

FRACTURE STRAIN DIAGRAM AND STRENGTH CRITERION

J. Fuxa*

Summary: *Fracture strain diagram. Strength criterion as a contribution of physics and mechanics. Review. Definition of the "reference normal" and "reference shear" stresses. Strength criterion based on reference normal and reference shear stresses, its verification with using some experimental fracture strain diagram together with the flow stress curve of the tested material. Haigh's diagram calculation.*

1. Úvod

Kritéria pevnosti materiálu jsou dlouhodobým předmětem zájmu jak výpočtářů, tak konstruktérů. Již dlouhou dobu se řada badatelů (viz přílohu A) snaží zformulovat dostatečně přesné pevnostní kritérium. Tento příspěvek si všímá souvislostí mezi mezním diagramem plasticity a kritériem statické pevnosti (kvazi)izotropního materiálu.

2. Diagram mezní plasticity

Diagramy mezní plasticity (Hosford & Caddell; Kolmogorov at al., 1977) jsou využívány při návrzích technologií tváření. Charakterizují deformační schopnost daného materiálu. Udávají závislost mezní (intenzity) deformace – při níž již dochází k porušení soudržnosti tvárněného materiálu – na druhu napětíového stavu, který hodnotu mezní deformace silně ovlivňuje. Převládají-li tahové složky napětíového stavu, je obvykle mezní deformace podstatně nižší, než když převládají složky tlakové.

3. Kritérium statické pevnosti

Přehled vybraných kritérií je uveden v příloze A. Významné fyzikálně-metalurgické aspekty tvárného porušení jsou uvedeny v příloze B. Způsob vytvoření „integrálních“ referenčních napětí (veličin σ_R a τ_R) – je uveden v příloze C. Za těchto okolností lze kritérium tvárné pevnosti hledat jako závislost $\tau_R = f(\sigma_R)$, nejjednodušší tvar je:

$$\tau_R = A - B \cdot \sigma_R . \quad (1)$$

Vzhledem k výrazům definujícím σ_R a τ_R jsou na tvar $\tau_R = f(\sigma_R)$ převeditelná také všechna „oktaedrická“ a některá „invariantová“ kritéria z přílohy A a při znalosti tvaru kon-

* Prof. Ing. Jan Fuxa, CSc.: Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava; 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava – Poruba; tel.: 420.596 994 412, fax: - ; e-mail: jan.fuxa@vsb.cz

stituční rovnice materiálu také obě uváděná „kombinovaná“ kritéria pevnosti (Fuxa I, 1998). Pro případ křehkého porušení lze využít koncepci vycházející z Griffithovy představy o kritickém rozměru defektu a jemu příslušejícímu kritickému napětí. Tyto souvislosti se promítají do experimentálně stanovitelného „napětí mikrokolapsu“ σ_{MK} (Měškov, 1981), které je výrazně závislé na strukturních parametrech. σ_{MK} lze začlenit do navrhovaného kritéria pevnosti, jak je uvedeno na příkladě v závěru tohoto příspěvku.

