

CONSTITUTIVE MODELS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING

I. Herle*

Summary: *Geological materials (soils, rocks) differ from traditional engineering materials (steel, concrete) mainly due to their discontinuous structure and memory of previous deformation. Description of the mechanical behaviour of geomaterials is thus necessarily related to a number of constitutive models of different complexity. Their overview reflects a concentrated effort to capture various phenomena which can be observed either in the laboratory or in situ. Still, none of the proposed models can take into account all aspects of the mechanical behaviour of geomaterials. Selected examples demonstrate the role of choice of a suitable constitutive model for solving boundary value problems.*

1. Úvod

Geologické materiály (zeminy, horniny) se odlišují od tradičních inženýrských materiálů (ocel, beton) především svojí diskontinuitní strukturou a pamětí své deformační historie. Popis mechanického chování geomateriálů proto nezbytně vede k řadě konstitučních vztahů různých stupňů složitosti. Jejich přehled ukazuje na soustředěnou snahu postihnout rozmanité jevy, jež je možné pozorovat jak v laboratoři, tak in situ.

Žádný z doposud navržených konstitučních vztahů však není definitivní a nezahrnuje v sobě všechny aspekty chování geomateriálů. Proto je volba vhodného konstitučního vztahu nezbytným předpokladem k realistické predikci chování inženýrského díla. Přestože dnes existuje rozsáhlá řada použitelných konstitučních vztahů, v běžné praxi je jejich aplikace omezena na několik málo zaběhnutých modelů, jejichž přiměřenost pro popis přetváření geomateriálů je sporná. Vybrané příklady demonstrují roli materiálových modelů při řešení geotechnických úloh. Ukazují, že nesprávně zvolený model může vést nejen ke kvantitativním chybám, ale i ke kvalitativním odchylkám od měřených hodnot.

2. Úloha konstitučních modelů

Konstituční (často se používá i výraz konstitutivní) modely jsou obvykle definovány jako vztahy mezi napětím a přetvořením. Protože chování geomateriálů závisí na dráze, po které

*Dr. Ing. Ivo Herle: Ústav teoretické a aplikované mechaniky Akademie věd ČR; Prosecká 76; 190 00 Praha 9; tel.: +420.286 882 121, fax.: +420.286 884 634; e-mail: herle@itam.cas.cz

deformace probíhá, je třeba formulovat konstituční rovnice pro infinitezimálními (nekonečně malé) přírůstky těchto veličin. Navíc je chování závislé i na dalších stavových veličinách, např. na pórovitosti, stupni nasycení či různých vnitřních proměnných, jejichž hodnoty představují paměť předchozí deformace a v průběhu zatěžování se mění.

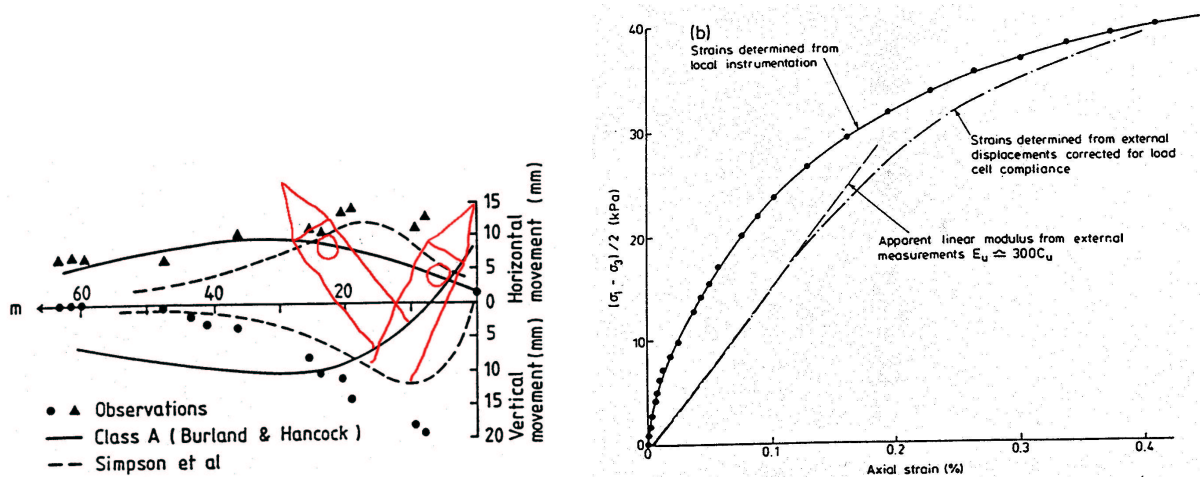
Materiálové parametry jsou na rozdíl od stavových proměnných konstantami v konstitučních rovnicích a měly by charakterizovat vlastnosti materiálu nezávisle na okamžitém stavu. Tuto charakteristiku splňují naneštěstí jen některé komplexní modely. Materiálové parametry jednoduchých modelů bývají zpravidla závislé na momentálním stavu, což vylučuje objektivní určení hodnot těchto parametrů.

Protože topologie geotechnických úloh nebývá obvykle příliš komplikovaná, jen málokdy je třeba čelit problémům geometrické nelinearity (obtíže však mohou přinést velká přetvoření). Naproti tomu jsou materiálové rovnice realistických modelů zpravidla výrazně nelineární a hysteretní, což vede k obtížím matematického a numerického rázu.

Nežřídká se zmiňuje nejistota v geotechnických datech dodávaných průzkumem. Tato nejistota pak slouží jako argument pro odmítání realistických (a tudíž komplexnějších) konstitučních modelů, případně jako podpora pro užití stochastických teorií. Variabilita geologického prostředí může být opravdu značná a tím vnášet další aspekt do modelování geotechnických úloh. Ale tuto otázku nelze spojovat se všemi obtížemi, neboť konstituční modely se vyvíjejí a testují na základě laboratorních zkoušek relativně homogenních vzorků za jasně definovaných okrajových podmínek.

