1 \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{1, 2}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) . \quad (4)$$

Hodnota f , pro kterou je splněna rovnost (4), se potom označí f_c . Parametr r , použitý ve vztazích (3), (4) je dán vztahem (Zhang, 2001):

$$r = \frac{R_x}{X} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3f}{4\pi} e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)}}}{\frac{\sqrt{e^{(\epsilon_2 + \epsilon_3)}}}{2}} , \quad (5)$$

kde ϵ_1 , ϵ_2 a ϵ_3 jsou hlavní deformace ($\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$).

Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že hodnota f_c není materiálovým parametrem. Je vypočtena na základě představy o procesu deformace podmiňujícího propojování blízkých dutin.

Podmínku plasticity je ještě třeba doplnit evolučním zákonem pro růst objemu dutin. Rychlost růstu poměrného objemu dutin f lze vyjádřit ve tvaru:

$$\dot{f} = \dot{f}_{růst} + \dot{f}_{nukleace} . \quad (6)$$

V rovnici (6) vyjadřuje člen $\dot{f}_{růst}$ rychlost růstu již existujících dutin a lze ho vyjádřit ve tvaru $\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk}^p$.

Pro rychlost nukleace $\dot{f}_{nukleace}$ se používá řada vztahů, v závislosti, zda jde o napětěvě, či deformačně řízenou nukleaci dutin. K nejčastěji užívaným patří formulace podle (Chu a Needleman, 1980)

$$\dot{f}_{nucleation} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon}^p - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \dot{\epsilon}^p . \quad (7)$$

Konstanty f_N , s_N , ϵ_N představují parametry modelu a $\bar{\epsilon}^p$ je efektivní plastická deformace matrice.

3. Simulace růstu trhlin v trubkách

Mikromechanické (dutinové) modely jsou implementovány do některých komerčních programů MKP. Mnohdy však standardně implementovaný model nemusí uživateli vyhovovat. Potom záleží na tom, nakolik je použitý MKP program otevřený k uživatelským změnám.

Z tohoto důvodu byl zvolen programový systém WARP3D, který je vyvíjen na University of Illinois. Jde o výzkumný programový balík umožňující řešení rozsáhlých 3D úloh a to jak v oblasti statiky, tak i dynamiky. Je v něm navíc implementována řada nástrojů, které umožňují řešit problémy lomové mechaniky. Celý systém je volně distribuován pro vědecké a výzkumné účely. Zásadní ovšem je, že součástí distribuce jsou i úplné zdrojové kódy v jazyce Fortran, což umožňuje libovolný zásah do programu. To činí z programu WARP3D vhodný nástroj pro simulace růstu trhlin důlkovým lomem.

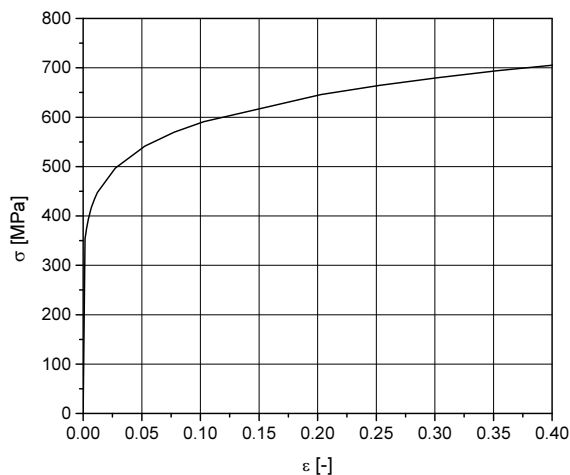
Ve stávající verzi je uživateli programu WARP3D k dispozici Gursonův model ve zjednodušené formě nepostihující koalescenci dutin. Při implementaci úplného Gursonova modelu bylo třeba provést řadu zásadních úprav programu WARP3D. Šlo především o úpravy podprogramů, které se podílejí na procesu integrace konstitutivních vztahů. Byl vytvořen zcela nový podprogram, který kontroluje po každém zatěžovacím stavu splnění podmínky (4).

