

A STABILITY OF THE FLOW IN THE THIN CIRCULAR GAP

F. Pochylý*, E. Malenovský*, S. Paulíková*

Summary: *The condition of stability of steady flow in rotationally symmetrical area is presented in the paper. The governing equation is Navier-Stokes and the continuity equation for an incompressible liquid. Small velocity and pressure perturbation is superimposed on the basic flow. Stability is assessed according to the real part of eigenvalue of the associated eigenvalues problem.*

1. Úvod

Dnes se běžně využívá kluzných ložisek, které pracují na principu vzlaku, způsobeného účinkem viskózních sil. Málo pozornosti je však věnováno stabilitě základního stacionárního proudění, vyvolaného rotací hřídele.

Již v minulosti ukázal Taylor, F.R.S. (1923), že existuje oblast, také stacionárního proudění, která je charakterizována Taylorovými víry. Stuart, J.T (1986) ukázal, že podobný druh vírů vzniká i u excentricky uloženého rotoru a v Pochylý, F., Malenovský, E. (2003) jsou uvedeny některé podmínky stability základních stacionárních proudění pro tento případ.

V této práci chceme ukázat analytický přístup k určování zmíněné stability a to na problému vlastních hodnot, odvozených z Navier-Stokesových rovnic.

2. Problém vlastních hodnot

Vyjděme z Navier-Stokesových rovnic a rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu:

$$\rho \cdot \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (c_i c_j) - \eta \cdot \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

* Prof. Ing František Pochylý, CSc., Energetický ústav, Odbor hydraulických strojů V.K., VUT FSI Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: pochyly@khzs.fme.vutbr.cz

Doc. Ing. Eduard Malenovský, CSc., Ústav mechaniky těles, Odbor kinematiky a dynamiky, VUT FSI Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: malenovsky@umt.fme.vutbr.cz

Ing. Simona Paulíková, Energetický ústav, Odbor hydraulických strojů V.K. VUT FSI Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: simona@khzs.fme.vutbr.cz

Předpokládejme, že rychlost a tlak lze rozložit na stacionární a nestacionární část:

$$c_i = c_{0i}(x_j) + w_i(x_j, t) \quad (3)$$

$$w_i \ll c_{0i} \quad (4)$$

$$p = p_0(x_i) + h(x_i, t) \quad (5)$$

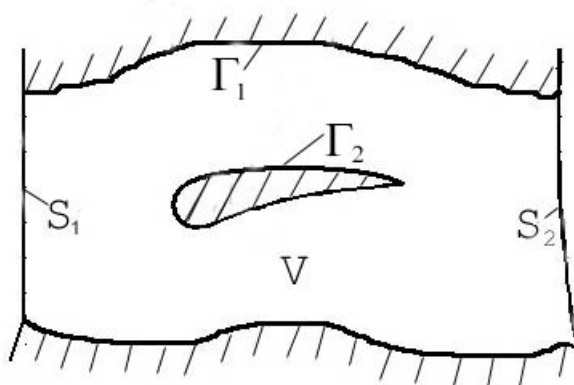
$$h \ll h_0 \quad (6)$$

Uvažujme obor V , dle obrázku, ohraničený povrchy S_1 , S_2 , Γ , na kterých jsou předepsány okrajové podmínky:

$$S_1: \quad p = p_1(x_i, t) \quad ; \quad S_2: \quad p = p_2(x_i, t) \quad (7)$$

$$\Gamma_1: \quad c_i = 0 \quad ; \quad \Gamma_2: \quad c_i = c_{00i} \quad (8)$$

OBR. 1



Uvážíme-li (3), získáme:

$$c_i c_j = c_{0i} c_{0j} + c_{0i} w_j + c_{0j} w_i + w_i w_j \quad (9)$$

Vzhledem k předpokladům (4) zanedbáme nelineární člen $w_i w_j$ tak, že přibližně platí:

$$c_i c_j = c_{0i} c_{0j} + c_{0i} w_j + c_{0j} w_i \quad (10)$$

Uvážíme-li tento vztah, dále (3), (5), lze po dosazení do (1), (2) psát následující systémy rovnic pro stacionární a nestacionární část:

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{0i} c_{0j}) - \eta \cdot \frac{\partial^2 c_{0i}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

Okrajové podmínky:

$$S_1: p_0 = p_{01} \quad ; \quad S_2: p_0 = p_{02} \quad (13)$$

$$\Gamma_1: c_i = 0 \quad ; \quad \Gamma_2: c_{0i} = c_{00i} \quad (14)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{0i} w_j + c_{0j} w_i) - \eta \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (16)$$

Okrajové podmínky:

$$S_1: h = h_1 \quad ; \quad S_2: h = h_2 \quad (17)$$

$$\Gamma_1: w_i = 0 \quad ; \quad \Gamma_2: w_i = 0 \quad (18)$$

Předpokládejme nyní, že řešení systému (11) ÷ (14) je známo, tj. známe rychlostní a tlakové pole stacionárního proudění.