3. Lineární izotropní pružnost

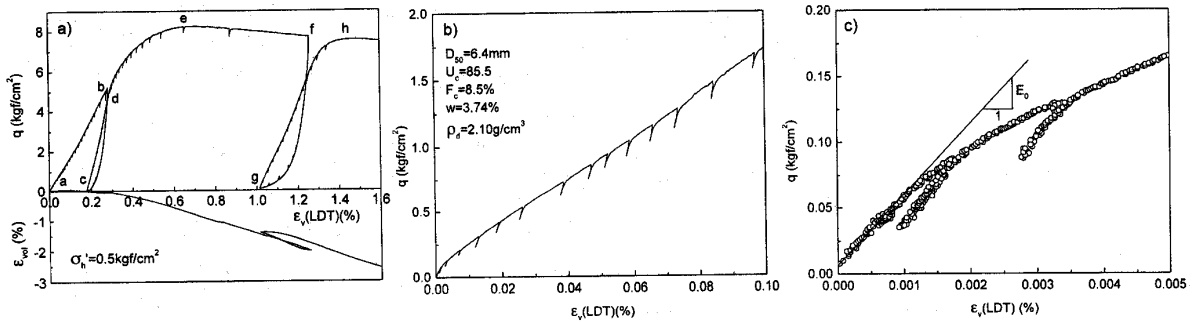
Může se zdát, že model lineární izotropní pružnosti je vhodný k popisu mechanického chování v oboru napětí daleko od podmínky porušení. Většina praktických výpočtů deformace je stále založena na této teorii.



Obrázek 1: Vliv nelinearity pracovního diagramu na predikci deformace (Simpson et al. 1979, Burland 1989)

Pro predikci deformací v důsledku hloubení stavební jámy nedaleko věže Big Ben v Londýně byl konstituční vztah lineární pružnosti zvolen na základě standardních triaxiálních laboratorních zkoušek (Burland 1989), viz zdánlivě lineární počáteční část přerušované křivky

na obr. 1 vpravo. Na základě numerické predikce MKP (spodní plná čára na obr. 1 vlevo) se očekávalo, že se věž začne naklánět směrem od stavební jámy (Simpson et al. 1979). Geodetická měření však ve shodě s měřením deformací v okolí jámy vykazala naklánění věže opačným směrem, což vyvolalo značné obavy. Dodatečné užití modelu nelineární pružnosti pro popis chování zeminy tento rozdíl vysvětlilo a přineslo poměrně dobrou shodu s měřenými údaji (spodní přerušovaná čára na obr. 1 vlevo). Doplňující laboratorní zkoušky s velmi přesným měřením posunů přímo na vzorku (Burland 1989) potvrdily nelinearitu chování i v oboru velmi malých přetvoření (plná křivka na obr. 1 vpravo).



Obrázek 2: Nelineární chování i v oboru velmi malých deformací (Tatsuoka et al. 1999)

Experimentální výsledky posledních let ukazují, že lineární pružnost není realistická ani v oboru velmi malých přetvoření (Tatsuoka et al. 1999). Při zvětšení počátečního úseku pracovního diagramu šterkovité zeminy na obr. 2 je vidět, že opakované cykly odlehčení a přitížení s malou amplitudou napětí vykazují nelineární a hysterézní charakter. A to v oboru přetvoření okolo $10^{-4}\%$, který odpovídá deformacím při šíření seismických vln v zemním prostředí. Význam těchto pozorování např. pro výpočet a prevenci důsledků případného zemětřesení v kritických oblastech je zřejmý.

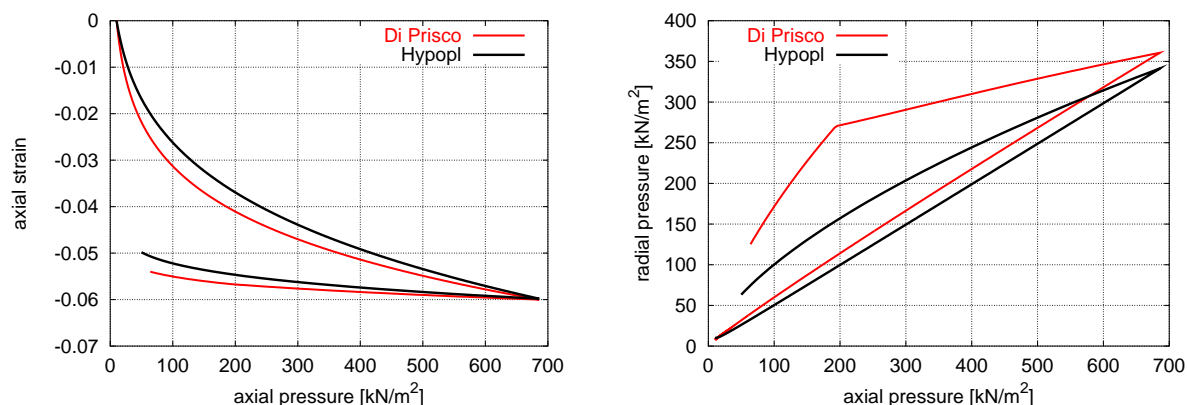
4. Nelineární pružnost

Nejjednodušším a nejčastějším způsobem zahrnutí nelinearity do výpočtu je použití „lineárního“ pružného modelu s modulem pružnosti E závislým na středním napětí $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, např.

$$E = E_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (1)$$

(kde E_0 je hodnota E při $p = p_0$ a α je konstanta), nebo na některém invariantu tenzoru přetvoření.

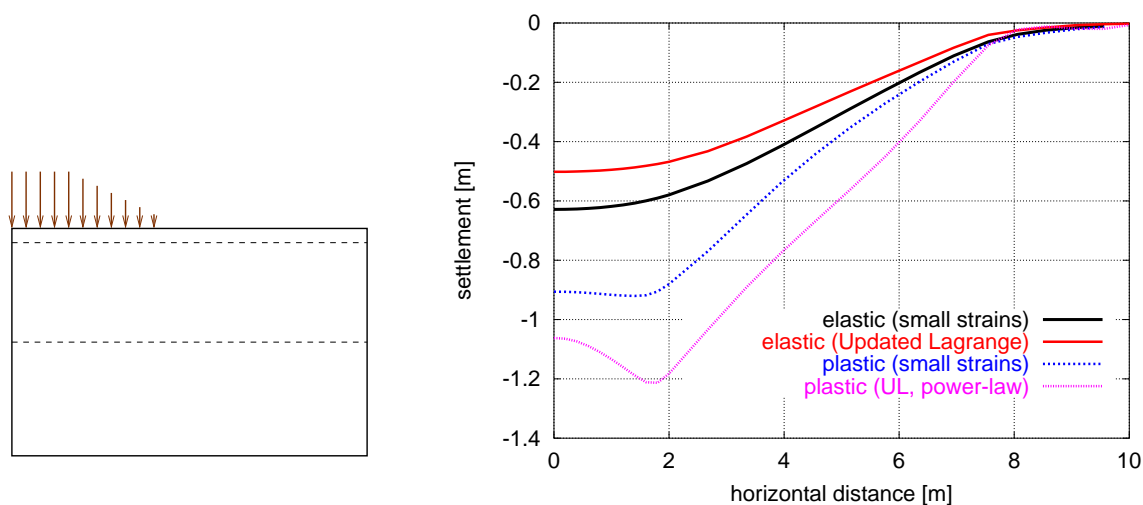
Tato metoda sice umožňuje realistickou reprodukci experimentálního pracovního diagramu, ale při podrobnějším pohledu selhává např. při modelování dráhy napětí. To ilustruje obr. 3 pro případ oedometrické zkoušky, při které se vzorek může deformovat pouze v jednom směru. Model *Di Prisco* (1993) používá při odlehčení nelineární pružnost, což vede k nerealistické dráze napětí (červená křivka na obr. 3 vpravo). Hypoplastický model (černá křivka) se přitom shoduje s experimenty (Bauer 1992) v obou aspektech.