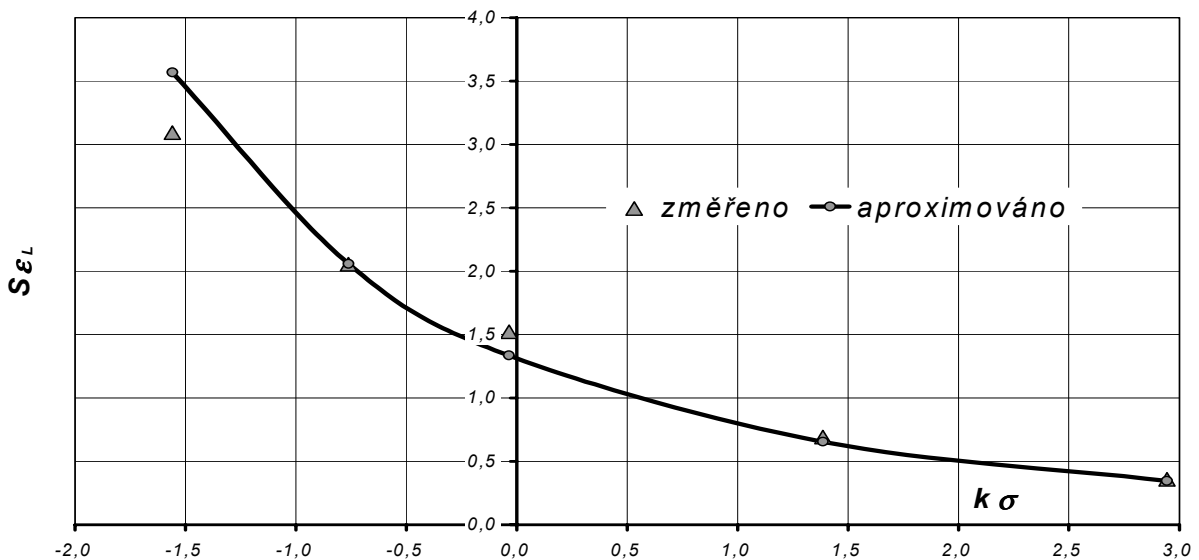
4. Aplikace

Aplikovatelnost „referenčního kritéria“ pevnosti je doložena na příkladu přepočtu diagramu mezní plasticity na kritérium statické pevnosti. Pro tento účel jsou využita experimentální data uváděná v literatuře (Kolmogorov et al., 1977) - viz body v Obr. 1. $S_{\epsilon L}$ značí mezní intenzitu deformace, $k\sigma = \sigma_0 / S_{\sigma}$ je ukazatel napět'ového stavu, S_{σ} je intenzita napětí a σ_0 je oktaedrické normálové napětí. Při znalosti konstituční rovnice materiálu $S_{\sigma} = K_1 \cdot S_{\epsilon}^n$ - kterou lze pro zkoušenou ocel vyjádřit vztahem $S_{\sigma} = 948 \cdot S_{\epsilon}^{0.298}$ - byly spočteny konstanty A , B rovnice (1). Z těchto údajů pak byla vyřešena závislost:

$$S_{\epsilon L} = \{ A \cdot K_0 / [K_1 \cdot (1 + B \cdot K_0 \cdot k\sigma)] \}^{1/n} \dots \text{číselně:} \quad (2)$$

$$S_{\epsilon L} = [1.0854 / (1 + 0.1653 \cdot k\sigma)]^{3.3557}, \quad (2a)$$

kteřá je jako plná čára rovněž zakreslena v diagramu mezní plasticity. Je patrná dobrá shoda experimentu s teorií. K_0 je konstanta pro přepočet mezi referenčním smykovým napětím a intenzitou napětí.



Obr.1 Diagram mezní plasticity oceli 12 031

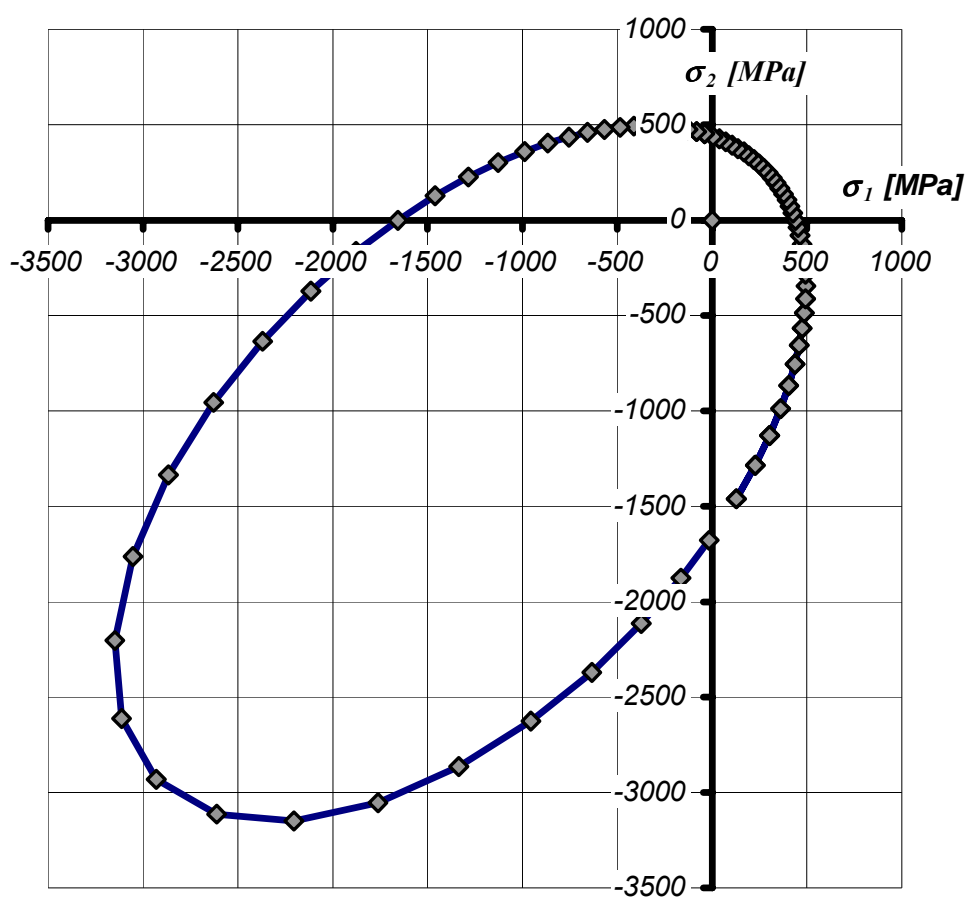
V technické praxi je zaveden pojem intenzita napětí S_{σ} (efektivní napětí), který je numericky snadno převaditelný na hodnotu referenčního smykového napětí: $\tau_R = 0,365 \cdot S_{\sigma}$. Současně je zřejmé, že referenční normálové napětí σ_R je numericky shodné s oktaedrickým (středním, hydrostatickým) napětím σ_0 . Přestože se jedná z hlediska fyzikální interpretace o

