

USING HYPOTHESES FOR CALCULATING FATIGUE LIVES OF PARTS EXPOSED TO COMBINED RANDOM LOADS

M. Balda¹, J. Svoboda¹, V. Fröhlich¹

Summary: *The contribution deals with a complicated problem of fatigue damage of structure parts, which are loaded by a combination of random forces in tension-pressure and moments in torque. An attempt for estimating the total damage is made. It is based on an application of a virtual damaging stress. The damage is evaluated by means of the hypotheses of Palmgren-Miner and Corten-Dolan, which are applied to a rain-flow-like sequence of a resulting stress.*

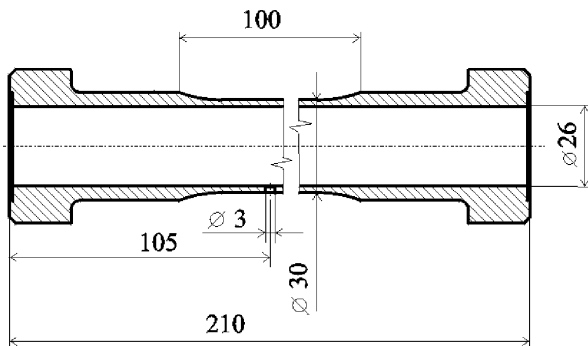
1. Úvod

Únava kovů je jevem, který se zkoumá více jak 150 let. Navzdory tomu je poškozování konstrukcí a jejich částí řešeno pouze částečně a to ještě jen pro nejjednodušší případy zatěžování. Mnoho již bylo vykonáno na poli teoretickém, avšak využití nejnovějších poznatků v praxi stále pokulhává. Pokusili jsme se proto tuto mezeru alespoň zmenšit. V právě řešeném projektu Grantové agentury ČR k tomu byla dána dobrá příležitost.

Únavou při kombinovaném namáhání se již zabývala řada autorů. Kritický přehled jejich postupů a výsledků je uveden v práci [1]. I na pracovišti CDM ÚT AVČR se zpracovalo několik postupů, které však byly použitelné pro jednodušší případy zatěžování ([2] až [9]). Současný příspěvek si dal za cíl navrhnout postup odhadování únavové životnosti dílů ze znalosti základních únavových charakteristik materiálu a zatěžovacích procesů.

2. Experimentální program

V návaznosti na výzkumy únavy provedené v minulosti v Centru diagnostiky materiálů Ústavu termomechaniky AVČR (viz [2] a [3]) realizuje se v současnosti náročný experimentální program na již dříve zavedených trubkových vzorcích vyrobených z materiálu ČSN 41 1523.1. Vzorky o vnějším průměru 30 mm a vnitřním průměru 26 mm s příčným otvorem oprůměru 3 mm jako koncentrátorem byly vystavovány současnému náhodnému zatěžování osovou silou vyvolávající normálové napětí $\sigma(t)$ v tahu-tlaku a kroutícím momentem namáhajícím vzorek smykovým napětím $\tau(t)$.



¹ Prof. Ing. Miroslav Balda, DrSc. FEng, Ing. Jaroslav Svoboda, Bc. Vladislav Fröhlich: Ústav termomechaniky AVČR, Centrum diagnostiky materiálů, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň; tel.: +420.377 236 415, fax: +420.377 220 787; e-mail: balda@cdm.it.cas.cz, svoboda@cdm.it.cas.cz, frohlich@cdm.it.cas.cz

Zkoušky proběhly ve 3 režimech zatěžování:

- proporcionální s úzkopásmovými synchronizovanými procesy,
- proporcionální se širokopásmovými synchronizovanými procesy,
- neproporcionální se dvěma nekorelovanými širokopásmovými procesy.