Obrázek 3: Vypočtený pracovní diagram (vlevo) a dráha napětí (vpravo) při oedometrické zkoušce. Pružný obor modelu Di Prisco (1993) vede při odlehčení k nerealistické dráze napětí (Herle et al. 2000)

5. Ideální plasticita

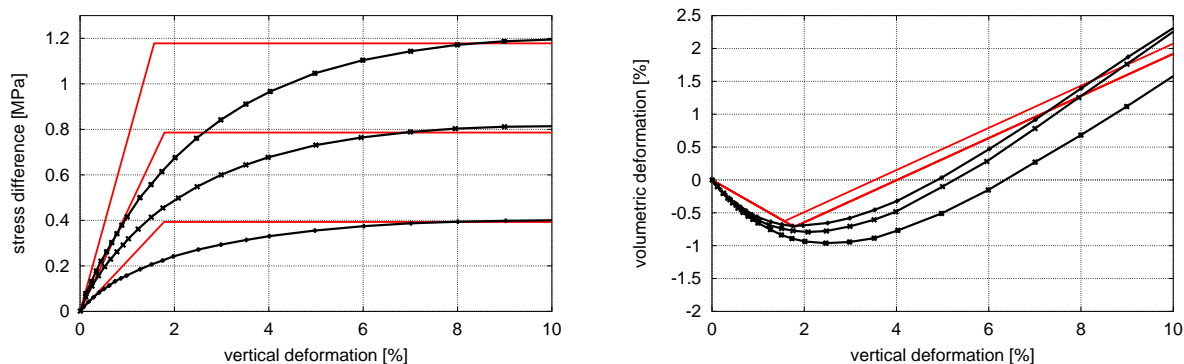
Ideální plasticita je ve spojení s lineární pružností nejrozšířenějším konstitučním vztahem v geotechnické praxi. Jako plocha plasticity se používá téměř výhradně Mohr-Coulombova podmínka, i když řada programů stále nabízí i pro zeminy nevhodnou Drucker-Pragerovu podmínku. Nesporným přínosem zahrnutí plochy plasticity do výpočtu je omezení přípustných napětí, což je nezbytné nejen u úloh analyzujících stav porušení.



Obrázek 4: Vliv konstitučního modelu na vypočtené sedání násypu (Herle & Herle 2001)

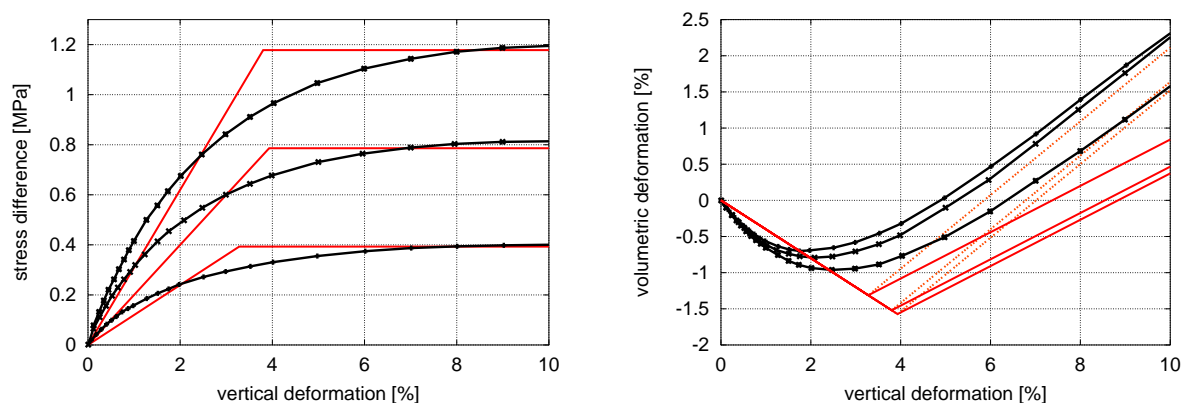
Při zjišťování sedání v ose násypu se nejčastěji používá model oedometrické zkoušky, který vylučuje dosažení plastického stavu a předpokládá pouze pružné chování. Na obr. 4 jsou vyneseny výsledky simulací MKP pro násyp na měkkém podloží, při kterých se studoval vliv různých konstitučních vztahů. Zavedením plasticity do výpočtu dramaticky vzrostly hodnoty sedání, neboť pod násypem vznikají plastické zóny, které umožňují roztlačování podloží do stran (Herle & Herle 2001). Tento fakt, který je ve shodě s pozorováními in situ, však standardní pružný výpočet nemůže zohlednit.

Odpovídá ale pružno-ideálně plastický model experimentálním výsledkům? Na obr. 5



Obrázek 5: Kalibrace Mohr-Coulombova modelu (červeně) na výsledcích standardních triaxiálních zkoušek písku při různých tlacích (Herle 2003)

jsou černě vyneseny laboratorní křivky triaxiálních zkoušek písku při třech různých komorových tlacích (von Wolffersdorff 1997). Možná aproximace konstitučním modelem je vynesena červeně. Modul pružnosti odpovídá tečně pracovního diagramu na jeho počátku a pro každou hodnotu komorového tlaku byla použita jiná hodnota (v běžném výpočtu však zpravidla bývá uvažována jediná hodnota E).