odlišné veličiny, lze pro praktické výpočty pevnostních kritérií využívat závislost $S_{\sigma}(\sigma_0)$ (Fuxa, 2000).

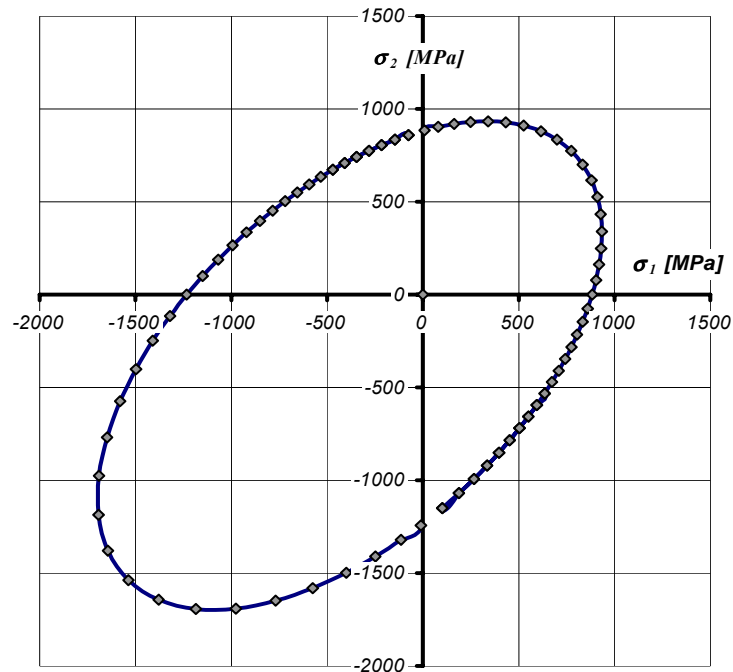
Kritérium pevnosti tvárné oceli 12 031 pak lze vyjádřit také ve tvaru:

$S_{\sigma} = 1029 - 0,496 \cdot \sigma_0$ - současně s podmínkou křehkého porušení: $\sigma_1 = \sigma_{MK}$; $\sigma_2 = \sigma_{MK}$; $\sigma_3 = \sigma_{MK}$; $\sigma_{MK} = 1250$ [MPa].

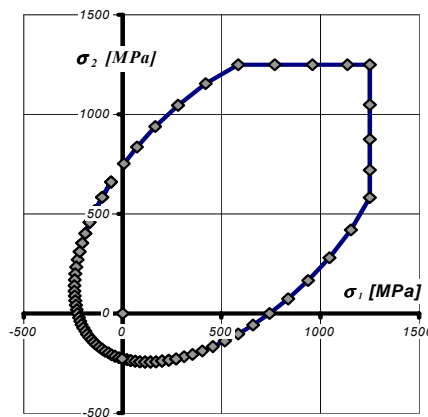
Z kritériálních vztahů $\tau_R(\sigma_R)$ nebo $S_{\sigma}(\sigma_0)$ lze vykreslovat Haighovy diagramy, které znázorňují řezy mezní plochy statické pevnosti rovinami $\sigma_3 = konst.$ Obr. 2 je kreslen pro tlakové hlavní napětí $\sigma_3 = -800$ [MPa], Obr. 3 pro nulové třetí hlavní napětí, Obr. 4 pro tahové hlavní napětí $\sigma_3 = +800$ [MPa]. Je dobře patrný příznivý vliv tlakových napětí na odolnost materiálu proti porušení soudržnosti. Z Obr. 3 ($\sigma_3 = 0$) je rovněž zřejmé, že i tvárný materiál vykazuje menší mez pevnosti v tahu než v tlaku.