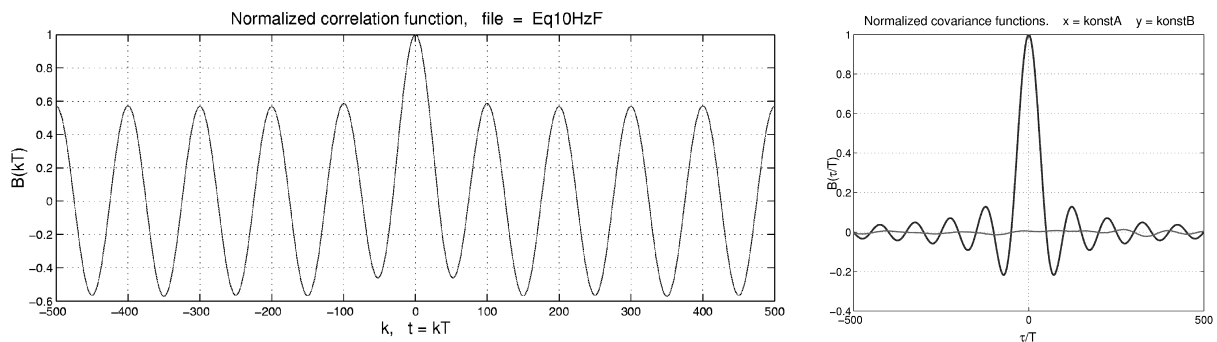
Proporcionální zatěžování se vyznačuje tím, že v každém časovém okamžiku t je

$$\tau(t) = \kappa \sigma(t) \quad (1)$$

Pro koeficient úměrnosti κ nezávislý na čase platí

$$\kappa = \frac{\tau(t)}{\sigma(t)} = \frac{\tau(t_k)}{\sigma(t_k)} = \frac{s_\tau}{s_\sigma}, \quad (2)$$

a to bez ohledu na charakter zatěžovacích procesů, které mohou být jak harmonické, tak i náhodné. Charakteristické pro tento druh zatěžování je, že normalizované vzájemné korelační funkce těchto procesů jsou rovny jejich normalizovaným autokorelačním funkcím.



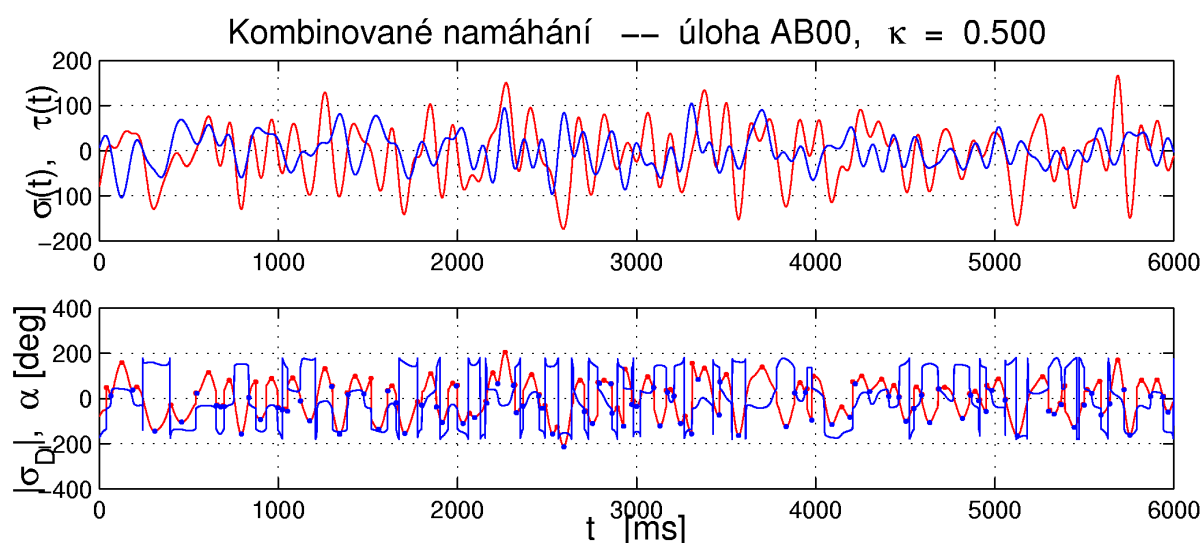
Obr. 2: Autokorelační a vzájemná korelační funkce zatěžovacích procesů

Neproporcionální zatěžování jsou všechna ostatní, pro která neplatí rovnice (2). Patří sem tedy jak rozfázované harmonické procesy, jejichž normalizované vzájemné korelační funkce jsou posunuty v čase vůči autokorelačním funkcím, tak i zcela nezávislé náhodné procesy s nulovými vzájemnými korelačními funkcemi (jako je tomu v pravém z obrázků 2). I v tomto případě je však účelné posuzovat vzájemnou mohutnost obou složek namáhání pomocí parametru κ , který však již nebude koeficientem úměrnosti (nezávislým na čase), ale pouze poměrem směrodatných odchylek obou procesů:

$$\kappa = \frac{s_\tau}{s_\sigma} \quad (3)$$

Dosud provedené zkoušky nekorelovaným náhodným zatěžováním daly výsledky uvedené v tabulce. Zatěžovací procesy A a B byly vygenerovány postupem popsáním v literatuře [5]. Trvání jednoho bloku (realizace) každého procesu je 20 minut. Potom každý z vygenerovaných souborů (bloků) procesů obsahoval 1,2