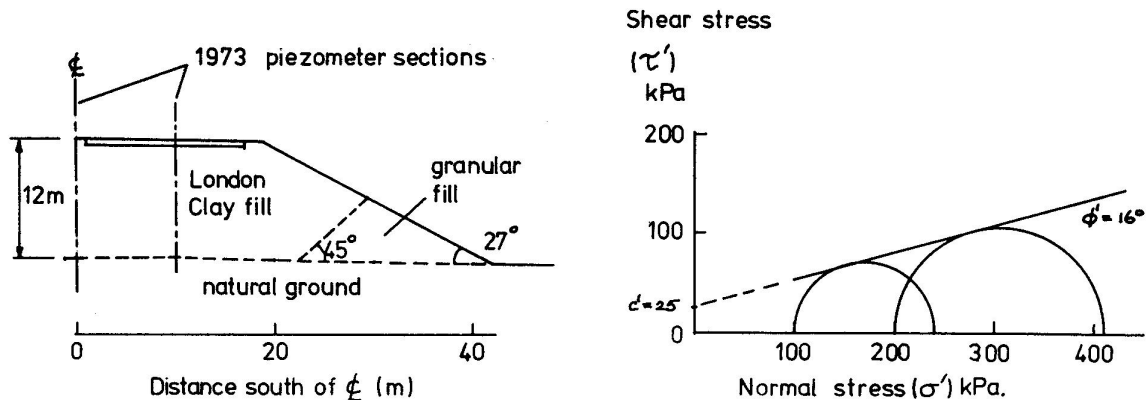
Obrázek 6: Jiná možnost kalibrace Mohr-Coulombova modelu (červeně) na výsledcích standardních triaxiálních zkoušek písku při různých tlacích (Herle 2003)

Je patrné, že reprodukce především pracovních diagramů (obr. 5 vlevo) není dobrá. Pro vylepšení shody se proto nabízí změna modulů pružnosti tak, aby představovaly sečny k pracovním diagramům (obr. 6 vlevo). I přes určité zlepšení však přetrvávají značné odchylky mezi naměřeným a vypočteným průběhem, protože model nezohledňuje nelinearitu chování. Navíc se vylepšením pracovních diagramů zhoršila predikce objemového přetvoření (obr. 6 vpravo), neboť rozšířením pružného oboru dojde k nerealistické počáteční kontraktanci.

Pracovní diagramy na obr. 5 a 6 vzbuzují dojem, že alespoň maximální napětí je reprodukováno spolehlivě. Avšak rozdíl komorových tlaků při zkouškách nebyl velký (100, 200 a 300 kPa). V širším oboru napětí klesá často smyková pevnost zemin (nejvyšší poměr maximálního a minimálního hlavního napětí) s růstem středního napětí. Zanedbání tohoto faktu může vést k nepřijemným důsledkům.

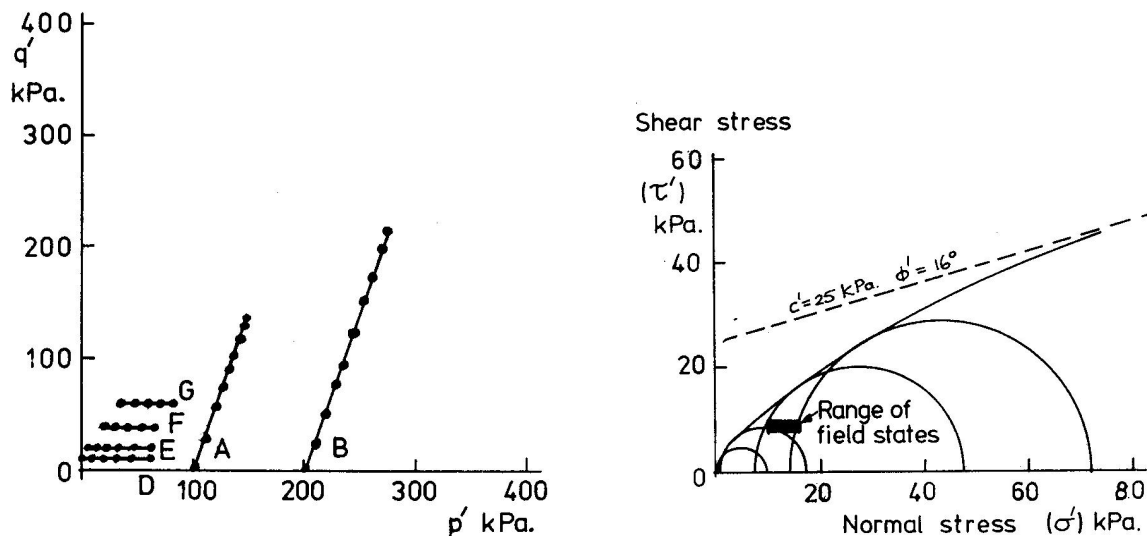
Atkinson & Farrar (1985) referují o případě násypu (obr. 7 vlevo), jehož sklon byl navržen na základě standardních triaxiálních zkoušek. Vyhodnocení laboratorních zkoušek

bylo tradiční a předpokládalo lineární obálku mezních napětí (obr. 7 vpravo).



Obrázek 7: Standardní návrh sklonu násypu vycházející z lineární obálky mezních napětí (Atkinson & Farrar 1985)

Po dokončení násypu se na jeho svahu začaly objevovat mělké sesuvy. Proto byly provedeny dodatečné triaxiální zkoušky s konstantním deviátorem napětí q (dráhy E,F,G na obr. 8 vlevo). Výsledky ukázaly, že obálka porušení je v oboru nízkých napětí silně zakřivená, takže stav napjatosti svahu se blíží mezním napětím (obr. 8 vpravo).