Obr.2 Haighův diagram pro tlakové třetí hlavní napětí $\sigma_3 = -800$ MPa



Obr.3 Haighův diagram pro nulové třetí hlavní napětí $\sigma_3 = 0$



Obr.4 Haighův diagram tahové třetí napětí $\sigma_3 = 800 \text{ MPa}$

5. Závěr

Bylo předloženo *kritérium pevnosti*, které vychází z poznatků fyziky kovů a respektuje tvárné i křehké porušení. $\tau_R = f(\sigma_R)$ je obecný tvar tohoto kritéria, pracovníě nazvaného "*kritérium*"

referenčních napětí". Konkrétní tvar této závislosti - volba funkce f včetně stanovení hodnot konstant - závisí na konstituci materiálu (jeho chemickém složení, struktuře), ale také na teplotě a deformační rychlosti zatěžování, v některých případech rovněž na historii zatěžování, na časovém sledu jednotlivých zátěžných účinků.

Tvárné statické porušení je v nejjednodušším případě popsáno závislostí: $\tau_R = A - B \cdot \sigma_R$ (případně $S_\sigma = A_0 - B_0 \cdot \sigma_0$). Kritérium křehké pevnosti bylo převzato z práce (Měškov, 1981) a má tvar: $\sigma_1 = \sigma_{MK}$; $\sigma_2 = \sigma_{MK}$; $\sigma_3 = \sigma_{MK}$; $\sigma_{MK} = konst.$, když σ_{MK} značí napětí mikrokolapsu materiálu, závislé na strukturních parametrech a je určováno experimentálně. Pro jeho odhad je uváděna regrese: $\sigma_{MK} = S_{\sigma_{L\ tsh}} / (1 - \psi^2)$, ψ značí poměrné zúžení při zkoušce tahem při pokojové teplotě.

Konstanty v kritériu uváděné mají *jednoznačnou fyzikální interpretaci* a souvisí jak se *strukturou* kovu, tak také s *napěťovým stavem* (Fuxa, II 1998, 1997, 1996).

6. Poděkování

Grantová agentura ČR finančně podpořila projekt č. 101/96/1477, během jehož řešení se rodily základní představy, publikované v tomto příspěvku.

7. Literatura

- Fuxa, J. (I 1998) Výzkum kritérií pevnosti kvaziizotropních materiálů namáhaných monotónně rostoucími složkami víceosého napěťového stavu – závěrečná zpráva projektu GAČR číslo 101/96/1477, VŠB-TU Ostrava, prosinec 1998
- Fuxa, J. (2000) Strength Criteria for Quasi-isotropic Statically Loaded Materials, In: Congress Proceedings of the 3rd International Congress of Croatian Society of Mechanics, Cavtat/Dubrovnik, Croatia, 2000, p. 353-359
- Fuxa, J. (II 1998) Large Plastic Strain Theory Used for Effective Strain and Strain Rate Calculation in Torsion Test, In: 15th Symposium "Danube – Adria" on Experimental Methods in Solid Mechanics, September 30 – October 3, 1998. Bertinoro / Forlì – Italy, p. 45, 46
- Fuxa, J. (1997) Theory of the Torsion Test Evaluation, In: Proceedings of the 2nd Congress of Croatian Society of Mechanics, Supetar – Croatia, 18 – 20 September 1997, p. 353 - 359
- Fuxa, J. (1996) Výpočet konstituční rovnice z krutové zkoušky za studena, In: „Sborník vědeckých prací VŠB - TU Ostrava“, číslo 1, 1996, ročník XLII, řada strojní, článek č. 1165, s. 37 – 45
- Hosford, W.,F., Caddell, R.,M.: Metal Forming Mechanics and metallurgy, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.07632
- Kolmogorov, V.L., Bogatov, A.A., Migačev, B.A., Zudov, E.G., Frejdenzon, JU.E., Frejdenzon, M.,E (1977) Plastičnost i razrušenie, *METALLURGIJA*, 1977
- Měškov, JU.JA (1981) Fizičeskije osnovy pazrušenija stalnych konstrukcij. KIEV, Nauk.Dumka 1981