Implementovaný úplný Gursonův mikromechanický model byl použit pro simulaci stabilního růstu v trubce. Pro výpočty MKP byla uvažována trubka o vnitřním poloměru $R_i = 100$ mm a tloušťce stěny $t = 20$ mm. Při modelování byla využita symetrie úlohy, takže byly vytvořeny sítě prvků pro čtvrtinu trubky o celkové délce 150 mm. Namáhání představoval vnitřní přetlak p a osová zatížení, které bylo reprezentováno osovým napětím $\sigma_{ax} = pR_i^2/(R_o^2 - R_i^2)$, kde R_i je vnitřní poloměr a R_o je vnější poloměr trubky. Tlak p monotónně rostl až do okamžiku, kdy trhlinka dorostla na okraj zjemněné části sítě, která byla vytvořena speciálně za účelem simulace růstu.

Analyzovány byly povrchové eliptické trhliny s poměrem maximální hloubky a a povrchové délky $2c$ o hodnotě $2c/a = 5$. Celkově byly řešeny 4 úlohy:

- Trubka s podélnou trhlinou $a/t = 0,25$
- Trubka s podélnou trhlinou $a/t = 0,5$
- Trubka s obvodovou trhlinou $a/t = 0,25$
- Trubka s obvodovou trhlinou $a/t = 0,5$

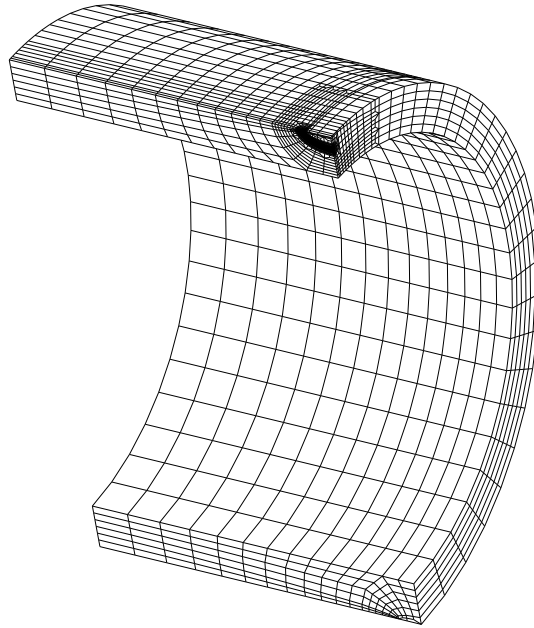
Materiálové vlastnosti odpovídaly materiálu X70 HSLA a byly převzaty z literatury (Besson a další, 2001). Tahový diagram tohoto materiálu je znázorněn na obr. 2.



Obrázek 2: Tahový diagram materiálu X70 HSLA.

Parametry Gursonova modelu q_1 , q_2 a q_3 byly stanoveny na základě hodnoty exponentu zpevnění n a poměru σ_K/E podle výsledků z (Faleskog a další, 1998). Z těchto dat vychází $q_1 = 1,63$, $q_2 = 0,88$ a $q_3 = q_1^2 = 2,6559$. Při řešení byla uvažována kontinuální nukleace dutin, tj. s konstantní hodnotou parametru $A = 0,2$ podle (Besson a další, 2001) a počáteční poměrný objem dutin byl zvolen $f_0 = 0,001$. Obr. 3 znázorňuje síť prvků pro trubku s podélnou eliptickou trhlinou o relativní hloubce $a/t = 0,25$. Síť pro ostatní konfigurace byly analogické.

Výpočet J -integrálu probíhal pomocí tzv. doménové integrace (Gullerud a další, 2000), která je implementována v systému WARP3D. Hodnoty J -integrálu byly určovány lokálně podél čela trhliny.



Obrázek 3: Síť prvků pro trubku s podélnou trhlinou o počáteční hloubce $a/t = 0,25$

Vlastní růst trhliny byl realizován „vypnutím“ elementu, je-li v něm dosaženo kritického poměrného objemu dutin f_F . Takový element již dále nevstupuje do řešení, jeho tuhost je nulová.