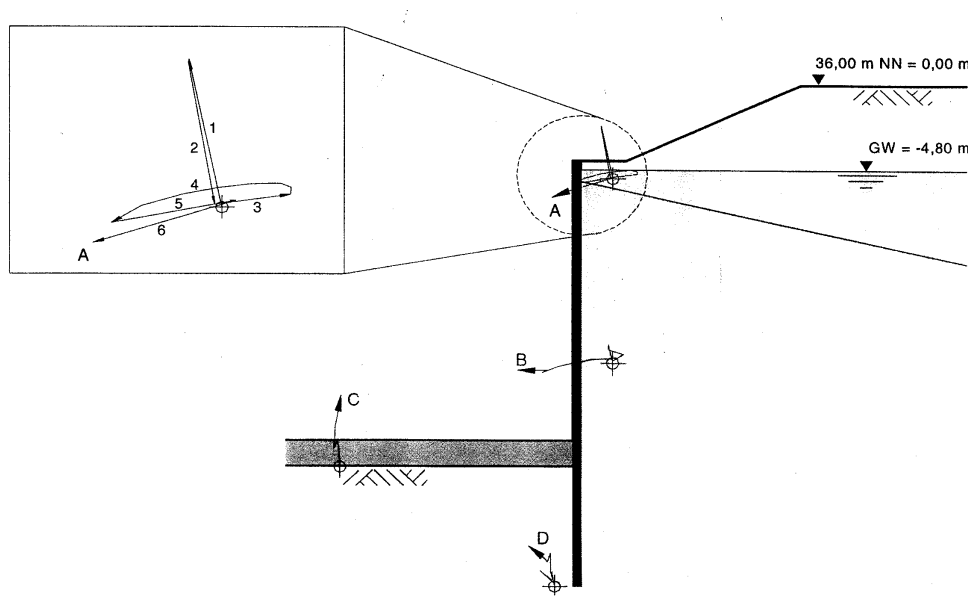
Obrázek 8: Zakřivená obálka mezních napětí (vpravo) na základě dodatečných triaxiálních zkoušek s konstantním deviátorem napětí q (vlevo, dráhy E,F,G) (Atkinson & Farrar 1985)

6. Plasticita se zpevněním

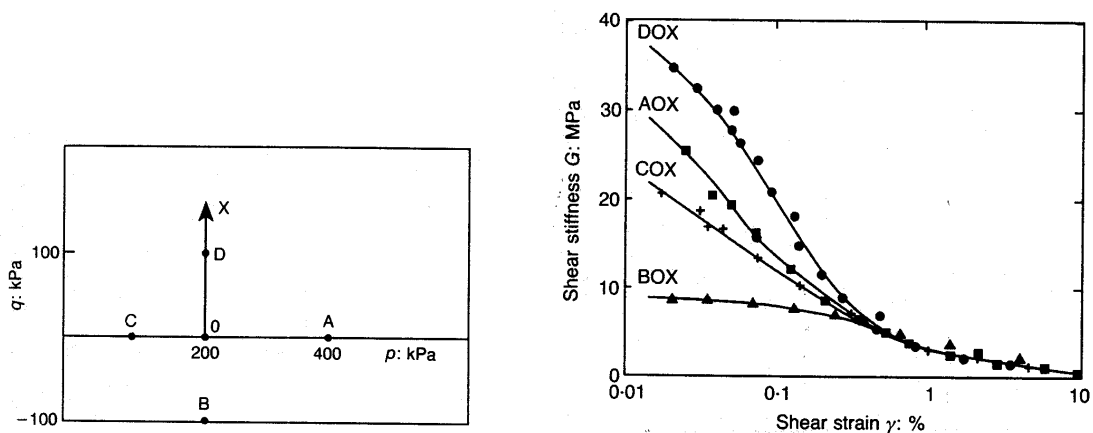
V ideální plasticitě je plocha plasticity neměnná a odpovídá ploše porušení. Historie předchozí deformace nemá vliv na vypočtené chování — zemina postrádá „paměť“. Navíc mohou plastické deformace vznikat pouze v mezním stavu, čemuž odporují měřená nevratná přetvoření např. při oedometrické zkoušce jednoosé stlačitelnosti.

Ve skutečnosti je chování zemin výrazně ovlivněno předchozí deformací. Mimo jiné může poměr tuhosti při „přetížení“ a „odlehčení“ dosahovat až hodnoty 10 nebo může dojít ke zřetelné změně chování při dosažení předchozího maximálního zatížení (i ve smyslu geologické historie). Pro popis těchto jevů musí být konstituční vztahy obohaceny o další stavové veličiny (vnitřní proměnné), které uchovávají a pozměňují potřebné informace.

Teorie plasticity se zpevněním obsahuje nástroje využitelné pro takový úkol. V nejjednodušším případě izotropního zpevnění umožňují navržené modely (např. rodina modelů Cam jílu) zohlednit alespoň velikost překonsolidace a rozdílnou tuhost mezi prvotním přetížením a odlehčením. Zatímco pracovní diagram prvotního přetížení bývá nelineární a vznikají při něm nevratná přetvoření, při odlehčení či opětovném přetížení se chování dostává zpět do pružné oblasti. Proto bývají modely s izotropním zpevněním úspěšně aplikovatelné pouze pro problémy s monotonními dráhami napětí.



Obrázek 9: Dráha naměřených posunů při výkopu kotvené stavební jámy (Herle & Mayer 1999)



Obrázek 10: Vliv historie deformace na tuhost zemin (Richardson 1988). Přírůstků napětí 0X předcházely různé dráhy napětí

Pro řadu geotechnických úloh jsou však monotonní dráhy napětí nerealistické. Obr. 9 ukazuje pro několik bodů dráhy posunů (deformace) při stavbě kotvené stavební jámy. Jejich průběh je velmi komplexní. Triaxiální zkoušky, které prováděl Richardson (1988), přitom dokazují, že při náhlé změně směru přírůstku napětí výrazně vzroste tuhost zeminy (obr. 10).

Ke správné simulaci takových procesů nepostačí jedna skalární vnitřní proměnná jako u většiny plastických modelů s izotropním zpevněním, ale je třeba použít tenzorové proměnné v rámci kinematického zpevnění. Složitost konstitučního vztahu tím podstatně vzroste. Nejenže je třeba nalézt pro tyto tenzorové proměnné vhodné evoluční rovnice, nýbrž se musí definovat i procedura pro určení jejich počátečních hodnot. Tyto vnitřní proměnné představují stavové veličiny zeminy a jako takové by měly být (alespoň teoreticky) měřitelné.

7. Hypoplasticitá

Hypoplastické vztahy představují poněkud odlišný, moderní přístup ke konstitučnímu modelování geomateriálů (Kolymbas & Herle 1998). Oproti pružnoplastickým modelům, které preferují spíše geometrický popis (viz pojmy ploch plasticity či plastického potenciálu), vycházejí hypoplastické modely ze zásad racionální mechaniky (Truesdell & Noll 1965) a tenzorového počtu. Jejich hlavní myšlenkou je, že přetvoření se nedělí na pružné a plastické, takže není zapotřebí definovat podmínky plasticity, plastický potenciál apod. To vede k matematickému zjednodušení výsledné konstituční rovnice.