Příloha A

Kritéria statické pevnosti

NAPĚŤOVĚ KONCIPOVANÁ

"OKTAEDRICKÁ" kritéria

Jang, Burzynski, Hu a Pae

$$\tau_0^2 + C \cdot \sigma_0^2 + B \cdot \sigma_0 = A \quad \dots \text{spec. pro } C = 0:$$

Balandin

$$\tau_0^2 + B \cdot \sigma_0 = A$$

Serensen, Freudentahl, Miroľjubov, Botkin

$$\tau_0 + B \cdot \sigma_0 = A$$

Drucker, Prager

$$\tau_0 = (A - B \cdot \sigma_0)^2$$

Reimann

$$\tau_0^2 + C \cdot \tau_0 + B \cdot \sigma_0 = A$$

Golcev

$$(\tau_0 + B \cdot \sigma_0)^\alpha = A$$

Liu Šu I

$$\tau_0^2 + B \cdot \text{sign}(\sigma_0) \cdot \sigma_0^2 = A$$

Škarbelis

$$\tau_0^\alpha + B \cdot \sigma_0^\beta = A$$

Filoněnko-Borodič I

$$\sigma_0 = A \cdot \tau_0 + B \cdot \tau_0^2 + C + D/\tau_0$$

"INVARIANTOVÁ" kritéria

typu: $F(I_1, D_2, D_3) = 0$,

Drucker II

$$D_2^3 - A \cdot D_3^2 = B$$

Genijev, Kisjuk

$$D_2 = (A \cdot I_1 + B) \cdot (1 - C \cdot (1 - D_3/2 \cdot (D_2/3)^{-3/2}))$$

"SMÍŠENÁ" kritéria:

Hershey

$$\tau_0 = (A - B \cdot \sigma_0) \cdot (1 + C \cdot \cos(6 \cdot \arcsin(3^{1/2} \cdot (1 + \mu_\sigma) / 2 / (3 + \mu_\sigma^2)^{1/2})))$$

Jagn, Vinogradov

$$\tau_0 = A + B \cdot \sigma_0 + C \cdot (1 - \cos 2\pi \cdot \mu_\sigma)$$

Daviděnkov

$$\tau_{\max} + B \cdot \sigma_0 = A$$

Tarassenko I

$$\tau_{\max} + (B + C \cdot \sin \pi \cdot \mu_\sigma) \cdot \sigma_0 = A$$

Tarassenko II

$$\sigma_1 + (B + C \cdot \sin \pi \cdot \mu_\sigma) \cdot \sigma_0 = A$$

Pisarenko, Lebeděv

$$\tau_0^\alpha + B \cdot \sigma_1^\beta = A$$

Bailey

$$|\sigma_1 - \sigma_2|^\alpha + |\sigma_2 - \sigma_3|^\alpha + |\sigma_1 - \sigma_3|^\alpha = 2 \cdot \sigma_{Pt}^\alpha$$

Schleichel, Sandel I

$$w_c + B \cdot \sigma_0 = A, \text{ rozepsáním: } \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) + (\sigma_{Pd} - \sigma_{Pt}) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{Pd} \cdot \sigma_{Pt}$$

Filoněnko - Borodič II

$$F(\mathbf{FB}_1, \mathbf{FB}_2, \mathbf{FB}_3) = 0,$$

$$FB_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

$$FB_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \alpha \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

$$FB_3 = \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3 + \beta \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2^2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_3 \cdot \sigma_1^2) + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2 \cdot \sigma_1 + \gamma \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

Pro $\alpha \neq 2$ a také $3 \cdot \beta - \gamma \neq 3$

napjatost "NA OBEČNÉ ROVINĚ"

Ondráček

$\tau_p = \tau_{pM}$, odtud:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 \cdot ((1 - \mu_\sigma) \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha_x \cdot \cos^2 \alpha_y + (1 + \mu_\sigma) \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha_y \cdot \cos^2 \alpha_z + 4 \cdot \cos^2 \alpha_x \cdot \cos^2 \alpha_z)^{1/2} = \tau_{pM}$$

$\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ - směrové kosiny normály obecné roviny ρ