κ s_τ/s_σ	bloků N_b	k_{CD}
0	15	0,685
0,5	87	0,581
1	170	0,641
1	300	0,696
3	117	0,590
3	280	0,683
36,57	158	0,555
∞	264	0,606



Obr. 3: Začátek zatěžovacích procesů $A=\sigma(t)$ a $B=\tau(t)$ a poškozujícího napětí σ_d s úhlem $\alpha(t)$

milionu hodnot (vzorků). Zkušební stroj Inova ZUZ 200-1 pro kombinované zatěžování řízený počítačem musí totiž dostávat hodnoty požadovaného zatížení po jedné milisekundě, tedy o vzorkovací frekvenci 1 kHz. Testováním obou procesů se prokázalo, že mají takřka ideální normální (gaussovské) rozdělení, konstantní výkonovou spektrální hustotu v intervalu frekvencí 0 – 10 Hz a jsou nekorelované jak dokazuje pravý diagram z obrázku 2. Autokorelační funkce obou procesů jsou totiž totožné a jsou rovny difrakční funkci $\sin(x)/x$. Vzájemná korelační funkce je virtuálně nulová.

Podle jedné z hypotéz má na poškozování dominantní vliv maximální smykové napětí. Pro ověření této hypotézy se při všech zkouškách s proporcionálními procesy a všech poměrech normálových a smykových složek κ udržovaly mohutnosti procesů A a B takové, že τ_{max} zůstávalo konstantní a rovno 212,1 MPa. Tato velikost vyplynula z první náhodně nastavené zkoušky. Výsledky zkoušek již z několika málo vzorků ukázaly, že životnost není ani zdaleka konstantní. Pokus využít k odhadu životnosti hlavní tahové napětí σ_1 a hypotézy kumulace poškození podle Palmgrenova-Minera a Cortena-Dolana rovněž ztroskotál. Čím větší byl podíl smyku v kombinované napjatosti, tím více se odhady životnosti lišily od experimentálně zjištěných. Bylo proto nutno vypracovat zcela nový postup pro odhadování životnosti.

3. Zpracování údajů

Získání experimentálních životností je jen jednou částí výzkumného programu. Druhou, neméně důležitou, je nalezení přiměřeného matematického modelu, jímž by se dal fyzikální proces poškozování popsat. Inženýrský přístup k hodnocení únavy často využívá nominálních hodnot napětí a lokální napjatost potom zohledňuje buď koeficienty koncentrace napětí, anebo experimentálními daty získanými pro danou konfiguraci zkoušeného objektu. Náš přístup využil posledně jmenovanou možnost.

Pro odhady životnosti jsou k dispozici sekvence vzorků zatěžovacích procesů, jimž odpovídají nominální napětí σ_k , τ_k pro $k = 1, 2, \dots, N$, kde N je počet vzorků v bloku, tj. délka časové řady jedné realizace. S ohledem na skutečnost, že se normálové i smykové napětí

na sobě nezávisle mění, je pro posuzování jejich vlivu na poškození nutno použít numerický přístup a v každém časovém okamžiku počítat napjatost, která vede k poškození.

3.1 Napjatost

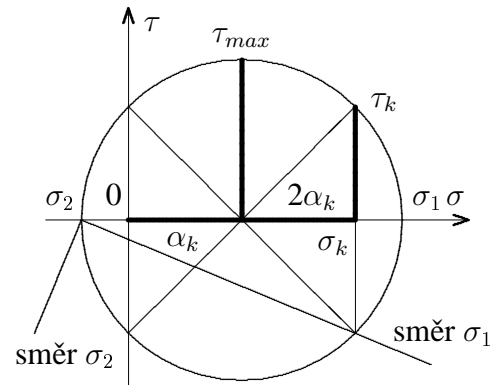
Okamžitý stav kombinované rovinné napjatosti v čase charakterizuje Mohrova kružnice v myšlené rovině (σ, τ) podle obrázku. Pro hlavní normálová napětí v čase t (dále vynecháno) platí