Dosažení rozdílné tuhosti při přitížení a odlehčení lze znázornit na následujícím příkladu pro jednorozměrný konstituční vztah ($\dot{\sigma}$ je přírůstek napětí a $\dot{\epsilon}$ je přírůstek přetvoření):

$$\dot{\sigma} = E_1 \dot{\epsilon} + E_2 |\dot{\epsilon}|. \quad (2)$$

Pro moduly E_1 a E_2 platí, že $E_1 > E_2 > 0$. Při „přitížení“ ($\dot{\epsilon} < 0$) tudíž dostaneme

$$\dot{\sigma} = (E_1 - E_2) \dot{\epsilon} \quad (3)$$

a při „odlehčení“ ($\dot{\epsilon} > 0$)

$$\dot{\sigma} = (E_1 + E_2) \dot{\epsilon}. \quad (4)$$

Je vidět, že při odlehčení má materiál větší tuhost než při přitížení, aniž by bylo explicitně použito, jak je tomu v teorii plasticity, dvou různých rovnic pro oba případy.

Obecně jsou E_1 a E_2 tenzorovými funkcemi tenzoru napětí \mathbf{T} a dalších stavových veličin (např. čísla pórovitosti e), takže se dá psát:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{L}(\mathbf{T}, e) \mathbf{D} + \mathbf{N}(\mathbf{T}, e) \|\mathbf{D}\| \quad (5)$$

$\dot{\mathbf{T}}$ je objektivní (Jaumannův) přírůstek napětí, \mathbf{D} je přírůstek deformace (*stretching tensor*) s Euklidovou normou $\|\mathbf{D}\|$ a \mathcal{L} a \mathbf{N} jsou konstituční tenzory 4. a 2. řádu. Tento typ hypoplastické rovnice je objektivní s ohledem na rotaci systému souřadnic a je homogenní 1. řádu vzhledem k přírůstku deformace, takže rychlost přetváření nehraje roli.

Konkrétním příkladem navrženého hypoplastického vztahu může být (Gudehus 1996, von Wolffersdorff 1996)

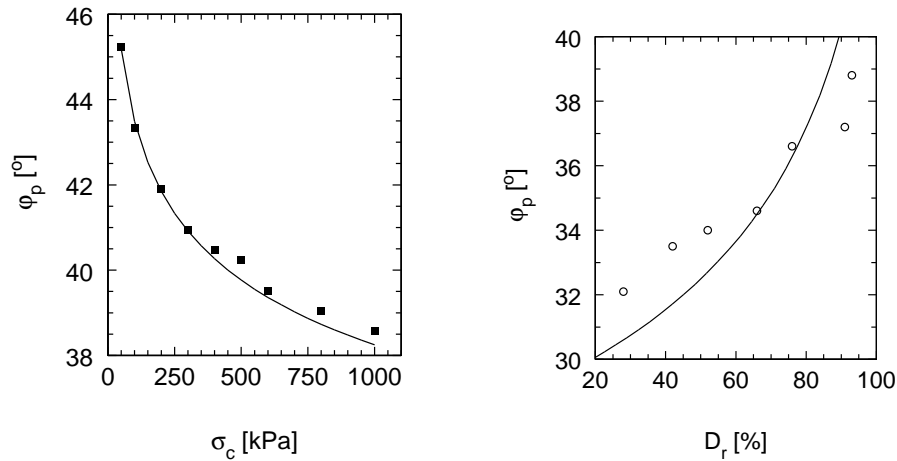
$$\dot{\mathbf{T}} = f_s \frac{1}{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} \left[F^2 \mathbf{D} + a^2 \hat{\mathbf{T}} \text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}) + f_d a F (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^*) \|\mathbf{D}\| \right] \quad (6)$$

kde

$$\hat{\mathbf{T}} := \mathbf{T}/\text{tr}\mathbf{T} \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{T}}^* := \hat{\mathbf{T}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \quad .$$

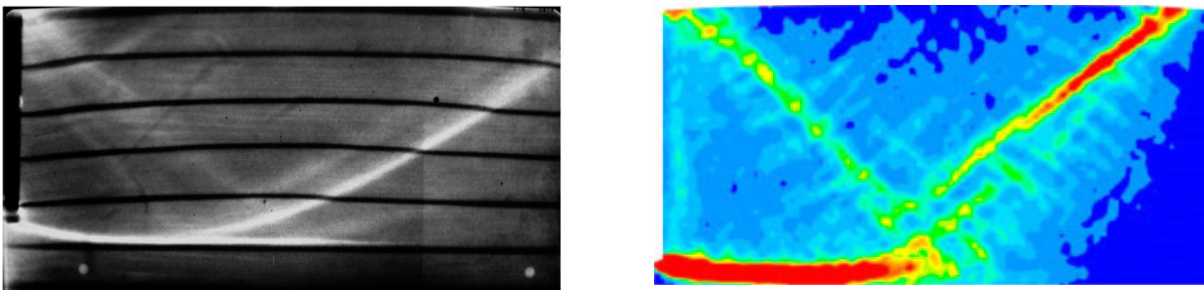
a je konstanta, F je skalární funkce tenzoru napětí definující plochu kritického stavu v deviatorové rovině a f_s spolu s f_d jsou skalární funkce středního napětí a čísla pórovitosti.

Ke kalibraci modelu, tj. k určení celkem osmi materiálových parametrů, jsou zapotřebí pouze standardní triaxiální a oedometrické zkoušky. V případě písčitéch zemin pak většina parametrů hypoplastického modelu koreluje s veličinami z indexových zkoušek (Herle & Gudehus 1999).



Obrázek 11: Závislost vrcholového úhlu vnitřního tření φ_p na komorovém tlaku σ_c (vlevo) a na relativní ulehlosti D_r (vpravo) při triaxiálních zkouškách. Srovnání experimentů (Wu 1992) s hypoplastickým modelem (plná čára)

Hypoplastický model v sobě zahrnuje vliv středního napětí a ulehlosti (čísla pórovitosti) na smykovou pevnost. Velmi doboru shodu mezi vrcholovým úhlem vnitřního tření φ_p z triaxiálních experimentů (Wu 1992) a z konstitučního modelu dokazuje obr. 11. Analogicky se mění i dilatance a tuhost (Herle 1997).