Volkov I

$$\tau_p^2 - (A - B \cdot \sigma_p)^2 = 0$$

Volkov II

$$\tau_p^2 - (A - B \cdot (\sigma_p + \sigma_0))^2 = D$$

DEFORMAČNĚ KONCIPOVANÁ

"DEFORMAČNÍ" kritéria

Sandel II

$$\gamma_{\max} + B \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = A$$

Doščinskij

$\epsilon_{ef} = A$

$$\epsilon_{ef} = ((\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)/3)^{1/2}, \text{ odtud:}$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (2 \cdot \mu) / (1 + 2 \cdot \mu^2)$$

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) = \sigma_{Pt}^2$$

eventuelně:

$$\epsilon_{ef} + B \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = A, \text{ odtud:}$$

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (2 \cdot \mu) / (1 + 2 \cdot \mu^2))$$

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)^{1/2} + (\sigma_{Pd} - \sigma_{Pt}) / (\sigma_{Pd} + \sigma_{Pt}) \cdot$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2 \cdot \sigma_{Pt} \cdot \sigma_{Pd} / (\sigma_{Pt} + \sigma_{Pd})$$

NAPĚŤOVĚ - DEFORMAČNÍ KRITÉ- RIA

"KOMBINOVANÁ" kritéria

Smirnov-Aljajev

$$S_{eM} = f(k_{\sigma})$$

Kolmogorov

$$S_{AM} = f(k_{\tau}) \dots (\text{diagram mezní plasticity})$$

$$k_{\tau} = \sigma_0 / S_{\sigma} / 3^{1/2}$$

kritérium "REFERENČNÍCH NAPĚTÍ"

Fuxa

$$\tau_R = f(\sigma_R), \text{ kupříkladu:}$$

$$(a) \tau_R = A_1 \cdot |\sigma_R - \sigma_B| \dots \sigma_R < \sigma_B$$

$$(b) \tau_R = A_3 \cdot |\sigma_R - \sigma_B|^{\alpha} \dots \sigma_R < \sigma_B$$

$$(c) \tau_R = A_0 - B_0 \cdot \sigma_R \dots \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 < \sigma_{MK}$$

SYMBOLIKA:

A, A₀, A₁, A₂, A₃, B, B₀, C, D, α, β, γ, σ_B -
konstanty

μ - Poissonovo číslo

σ₁, σ₂, σ₃ - hlavní napětí v pořadí:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

σ_{Pt}, (σ_{Pd}) - napětí na mezi pevnosti v tahu
(tlaku)

σ₀, (τ₀) - normálové (smykové) oktaedrické
napětí

σ_{MK} - napětí mikrokolapsu

τ_{max} - maximální smykové napětí

T - intenzita smykových napětí

$$T = (1/6)^{1/2} \cdot ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)^{1/2}$$

$$\tau_0 = (2/3)^{1/2} \cdot T$$

τ_R, (σ_R) - referenční smykové (normálové)
napětí obecné 3-osé napjatosti
w, (w_{TV}) - měrná potenciální energie na-
pjatosti (na změnu tvaru)

I₁ - první invariant tenzoru napětí

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

D₂ - druhý invariant deviatoru napětí

$$D_2 = 1/6 \cdot ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)$$

D₃ - třetí invariant deviatoru napětí

$$D_3 = 1/27 \cdot (2 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \cdot (2 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) \cdot (2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

μ_σ - Lodeho parametr

$$\mu_{\sigma} = (2 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$$

pro σ₁ > σ₂ > σ₃ nabývá hodnot -1 až +1

ε₁, ε₂, ε₃ - hlavní deformace

$$\epsilon_1 = 1/E \cdot (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2 - \mu \cdot \sigma_3) \text{ atp.}$$

pro oblast pružnou

k_σ - ukazatel napětového stavu (Smirnov-
Aljajev)

$$k_{\sigma} = I_1 / S_{\sigma}; \text{ event.: } \sigma_0 / S_{\sigma}$$

S_σ - intenzita napětí

$$S_{\sigma} = 1/2^{1/2} \cdot ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)^{1/2}$$

S_ε - intenzita deformace

$$S_{\epsilon} = 2^{1/2}/3 \cdot ((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2)^{1/2}$$

S_{AM} - mezní intenzita smykových deformací

$$S_{AM} = (2/3 \cdot ((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2))^{1/2}$$