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \tau_{\max}, \quad (4)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \tau_{\max}, \quad (5)$$

kde maximální smykové napětí v témže čase je

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (6)$$



Obr. 4: Mohrova kružnice

Úhel pootočení hlavního normálového napětí od osy axiálního zatěžování je

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau}{\sigma} \quad (7)$$

Protože na poškozování spolupůsobí současně obě hlavní napětí, bylo za účelem odhadování poškození vytvořeno fiktivní napětí jako výslednice obou hlavních napětí, jejíž modul je

$$|\bar{\sigma}_d| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (8)$$

Po dosazení za σ_1 a σ_2 z rovnic (4) a (5) dostaneme zajímavý vztah, totiž

$$\bar{\sigma}_d^2 = 2 \left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_{\max}^2 \right] = \sigma^2 + 2\tau^2 \quad (9)$$

Tento vztah lze zobecnit zápisem

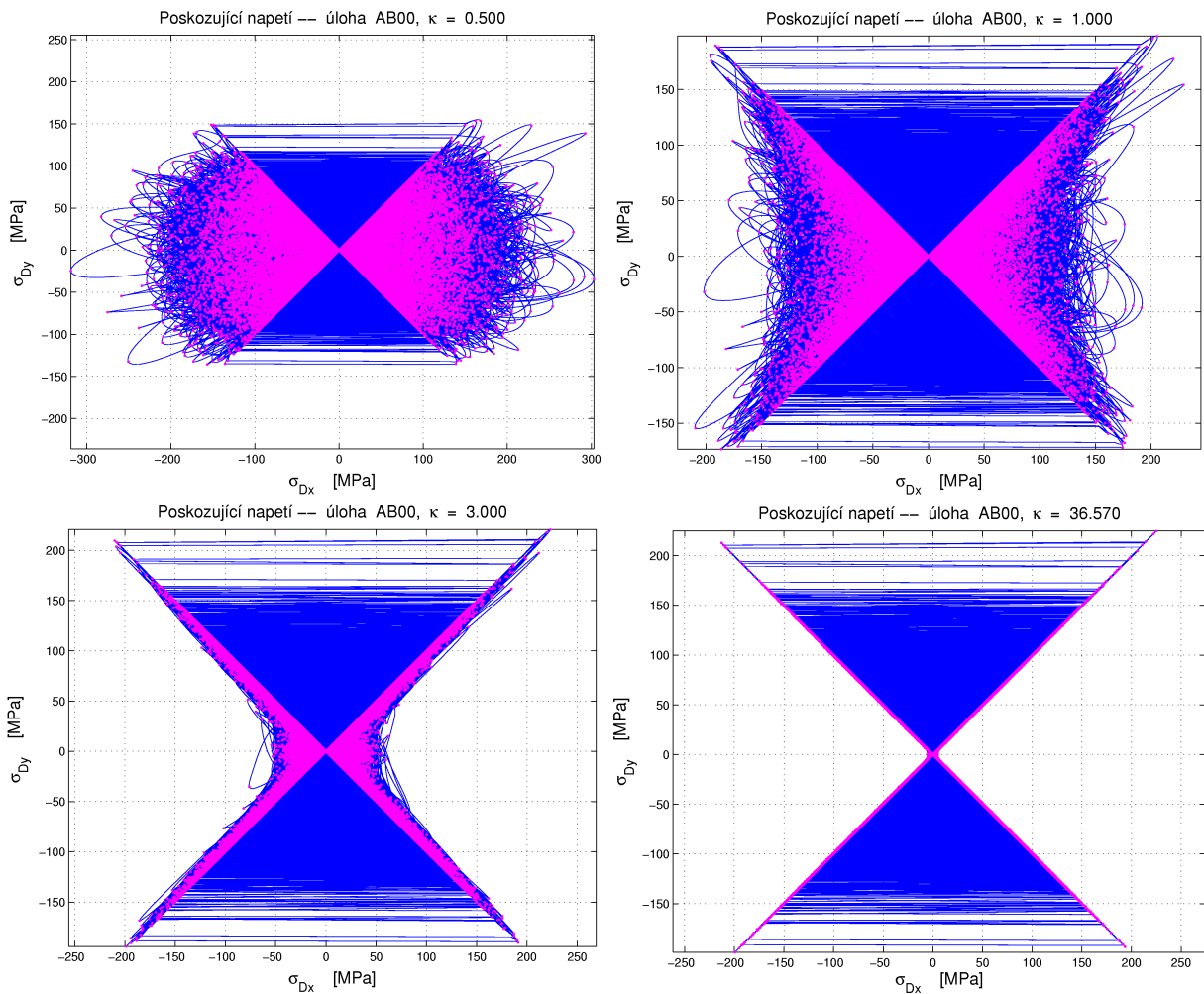
$$|\sigma_d| = \sqrt{\sigma^2 + (k_c \tau)^2}, \quad (10)$$