4. Výsledky

K iniciaci růstu defektu došlo ve všech případech v nejhlubším místě defektu. Tabulka 1 udává hodnoty zatížení, při kterých došlo k iniciaci růstu trhliny.

Tabulka 1: Úroveň zatížení p/σ_K , při které došlo k iniciaci růstu trhliny.

Konfigurace	p/σ_K
Podélná trhlina $a/t = 0,25$	0,2057
Podélná trhlina $a/t = 0,5$	0,1436
Obvodová trhlina $a/t = 0,25$	0,2475
Obvodová trhlina $a/t = 0,5$	0,2178

Další růst trhliny se kvalitativně lišil podle geometrie. U podélných trhlin došlo k zastavení prvotního růstu v nejhlubším místě a maximální nárůsty se přesunuly do oblasti zakřiveného čela defektu. Pokud se poloha bodu na čele charakterizuje souřadnicí s , kde $s = 0$ v nejhlubším místě trhliny a $s = 1$ na vnějším povrchu, pak k největším nárůstům došlo u podélných trhlin v intervalu $s = 0,7$ až $s = 0,8$. Čelo trhliny dostalo charakteristický tvar „kanoe“. To názorně ukazuje obr. 4, kde jsou znázorněny nárůsty podélné trhliny o počáteční hloubce $a/t = 0,25$.

U obvodových trhlin došlo taktéž k iniciaci růstu trhlin v nejhlubším místě. Na rozdíl od defektů orientovaných v podélném směru však byly nárůsty v tomto směru největší. To dokládá obr. 5, který znázorňuje nárůsty hloubek obvodové trhliny o počáteční hloubce $a/t = 0,5$.

Z vypočtených hodnot napětí lze určit maximální hodnotu parametru triaxiality h_{max} před každým bodem na čele trhliny. Průběh h_{max} podél čela trhliny pro podélnou trhlinu o počáteční hloubce $a/t = 0,25$ udává obr. 6. Podobně jako u podélné trhliny o počáteční hloubce $a/t = 0,5$

byla hodnota $h_{max} \approx 2$ pro bod $s = 0$, tj. nejhlubší místo, a $h_{max} \approx 1$ pro bod $s = 0,8$. V těchto místech se hodnoty h_{max} se zvyšujícím zatížením výrazně neměnily. K výraznému růstu h_{max} však došlo v oblasti $s = 0,2$ až $s = 0,8$. Zde místy přesahovalo h_{max} hodnotu 3. Průběh h_{max} podél čela obvodové trhliny o počáteční hloubce $a/t = 0,5$ ukazuje obr. 7.

Obr. 8 znázorňuje vypočtené J_R křivky pro různé body na čele podélné trhliny o počáteční hloubce $a/t = 0,25$. Je vidět, že křivky mají různý průběh. Strmější křivky se nacházejí v místech s malou úrovní stísnění plastické deformace, ploché křivky, které značí nízký odpor vůči šíření trhliny, se naopak nacházejí v místech výrazného stísnění, tedy v tomto případě v místě $s \approx 0,7$.

Porovnání vlivu konfigurace trhliny je zachyceno na obr. 9, který ukazuje průběhy zjištěných J_R křivek v nejhlubším místě trhliny, tj. pro $s = 0$.

5. Závěr

Do MKP systému WARP3D byl implementován úplný Gursonův model plasticity, který na rozdíl od standartních modelů zahrnuje všechny fáze evoluce dutin v kovových materiálech, tj. evoluci, růst a nukleaci.

Implementovaný model plasticity byl použit při simulaci růstu trhlín v trubce o vnitřním poloměru $R_i = 100$ mm a tloušťce stěny $t = 20$ mm. Analyzovány byly různé konfigurace podélných a obvodových trhlín.