Příloha B

Významné fyzikálně-metalurgické aspekty tvárného porušení

Oceli jsou *krystalické* látky s mřížkou kubickou, prostorově centrovanou (KSC, alfa, ferit) nebo plošně centrovanou (KPC, gama, austenit). Obsahují četné poruchy *bodové* (vakance, interstice, substituční atomy), poruchy *čárové* (hranové, šroubové, smíšené či parciální dislokace), poruchy *objemové* (precipitáty, vměstky). Oceli jsou *polykrystalické* látky, hranice mezi zrny i vlastní velikost zrn ovlivňují odezvu materiálu na jeho zatížení. *Tvárné porušení* je spojeno s předchozí *plastickou deformací*, která se obvykle uskutečňuje skluzem *volných dislokací* (v krystalograficky určených skluzových rovinách a v nich ve směrech nejhustěji obsazených atomy). Vzhledem k odlišné orientaci skluzových systémů v jednotlivých zrnech je k uskutečnění plastické deformace polykrystalické látky nutno *aktivovat nejméně pět odlišných skluzových systémů* (Mieses). Plastická deformace je tak závislá na smykových napětích (průmětech do směrů skluzu), která působí v *několika* skluzových rovinách. Jestliže překážky dislokačního pohybu zablokují pohyblivost dislokací, pak zvyšování smykových napětí již nevede k další plastické deformaci ale k (tvárnému) lomu. Přítomnost *tahových napětí* na skluzových rovinách porušení usnadňuje, opačně působí napětí tlaková. *Křehké porušení* souvisí normálovým napětím, „odtrháváním“ krystalografických rovin a je rovněž strukturně podmíněno. Může být charakterizováno *tahovým napětím mikrokolapsu* (Měškov, 1981) a je považováno za charakteristickou konstantu dané struktury (nezávislou kupříkladu na teplotě).

Kvaziizotropní materiál staticky namáhaný se tedy porušuje *tvárným* nebo *křehkým lomem*. Sledujme zprvu situaci v některé ze skluzových rovin ρ , v níž se vyskytuje jak smykové napětí τ_ρ tak normálové napětí σ_ρ . τ_ρ zde v závislosti na své velikosti vyvolává buď pružný zkos γ_ρ nebo plastickou smykovou deformaci nebo určitou mezní plastickou deformaci (porušení). σ_ρ tuto mezní deformaci zvyšuje (je-li tlakové) nebo snižuje (je-li tahové).

Protože krystalický materiál obsahuje mnoho latentních skluzových systémů (rovin a směrů skluzu), uskutečňuje se skluz přednostně v těch rovinách ρ_i , v nichž je dostatečně velká složka smykového napětí τ_{ρ_i} (tam pak v těch směrech, do nichž je největší průmět τ_{ρ_i}). Napětí τ_{ρ_i} s rozvojem plastické deformace vzrůstá vlivem dislokačního pohybu, který je provázený generováním dalších dislokací F-R zdroji a hromaděním dislokací u překážek. Pokud τ_{ρ_i} není schopno vyvolávat další plastickou deformaci, pak buď může skluz pokračovat v jiné (jiných) skluzové rovině (s menším odporem proti plastické deformaci) anebo další zvýšení τ_{ρ_i} vede ke vzniku mikrotrhliny - potenciálnímu zárodku lomu.

V souvislosti s uváděným Miesesovým zjištěním lze dále očekávat, že pevnostní kritérium polykrystalického materiálu nebude vázáno napět'ovými poměry jen jediné roviny. Tahové složky napět'ového stavu napomáhají porušení soudržnosti kovu, zatímco tlakové složky napjatosti sklon materiálu k porušení potlačují.

Příloha C

Referenční normálové a smykové napětí

Napjatost v bodě tělesa je dána složkami obecného napět'ového stavu ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$) a lze ji vždy transformovat na napjatost určenou *hlavními napětími* ($\sigma_1, \sigma_2,$

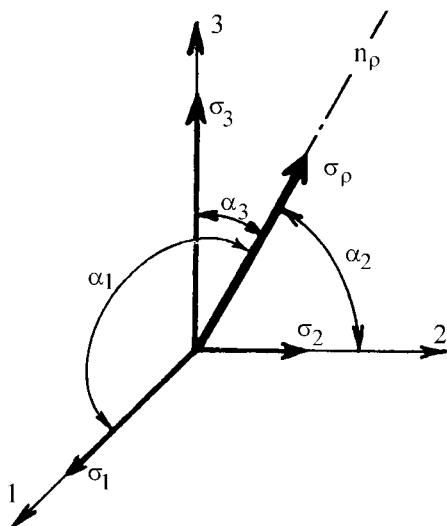
σ_3). Napětíové poměry na obecné rovině ρ (určené normálou $n_\rho [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ vůči směrům 1, 2, 3 hlavních napětí jsou určitelné z Obr. A. Napjatost σ_ρ a τ_ρ na obecné rovině je dána rovnicemi (a), (b) a referenční napětí σ_R, τ_R (Fuxa, I 1998), reprezentující určitá „průměrovaná“ napětí daného napětíového stavu $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, mohou být počítána z definičních vztahů (c), (d). Transformační vztahy pro převod σ_ρ, τ_ρ z kartézských do sférických souřadnic vyplynou z obr. B:

$$\sigma_\rho = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3 \quad (a)$$