což je modul napětí, které nazvěme „poškozující“. Poslední rovnice má i tvar dynamické pevnostní hypotézy použité v práci [4]. S ohledem na únavové mezní stavy, které nastanou v tahu-tlaku při $\tau(t) = 0$, kdy $|\sigma_d| = \sigma_c^*$, a v krutu při $\sigma(t) = 0$, kdy $|\sigma_d| = k_c \tau_c^*$, bude koeficient k_c roven

$$k_c = \frac{\sigma_c^*}{\tau_c^*}. \quad (11)$$

Zde σ_c^* a τ_c^* jsou mezní únavová napětí v tahu-tlaku a v krutu pro vrubovaný vzorek. Pro hladký vzorek by se jednalo přímo o meze únavy σ_c a τ_c .

Podle formule (10) se vyhodnotila napjatost pro různé poměry κ . Zbývalo jen přiřadit každému $|\sigma_d(t)|$ příslušný směr $\alpha(t)$ podle obrázku 4. Jde o nejchoulostivější krok celé analýzy, protože v okamžicích, kdy se stane $\sigma(t)$ nulovým, Mohrova kružnice má střed v počátku a



Obr. 5: Trajektorie poškozujícího napětí σ_d pro $\kappa = 0, 5; 1; 3; 36, 57$

elipsa napjatosti v reálném prostoru se stane kružnicí, aby v následujícím okamžiku se dříve kratší osa elipsy (σ_2) stala delší osou. Z tohoto důvodu dojde v reálném prostoru k přeskočení vektoru největší napjatosti o $\pm 90^\circ$. To má za následek, že pro různé poměry κ vyplní trajektorie koncových bodů vektoru většího z obou napětí útvary vykreslené v obrázcích 5a, až 5d.

Oblasti přeskoků jsou tmavé výseče nad a pod počátkem (na obrazovce modré). Ve zbylých výsečích jsou vyznačeny opět již zmíněné trajektorie s vnesenými extrémy jako světlejšími body na nich (na obrazovce světle fialovými). Orientace zatěžovací síly je v diagramech horizontální.

3.2 Poškození

Vyhodnocení poškození z průběhu σ_d není dosud v konečné podobě. Důvodem pro tento stav je neznalost vhodného způsobu posuzování poškozujícího účinku obecně proměnlivého namáhání jak co do velikosti tak i směru. Proto se jako první přiblížení použila běžná verze algoritmu dekompozice složitějšího procesu $\sigma_d(t)$ na uzavřené cykly postupem označovaným jako „metoda stékání deště“, při níž se za $\sigma_d(t)$ použil proces $\text{sign}(\sigma) \bar{\sigma}_d(t)$. Je tedy zřejmé, že se zde zanedbal směrový vliv úhlu $\alpha(t)$. Tím zajisté dochází ke zkreslování výsledku, nicméně v

současnosti není lepší postup k dispozici. V literatuře je sice možno nalézt postup, který je však popsán tak nesrozumitelně, že je nepoužitelný [10].

Vliv tohoto úhlu na odhady poškození je dvojí:

- vytváří z poškození d vektor a
- znejišťuje hodnocení pojmu „uzavřený cyklus“, protože k napojování trajektorií koncových bodů σ_d dochází zcela vyjíměčně (pokud se nejedná o vyjíměčné procesy), protože se neustále mění úhel α .