Největší stabilní růst trhliny se objevil v místech, kde dosahovala triaxialita h nejvyšších hodnot. Kromě samotné korelace růstu trhlín s úrovní stísnění podchytily výpočty i kvalitativní rozdíly ve stabilním růstu různých defektů. U obvodových trhlín lze očekávat výrazný a v podstatě monotónní růst defektu do hloubky stěny trubky. U podélných trhlín je primární růst skrz stěnu zbrzděn a maximálních nárůstů hloubek trhliny je dosaženo v jiných oblastech. Tento efekt může být interpretačně důležitý především v LBB analýze a u tzv. přetěžovacích stress testů.

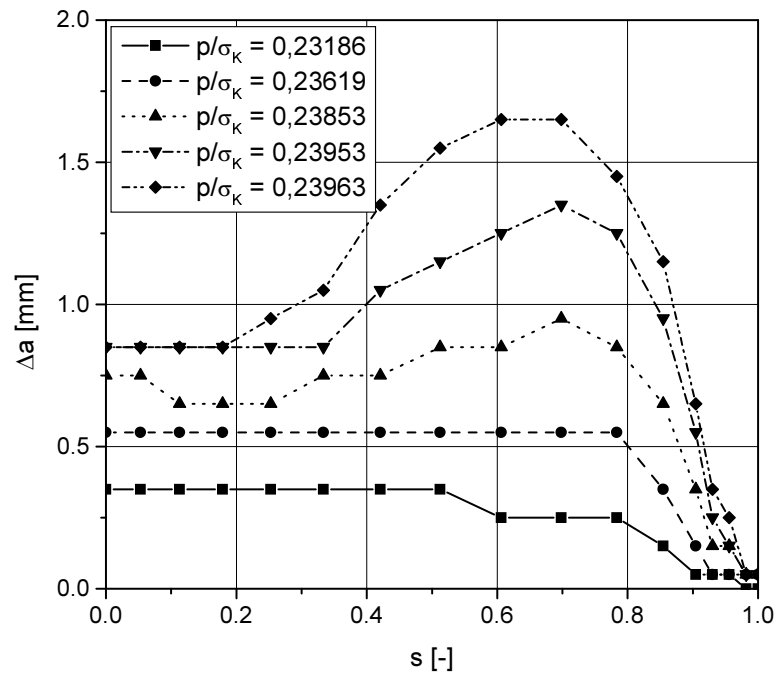
Tvar získaných J_R křivek je zcela jednoznačně ovlivněn úrovní stísnění plastické deformace před čelem trhliny. V místech, kde bylo dosaženo vysoké úrovně stísnění, je J_R křivka výrazně plošší. Je však nutno podotknout, že úplný Gursonův model postihuje mechanismus poškozování růstem dutin. Predikce pomocí tohoto modelu mohou selhat, pakliže se uplatní jiný mechanismus porušování. A to obvykle nevíme předem.

Poděkování Práce vznikla díky finanční podpoře Grantové agentury ČR v rámci projektu 101/03/0731. Za tuto podporu autoři děkují.