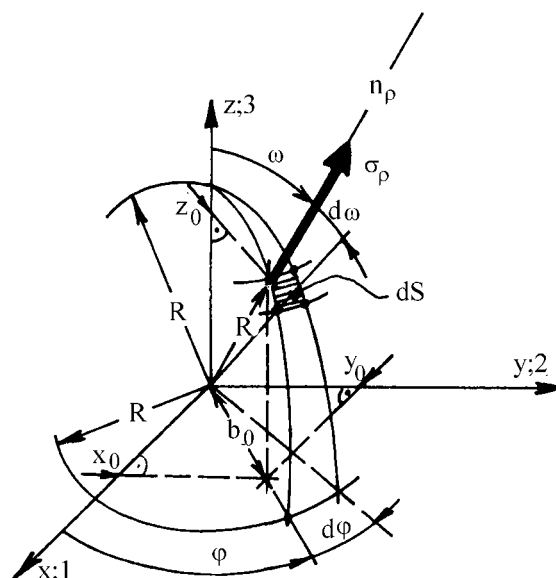
$$\tau_\rho = [(\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3) - (\sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3)^2]^{1/2} \quad (b)$$

$$\sigma_R = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{(S)} \sigma_\rho(R, \omega, \varphi) \cdot dS / (4\pi R^2), \quad (c)$$

$$\tau_R = \lim_{R \rightarrow 0} [\int_{(S)} \tau_\rho^2(R, \omega, \varphi) \cdot dS / (4\pi R^2)]^{1/2}. \quad (d)$$



Obr. A K výpočtu $\sigma_\rho ; \tau_\rho$



Obr. B K výpočtu $\sigma_R ; \tau_R$

$n_\rho [x_0, y_0, z_0] \dots x_0, y_0, z_0$ určuje normálu roviny ρ , a tím také tzv. směrové kosiny :

$$\cos \alpha_1 = x_0 / R ,$$

$$\cos \alpha_2 = y_0 / R ,$$

$$\cos \alpha_3 = z_0 / R .$$

Dále evidentně platí:

$$\cos \omega = z_0 / R, \text{ odtud } z_0 = R \cdot \cos \omega ;$$

$$\sin \omega = b_0 / R, \text{ odtud } b_0 = R \cdot \sin \omega ;$$

$$\cos \varphi = x_0 / b_0 \text{ odtud } x_0 = b_0 \cdot \cos \varphi = R \cdot \sin \omega \cdot \cos \varphi ;$$

$\sin \varphi = y_0 / b_0$, odtud $y_0 = b_0 \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin \omega \cdot \sin \varphi$;

$$dS = R \cdot \sin \omega \cdot d\varphi \cdot R \cdot d\omega = R^2 \cdot \sin \omega \cdot d\omega \cdot d\varphi .$$

Pak potřebné výrazy pro transformaci jsou:

$$\cos \alpha_1 = \sin \omega \cdot \cos \varphi ,$$

$$\cos \alpha_2 = \sin \omega \cdot \sin \varphi ,$$

$$\cos \alpha_3 = \cos \omega ,$$

takže lze vyjádřit normálové napětí ve sférických souřadnicích:

$$\sigma_\rho = \sigma_1 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \omega + \sigma_2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \omega + \sigma_3 \cdot \cos^2 \omega . \quad (a_1)$$

Z definiční rovnice (c) pak vyplyne výraz pro referenční normálové napětí:

$$\sigma_R = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 . \quad (c_1)$$

Analogicky lze také ve sférických souřadnicích vyjádřit smykové napětí τ_ρ a dopočítat výraz pro referenční smykové napětí:

$$\tau_R = 15^{-1/2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} (= 1/K_0 \cdot S_\sigma \quad \dots \quad K_0 = 2.7386) . \quad (d_1)$$