Rozklad procesu $\sigma_d(t)$ poskytne amplitudy uzavřených cyklů σ_a a střední hodnoty σ_m . Únavové vlastnosti v oblasti časové pevnosti vynesené do diagramu vytvoří tzv. Wöhlerovu křivku. U ocelí existuje na Wöhlerově křivce bod zlomu, jemuž odpovídá kritická amplituda napětí – mez únavy σ_c – a jí odpovídající počet cyklů na mezi únavy N_c . S využitím těchto veličin ji lze zapsat ve tvaru

$$N_a = N_c \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_a} \right)^w = A/\sigma_a^w. \quad (12)$$

Podobná rovnice platí i pro případ zatěžování při nenulových středních hodnotách σ_m cyklů:

$$N_{am} = N_{cm} \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_a} \right)^w, \quad (13)$$

v níž $N_{am} = N_a(\sigma_m)$ je počet cyklů o amplitudě σ_a a střední hodnotě σ_m a $N_{cm} = N_c(\sigma_m)$ počet cyklů do porušení při kritické amplitudě $\sigma_{cm} = \sigma_c(\sigma_m)$. Pro veličiny N_{cm} a σ_{cm} použijeme vztahy z literatury [8] a [11], totiž

$$N_{cm} = N_c \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right] = N_c g_m, \quad a \quad \sigma_{cm} = \sigma_c \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_F} \right)^{k_H} = \sigma_c h_m. \quad (14)$$

První formule je parabolická a říká, že při $\sigma_m = 0$ je $N_c(0) = N_c$, kdežto pro $\sigma_m = R_m$ je počet cyklů nulový, protože již σ_m dosáhlo meze pevnosti. Druhá formule, popisující tzv. Haighův diagram, udává jak se mění kritická amplituda napětí σ_{cm} se středním napětím cyklu. Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice (4), dostaneme

$$N_{am} = N_c \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_a} \right)^w g_m h_m^w. \quad (15)$$

Tento vztah je funkcí dvou proměnných, a to σ_a a σ_m . Jde tedy o plochu nad oběma proměnnými, která udává počet harmonických cyklů do porušení, tedy jakousi Wöhlerovu plochu. Při konstantnosti obou proměnných během zatěžování je možné určit i životnost zkoušeného objektu.

Pokud zatěžování nemá konstantní amplitudy a střední hodnoty cyklů, je určení životnosti problematické. Typickými představiteli takového zatěžování jsou náhodné procesy, se kterými se setkáváme v provozu strojů a zařízení. Většina používaných postupů je založena na lineární kombinaci poškození. Postupy jsou založeny na myšlence, že relativní poškození d_{am} vyvolané jedním napětíovým cyklem o amplitudě σ_a na střední hodnotě σ_m je nepřímo úměrné počtu cyklů do porušení N_{am} . Celkové relativní poškození D je potom sumou všech dílčích relativních poškození. Tato základní myšlenka je rozvíjena různými autory do různých hypotéz výpočtu relativního poškození. Uvedeme alespoň základní z nich:

Palmgren-Miner

Tato hypotéza využívá beze změn formuli (15) jen s tím omezením, že cykly $\sigma_{am} = \sigma_a(\sigma_m)$ nepoškozují objekt. Potom relativní poškození se stanoví jako

$$D_{PM} = \frac{1}{N_c \sigma_c^w} \sum_{am} \frac{\sigma_{am}^w}{g_m h_m^w} \Big|_{\sigma_{am} > \sigma_{cm}} . \quad (16)$$

Jde o nejstarší hypotézu, která dává nejmenší odhad poškození a není tedy na bezpečné straně. Větší poškození lze odhadovat pomocí jiných hypotéz.

Haibach

Podle této hypotézy poškozují všechny cykly, avšak ty, které leží pod mezí únavy, se na celkovém poškození podílejí méně. Únavová křivka pod mezí únavy má jiný sklon daný exponentem $2w-1$. Relativní poškození se potom vypočte jako

$$D_H = D_{PM} + \frac{1}{N_c \sigma_c^{2w-1}} \sum_{am} \frac{\sigma_{am}^{2w-1}}{g_m h_m^{2w-1}} \Big|_{\sigma_{am} \leq \sigma_{cm}} . \quad (17)$$

Doplňkovým druhým členem se respektuje skutečnost, že cykly, které u harmonického zatěžování ležely pod mezí únavy a nemohly proto vyvolat trhlinu, která by se dále šířila až do lomu, mohou při změněných podmínkách vzniklých dílčím porušením objektu mohutnějšími cykly přispívat k porušování v kořeni trhliny při jejím šíření.