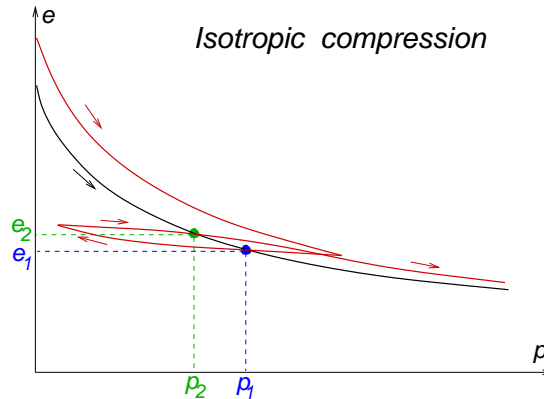


Obrázek 12: Experiment (vlevo) a hypoplastický výpočet (vpravo) rozdělení pórovitosti při pasivním zemním tlaku (Nübel 2002)

Úspěšnost aplikace hypoplastického modelu i při řešení okrajových úloh dokumentuje obr. 12 (Nübel 2002). Při zatlačování tuhé stěny do ulehlé písčité zeminy roste zemní odpor

(pasivní zemní tlak) až do chvíle, kdy se v zemině vytvoří primární smyková plocha doprovázená sekundárními smykovými zónami. Písek uvnitř smykových ploch se musí nakypřit, což hypoplastický výpočet věrohodně reprodukuje.

Ve výše popsané verzi hypoplasticity je stav zeminy definován aktuálním tenzorem napětí a číslem pórovitosti. Podívejme se ale na experiment na obr. 13. Rozdílnou tuhost červené a černé křivky při napětí p_1 a čísla pórovitosti e_1 lze namodelovat díky odlišnému směru přírůstku deformace, viz rovnice (3) a (4). Jak ale popsat chování v bodě (p_2, e_2) ? V tomto případě je do hypoplasticity evidentně zapotřebí další stavová veličina.



Obrázek 13: Idealizovaný pracovní diagram zkoušky izotropního stlačování (potřeba paměťové proměnné pro popis opětovného přitížení)

Protože při změně deformační dráhy se přetvoření koncentrují na kontakty mezi zrny, definovali Niemunis & Herle (1997) tzv. tenzor intergranulárního přetvoření \mathbf{S} , který řeší výše zmíněný problém. V 1D se dá evoluční rovnice pro \mathbf{S} zapsat jako

$$\dot{S} = \begin{cases} \left(1 - \frac{|S|}{R}\right) D & \text{pro } S \cdot D > 0 \\ D & \text{pro } S \cdot D \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(R je materiálový parametr určující maximální intergranulární přetvoření). Upravená hypoplastická rovnice pak dostane následující tvar:

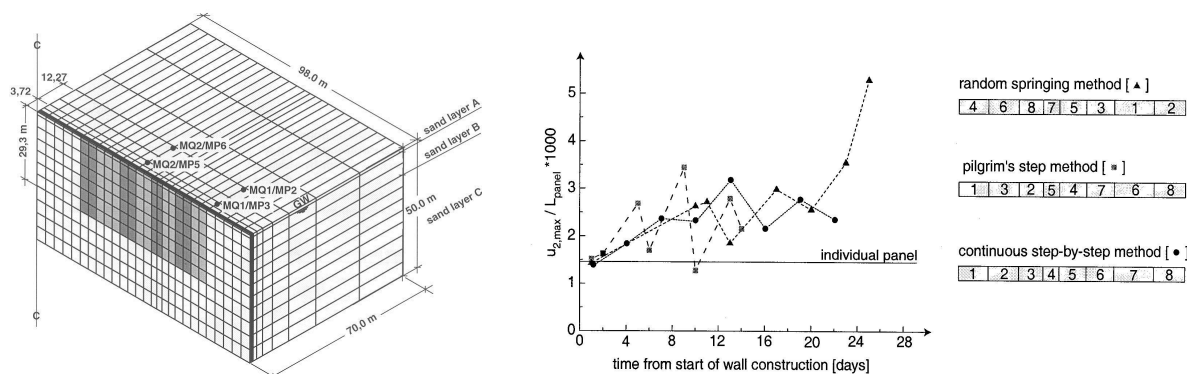
$$\dot{T} = \begin{cases} mLD & \text{pro } S \cdot D < 0 \\ (1 - \rho)mLD + \rho(LD + N|D|) & \text{pro } S \cdot D \geq 0 \end{cases} ; \quad 0 < -N < L, \quad (8)$$

kde $\rho = |S|/R$, a $m > 1$ je další materiálový parametr.

Hypoplastickou rovnicí s intergranulárními přetvořeními se daří úspěšně řešit řadu náročných geotechnických úloh. Mayer (2000) např. studoval vliv pořadí instalace bentonitových lamel na deformace okolí hluboké stavební jámy (obr. 14) či Karcher (2003) zjišťoval vliv sekvence těžby v povrchových hnědouhelných dolech na stabilitu a deformaci jejich svahů.

8. Numerické metody

Prezentace úspěšných výsledků simulací okrajových úloh může vzbudit dojem, že díky komplexním konstitučním vztahům se v geotechnice dají vyřešit libovolná zadání. Avšak i když necháme stranou řadu jevů, které zde nebyly diskutovány a které ani moderní konstituční



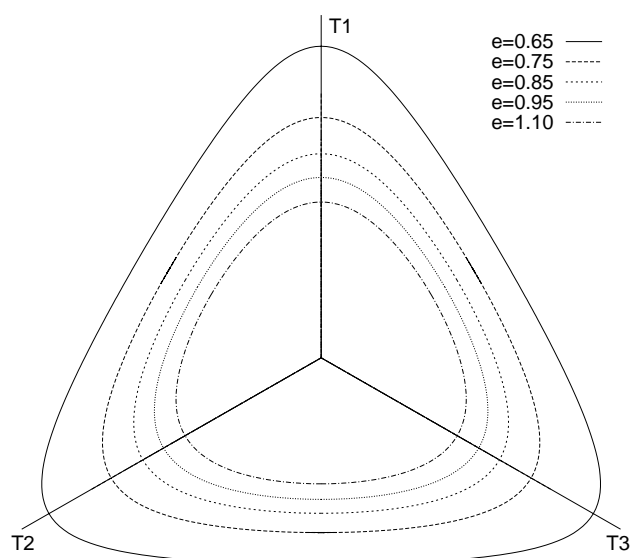
Obrázek 14: Studie vlivu pořadí hloubených lamel na deformace (Mayer 2000)

vztahy spolehlivě nepopisují, musíme přiznat, že s růstem komplexity konstitučních modelů je spojena řada matematických problémů.