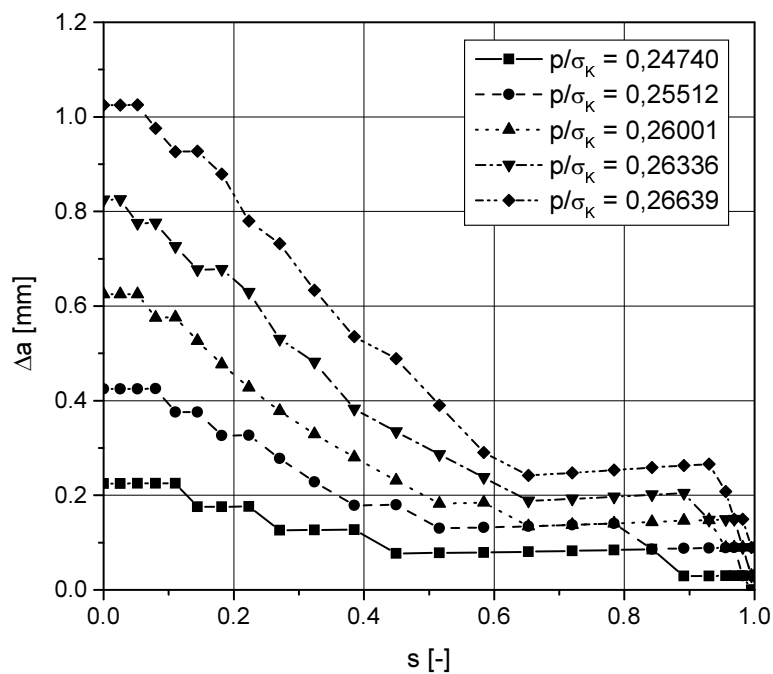
Literatura

- Besson, J., Steiglich, D., a Brocks, W. (2001). Modeling of Crack Growth in Round Bars and Plane Strains Specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 38:8259–8284.
- Brocks, W. a Schmitt, W. (1995). The Second Parameter in J-R Curves: Constraint or Triaxiality? Editoři Kirk, M. a Bakker, A., *Constraint Effects in Fracture Theory and Applications: Second Volume, ASTM STP 1244*, Philadelphia. American Society for Testing and Materials.
- Chao, Y. J. a Zhu, X. K. (2000). Constraint-Modified J-R Curves and Its Application to Ductile Crack Growth. *International Journal of Fracture*, 106:135–160.
- Chu, C. C. a Needleman, A. (1980). Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 102:249–256.
- Faleskog, J., Gao, X., a Shih, F. H. (1998). Cell Model for Nonlinear Fracture Analysis – I. Micromechanical Calibration. *International Journal of Fracture*, 89:355–373.

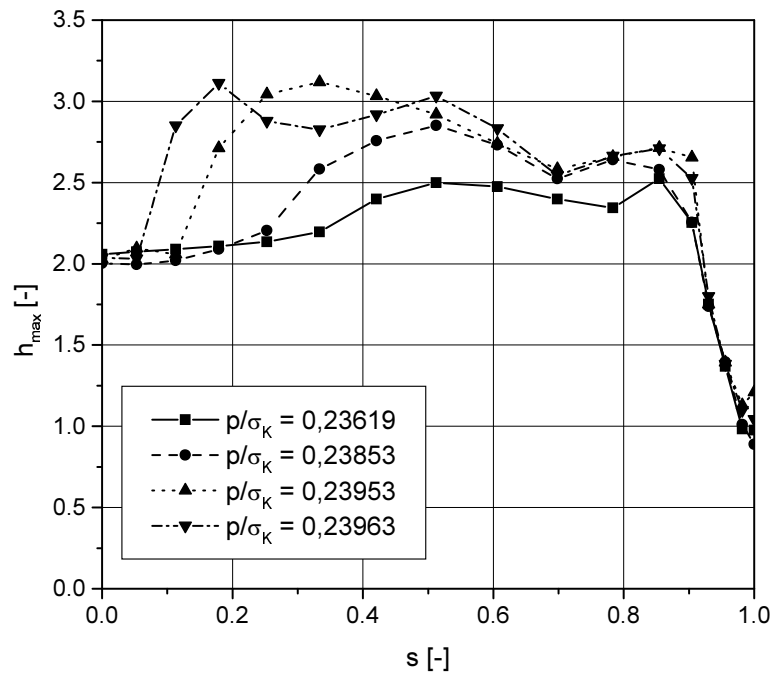
- Gullerud, A. S., Koppenhoefer, K. C., Roy, A., a Dodds Jr., R. H. (2000). WARP3D: 3-D Dynamic Nonlinear Fracture Analysis of Solids Using Parallel Computers and Workstations. Structural research series (srs) 607, uilu-eng-95-2012, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Gurson, A., L. (1977). Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99(2–15).
- Hutchinson, J. W. (1968). Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 16:13–31.
- Kordisch, H., Sommer, E., a Schmitt, W. (1989). The Influence of Triaxiality on Stable Crack Growth. *Nuclear Engineering and Design*, 112:27–35.
- Larsson, S. G. a Carlsson, A. J. (1973). Influence of Non-Singular Stress Terms and Specimen Geometry on Small-Scale Yielding at Crack Tips in Elastic-Plastic Materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 21:263–277.
- Nyhus, B., Zhang, Z. L., a Thallow, C. (2002). Normalisation of Material Crack Resistance Curves by the T Stress. *Proceedings of the 17th Biennial Conference on Fracture ECF 2002*, strany 561–568, Cracow.
- O'Dowd, N. P. (1995). Applications of Two Parameter Approaches in Elastic-Plastic Fracture Mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 52:445–465.
- O'Dowd, N. P. a Shih, C. F. (1991). Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter – I. Structure of Fields. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 39:989–1015.
- O'Dowd, N. P. a Shih, C. F. (1992). Family of Crack-Tip Fields Characterized By a Triaxiality Parameter – II. Fracture Applications. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 40:939–963.
- Rice, J. R. a Rosengren, G. F. (1967). Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 16:1–12.
- Shih, C. F., O'Dowd, N. P., a Kirk, M. T. (1993). A Framework for Quantifying Crack Tip Constraint. Editori Hackett, E. M., Schwalbe, K. H., a Dodds, R. H., *Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171*, strany 2–20, Philadelphia. American Society for Testing and Materials.
- Thomason, P. F. (1998). A View on Ductile-Fracture Modelling. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 21:1105–1122.
- Tvergaard, V. a Needleman, A. (1984). Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar. *Acta Metallurgica*, 32:157–169.
- Zemánková, J. a další (1998). Termodynamická koncepce lomové mechaniky. Závěrečná zpráva grantu GAČR 106/95/1433.
- Zhang, Z. L. (2001). A Complete Gurson Model. Editor Aliabadi, M. H., *Nonlinear Fracture and Damage Mechanics*, Southampton. WIT Press.
- Zhu, X. K., Jang, S. K., a Chen, Y. F. (2001). A Modification of J-Q Theory and Its Applications. *International Journal of Fracture*, 111:47–52.