Corten-Dolan

Tato hypotéza je široce využívána v průmyslové praxi, protože, jak se uvádí v literatuře, dává nejlepší odhady doby života součástí [12]. Využívá modifikovaný předpis pro počet cyklů do porušení:

$$N_{ac} = N_{cm} \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_{a,\max}} \right)^w \left(\frac{\sigma_{a,\max}}{\sigma_a} \right)^{k_{CD} w} . \quad (18)$$

Po dosazení za N_{cm} a σ_{cm} podle formulí z (14) dostaneme

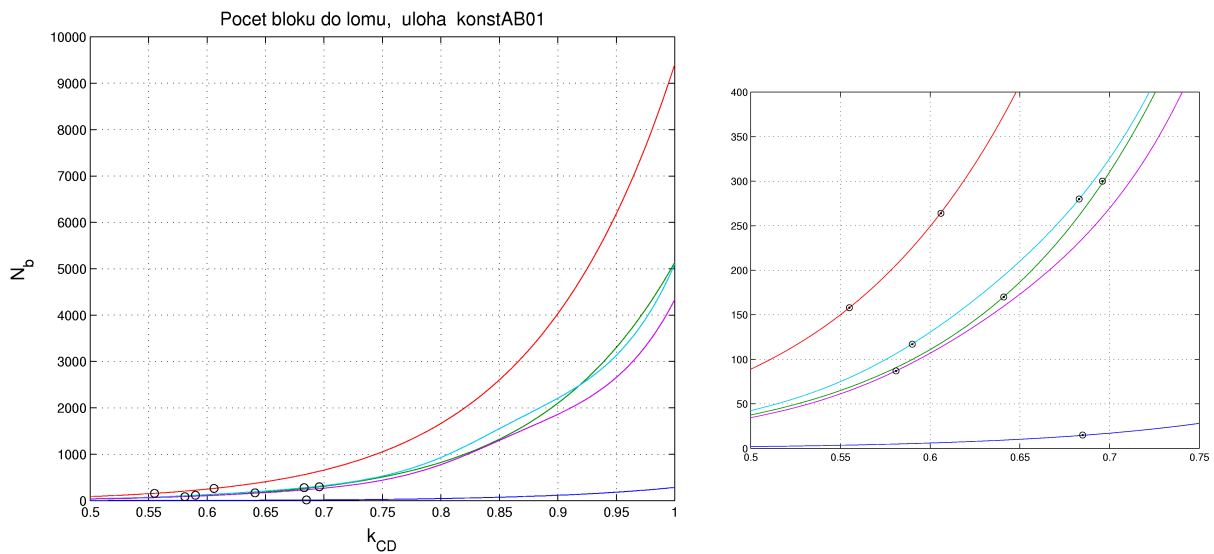
$$N_{am} = \frac{N_c \sigma_c^w}{\sigma^{k_{CD} w}} g_m h_m^w \sigma_{a,\max}^{(k_{CD}-1)w} . \quad (19)$$

Sumací všech dílčích relativních poškození jako převratných hodnot k N_{am} dostaneme celkové relativní poškození ve tvaru

$$D_{CD} = \frac{1}{N_c \sigma_c^w \sigma_{a,\max}^{(k_{CD}-1)w}} \sum_{am} \frac{\sigma_a^{k_{CD} w}}{g_m h_m^w} , \quad (20)$$

kde sčítání probíhá přes všechny cykly procesu namáhání bez ohledu na mez únavy.

Jakmile jsou k dispozici parametry σ_a a σ_m cyklů poškozujícího napětí $\sigma_a(t)$, lze odhadovat poškození pomocí některé z výše uvedených hypotéz. Byly vybrány dvě – Palmgrenova-Minerova a Cortenova-Dolanova, které patří k nejužívanějším. Při jejich aplikaci byly použity následující parametry: $\sigma_f = R_m$, $k_H = 0.25$ a k_{CD} proměnné. Zatímco první z hypotéz naprosto zklamala, protože poskytovala odhady životnosti řádově vyšší, než byly experimentálně zjištěny (viz tabulka 1), studie provedená s hypotézou Cortenovou-Dolanovou dala výsledky, které jsou již použitelné. Na diagramech v obrázku 6 jsou vyneseny výsledky této studie.



Obr. 6: Vypočtené životnosti v počtech bloků a detail oblasti s měřenými body

V levém obrázku jsou vyneseny závislosti vypočtených životností v počtech zatěžovacích bloků na koeficientu k_{CD} z obvyklého intervalu hodnot a to pro použitou množinu koeficientů $\kappa = [0; 0,5; 1,0; 3,0; 36,57]$. Napočtené funkce jsou protnuty hodnotami naměřených životností uvedených v tabulce 1, do které byly vneseny i hodnoty takto získaných koeficientů Cortenovy-Dolanovy hypotézy pro přesnou shodu výpočtu a měření. Je patrné, že takto stanovené hodnoty k_{CD} označené v diagramu kroužky jsou z relativně úzkého intervalu (0,55 – 0,70). Pro lepší přehled je tato oblast zvětšena a vynesena v pravém obrázku .