Řešení dobře podmíněné okrajové úlohy musí splňovat 3 podmínky (*well-posedness*):

1. existence
2. jednoznačnost
3. stabilita

(Ne)existence se dá jen stěží prokázat, ale otázky (ne)jednoznačnosti a (ne)stability jsou častým námětem vědeckého zkoumání. Z hlediska samotných konstitučních vztahů se ukazuje, že jednoznačnost odezvy je zajištěna pouze při stavech produkujících $\mathbf{T}\mathbf{D} > 0$. V opačném případě může dojít k bifurkaci. Plocha bifurkace bývá obvykle dosažena již při relativně nízkém deviátorovém napětí (zhruba při poměru hlavních napětí odpovídajících zemnímu tlaku v klidu), které v případě hypoplastického modelu klesá s rostoucím číslem pórovitosti (obr. 15).



Obrázek 15: Závislost plochy bifurkace hypoplastického modelu v deviátorové rovině na čísle pórovitosti při $p=100$ kPa (Herle & Kolymbas 2001)

9. Závěr

Významná role konstitučních modelů je v geotechnice nesporná. Přestože celá řada příkladů demonstruje nevhodnost klasických (jednoduchých) modelů pro řešení okrajových úloh, setrvačnost praxe je v tomto ohledu obrovská. Modul pružnosti či úhel vnitřního tření stále představují pro širokou odbornou veřejnost nejdůležitější parametry zemin, kterými se dají plně charakterizovat jejich vlastnosti.

Avšak konstituční modely musí být v první řadě nelineární, aby realisticky vystihly chování alespoň při monotonních drahách zatěžování. V řadě případů je nutné zohlednit i historii předchozí deformace, což vede ke složitým pružnoplastickým modelům s kinematickým zpevněním. Jako alternativa se nabízí použití hypoplastického modelu s intergranulárními přetvořeními.

Stinnou stránkou realistických konstitučních vztahů bývá jejich komplikovaná matematická struktura, která vnáší nejednoznačnost (a často i nestabilitu) do řešení a tím vyvolává numerické problémy.

10. Literatura

- Atkinson, J. & Farrar, D. (1985) Stress path tests to measure soils strength parameters for shallow landslips, in: *Proc. XI ICSMFE*, Vol. 2, San Francisco, pp. 983–986.
- Bauer, E. (1992) Zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe unter vorwiegend ödometrischer Beanspruchung. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 130.
- Burland, J. (1989) "Small is beautiful" — the stiffness of soils at small strains. *Canadian Geotechnical Journal* **26**: 499–516.
- Di Prisco, C., Nova, R. & Lanier, J. (1993) A mixed isotropic-kinematic hardening constitutive law for sand, in: D. Kolymbas (ed.), *Modern approaches to plasticity*, Elsevier, pp. 83–124.
- Gudehus, G. (1996) A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils and Foundations* **36**(1): 1–12.
- Herle, I. (1997) Hypoplastizität und Granulometrie einfacher Korngerüste. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 142.
- Herle, I. (2003) Numerical predictions and reality, in: D. Kolymbas (ed.), *GeoMath — Geomechanics and Mathematics*, Springer, Horton. In print.
- Herle, I., Doanh, T. & Wu, W. (2000) Comparison of hypoplastic and elastoplastic modelling of undrained triaxial tests on loose sand, in: D. Kolymbas (ed.), *Constitutive Modelling of Granular Materials*, Springer, Horton, pp. 333–351.
- Herle, I. & Gudehus, G. (1999) Determination of parameters of a hypoplastic constitutive model from properties of grain assemblies. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* **4**(5): 461–486.
- Herle, I. & Herle, V. (2001) Road construction on a soft organic subsoil, in: *Proc. 15th Int. Conf. Soil Mech. Geotech. Eng.*, Vol. 3, A.A.Balkema Publishers, Istanbul, pp. 2081–2084.

- Herle, I. & Kolymbas, D. (2001) Pressure- and density-dependent bifurcation of soils, in: H.-B. Mühlhaus, A. V. Dyskin & E. Pasternak (eds), *Bifurcation and Localisation Theory in Geomechanics*, Swets & Zeitlinger, Lisse, pp. 53–58.
- Herle, I. & Mayer, P.-M. (1999) Verformungsberechnung einer Unterwasserbetonbaugrube auf der Grundlage hypoplastisch ermittelter Parameter des Berliner Sandes. *Bautechnik* **76**(1): 34–48.
- Karcher, C. (2003) Tagebaubedingte Deformationen im Lockergestein. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 160.
- Kolymbas, D. & Herle, I. (1998) Hypoplasticity: A framework to model granular materials, in: B. Cambou (ed.), *Behaviour of granular materials. CISM courses and lectures No. 385*, Springer, pp. 239–268.
- Mayer, P.-M. (2000) Verformungen und Spannungsänderungen im Boden durch Schlitzwandherstellung und Baugrubenaushub. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 151.
- Niemunis, A. & Herle, I. (1997) Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* **2**(4): 279–299.
- Nübel, K. (2002) Experimental and numerical investigation of shear localization in granular material. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 159.
- Richardson, D. (1988) Investigations of threshold effects in soil deformations. *PhD-Thesis*, City University, London.
- Simpson, B., O’Riordan, N. & Croft, D. (1979) A computer model for the analysis of ground movements in London Clay. *Géotechnique* **29**(2): 149–175.
- Tatsuoka, F., Jardine, R., Lo Presti, D., Di Benedetto, H. & Kodaka, T. (1999) Theme lecture: Characterising the pre-failure deformation properties of geomaterials, in: *Proc. XIV ICSMFE, Hamburg*, Vol. 4, A.A.Balkema, pp. 2129–2164.
- Truesdell, C. & Noll, W. (1965) *The non-linear field theories of mechanics. Handbuch der Physik III/c*, Springer-Verlag.
- von Wolffersdorff, P.-A. (1996) A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* **1**: 251–271.
- von Wolffersdorff, P.-A. (1997) Verformungsprognosen für Stützkonstruktionen. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 141.
- Wu, W. (1992) Hypoplastizität als mathematisches Modell zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 129.