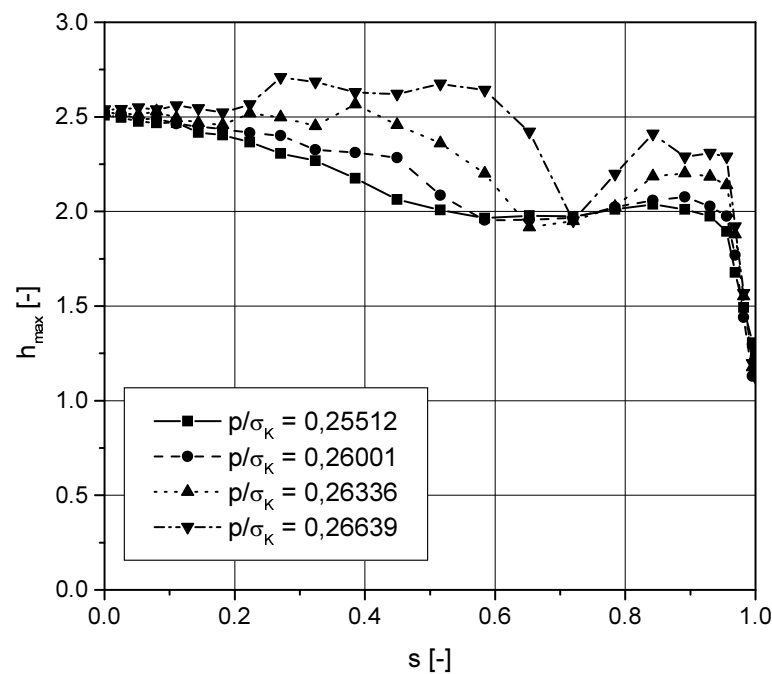
Obrázek 4: Nárůsty hloubky trhliny podél čela trhliny pro různé úrovně zatížení. Podélná trhlina $a/t = 0,25$