4. Závěr

V příspěvku byly popsány dílčí, zatím neúplné, výsledky řešení grantového projektu GAČR 101/02/0043. Předem bylo známo, že daný problém je příliš komplikovaný, než aby bylo možno dosáhnout konečného výsledku v jednom kroku. Protože běžné postupy odhadů životnosti z hypotéz naprosto selhávaly, a to jak pro výsledná maximální smyková namáhání jako funkce času $\tau_{\max}(t)$, tak i při aplikaci na tahové hlavní napětí $\sigma_1(t)$, vybudoval se pojem „poškozující napjatosti“, na níž se podílejí obě hlavní (normálová) napětí.

Poškozující napjatost dala po dekompozici modifikovanou metodou stékání deště a použití hypotéz kumulace únavového poškození výsledky, které v případě Palmgrenovy-Minerovy hypotézy jsou nepoužitelné pro značně optimistické životnosti. Naproti tomu hypotéza Cortenova-Dolanova s exponentem k_{CD} z intervalu hodnot (0,55 – 0,70) poskytla dobré odhady.

Celý postup bude zapotřebí ještě zpřesnit jak v modelu tak i při experimentu. U modelu bude zlepšení založeno na směrovém poškozování a úpravě metody stékání deště.

5. Poděkování

Práce popsané v tomto příspěvku byly podpořeny Grantovou agenturou České republiky grantem č. 101/02/0043.

6. Literatura

- [1] Papuga J., Růžička M., Balda M.: Metody multiaxiální analýzy únavové životnosti. In: Sborník sem. *Únavová a lomová mechanika*, ŠKODA Výzkum, Žinkovy, 2002
- [2] Kermes J.: Únava ocelí při kombinovaném namáhání tah-krut se synchronizovanými složkami i s fázovým posunutím včetně koncentrátoru napětí. Výzk. zpráva ZČU ITS 124VP, Plzeň, 1994
- [3] Svoboda J., Václavík M.: An influence of out-of-phase combined loading. In: Proc. Nat. Conf. *Engineering Mechanics 2001*, Svatka, 2001, ISBN 80-85918-64-1
- [4] Balda M., Svoboda J.: Problematika mezní únavové napjatosti při kombinovaném namáhání. In: Proc. Nat. Conf. *Engineering Mechanics 2002* Svatka, 2002, ISBN 80-214-2109-6
- [5] Balda M.: Software support of fatigue tests. Proc. Colloq.: *Diagnostics and Active Control 2000*, VUT Brno, Třešť, ISBN 80-214-1665-3
- [6] Václavík M.: Vliv poměru smykových a normálových složek napětí na šíření únavových trhlin. In: Proc. Colloq. *Dynamics of Machines 2001*, IT ASCR, Praha, 2001, ISBN 80-85918-61-7
- [7] Svoboda J., Balda M., Fröhlich V.: Životnost konstrukce namáhané náhodným víceosým zatížením. In: Sborník konf. *Výpočtová mechanika 2002*, ZČU FAV KME, Nečtiny, 2002, ISBN 80-7082-903-6
- [8] Balda M.: Parametry Wöhlerovy křivky jinak. In: Sborník konf. *Výpočtová mechanika 2002*, ZČU FAV KME, Nečtiny, 2002, ISBN 80-7082-903-6
- [9] Svoboda J., Balda M., Fröhlich V.: Životnost a hypotézy při kombinovaném náhodném zatěžování. In: Proc. Colloq. *Dynamics of Machines 2003*, IT ASCR, Prague, 2003, ISBN 80-85918-81-1
- [10] Stefanov S. H.: The curvilinear integral method: Testing 2 (under non-proportional pulsating axial force and internal pressure). *Int. J. Fatigue*, Vol. 18 (1996), pp. 41-48
- [11] Růžička M., Hanke M., Rost M.: Dynamická pevnost a životnost. Skriptum ČVUT v Praze, 1989
- [12] Vojtíšek J.: Výpočty a ověřování životnosti strojních částí namáhaných náhodným stacionárním zatížením. Výzk. zpráva Sz 3977V, ŠKODA Plzeň ÚVZÚ, 1977