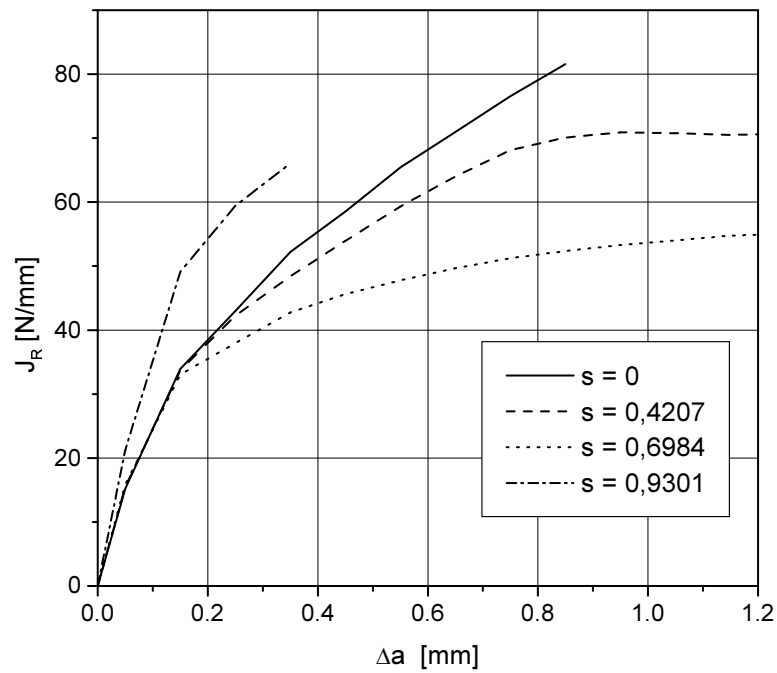
Obrázek 5: Nárůsty hloubky trhliny podél čela trhliny pro různé úrovně zatížení. Obvodová trhlina $a/t = 0,5$



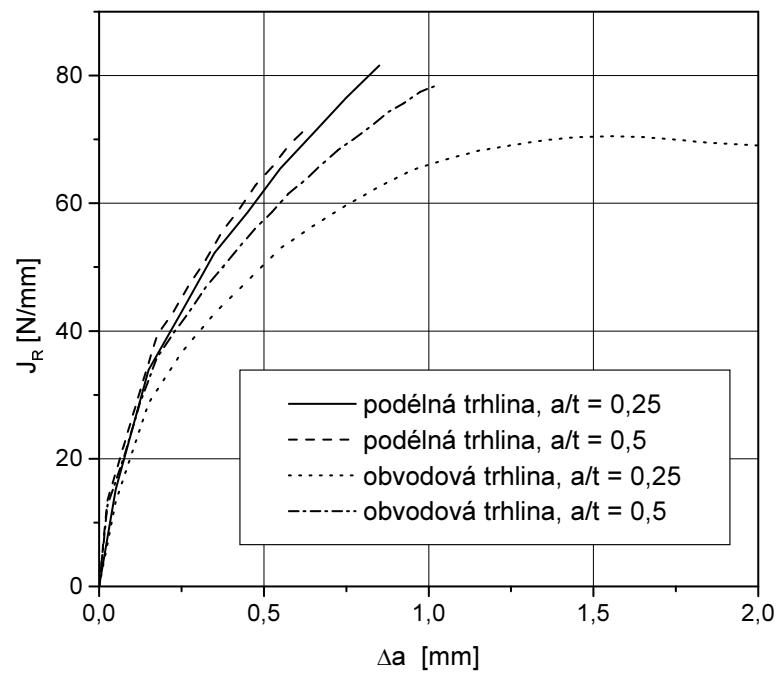
Obrázek 6: Průběh hodnoty triaxiality h podél čela trhliny pro různé úrovně zatížení. Podélná trhlina $a/t = 0,25$



Obrázek 7: Průběh hodnoty triaxiality h podél čela trhliny pro různé úrovně zatížení. Obvodová trhlina $a/t = 0,5$



Obrázek 8: J_R křivky pro různé body na čele trhliny. Podélná trhlina $a/t = 0,25$



Obrázek 9: J_R křivky pro bod $s = 0$ a různé konfigurace trhliny