Vzhledem k tomu, že systém (15) ÷ (18) je lineární, je možné k němu přidružit následující problém vlastních hodnot.

$$s \cdot \rho \cdot \alpha_i + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{0i} \alpha_j + c_{0j} \alpha_i) - \eta \cdot \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

Okrajové podmínky:

$$S_1: \sigma = 0 \quad ; \quad S_2: \sigma = 0 \quad (21)$$

$$\Gamma_1: \alpha_i = 0 \quad ; \quad \Gamma_2: \alpha_i = 0 \quad (22)$$

Ve výrazech (19) ÷ (22) značí:

s – komplexní vlastní číslo

$$s = \alpha + i \cdot \omega \quad \alpha, \omega \in \text{Re} \quad (23)$$

α_i, σ – vlastní vektory rychlosti, tlaku, obecně opět komplexní

$$\alpha_i = a_i + i \cdot b_i \quad ; \quad \sigma = \kappa_1 + i \cdot \kappa_2 \quad ; \quad a_i, b_i, \kappa_1, \kappa_2 \in \text{Re}$$

Rozborem stability lze ukázat, že předpokládaný stacionární pohyb je nestabilní v případě, že platí:

$$\alpha > 0 \quad (23)$$

3. Stabilita stacionárního pohybu kapaliny

Reálnou část α vlastní hodnoty s získáme tak, že rovnici (19) vynásobíme skalárně vlastním vektorem rychlosti. Po vynásobení rovnice (19) komplexně sdruženým vlastním vektorem α_i^* a využití věty Gauss-Ostrogradského lze psát pro α výraz:

$$\alpha = -\frac{\frac{1}{2}\rho \int_{S_1 \cup S_2} \alpha_i \alpha_i^* c_{0i} n_i dS + \rho \int_V \frac{\partial c_{0i}}{\partial x_j} (a_i a_j + b_i b_j) dV}{\int_V \alpha_i \alpha_i^* dV} + \frac{\eta \int_{S_1 \cup S_2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \alpha_i^* n_j d\Gamma - \eta \int_V \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \frac{\partial \alpha_i^*}{\partial x_j} dV}{\int_V \alpha_i \alpha_i^* dV} \quad (24)$$

Výraz (24) platí zcela obecně pro libovolný tvar oblasti V . Platí i v případě, že na hranicích $S_1 \cup S_2$ jsou zadány rychlosti. V tomto případě ale integrály přes $S_1 \cup S_2$ jsou rovny nule, neboť je zde při těchto okrajových podmínkách $\alpha_i = 0$.

Integrály přes oblast $S_1 \cup S_2$ vymizí i v případě, že na $S_1 \cup S_2$ je stejný rychlostní profil, tj. např. při řešení kluzných ložisek, kdy nepředpokládáme úhlové natočení hřídele.

Z výrazu (3) je zřejmé

$$\eta \int_V \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \frac{\partial \alpha_i^*}{\partial x_j} dV > 0 \quad (25)$$

takže tento člen vždy přispívá ke stabilitě uvažovaného stacionárního proudění.

Nestabilitu mohou způsobit pouze dva členy, v nichž je explicitně vyjádřen vliv stacionární rychlosti, tj.:

$$\frac{1}{2}\rho \int_{S_1 \cup S_2} \alpha_i \alpha_i^* c_{0i} n_i dS + \rho \int_V \frac{\partial c_{0i}}{\partial x_j} (a_i a_j + b_i b_j) dV$$

pokud má součet záporné znaménko a převyšuje-li účinek viskózních sil (2)

V dalším se zaměříme na podmínky stability v rotačně- symetrické oblasti a tudíž převedeme problém do válcových souřadnic.

Označíme-li radiální směr symbolem R a φ obvodový směr, lze psát:

$$c_{01} = c_R \cos \varphi - c_\varphi \sin \varphi \quad ; \quad c_{02} = c_R \sin \varphi + c_\varphi \cos \varphi \quad (26)$$

analogicky pro a_1, a_2, b_1, b_2 . Dále platí:

$$\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_1} = \frac{\partial c_{0i}}{\partial R} \cos \varphi - \frac{1}{R} \frac{\partial c_{0i}}{\partial \varphi} \sin \varphi \quad (27)$$

$$\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_2} = \frac{\partial c_{0i}}{\partial R} \sin \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial c_{0i}}{\partial \varphi} \cos \varphi \quad (28)$$

Uvážíme-li nejjednodušší případ, kdy

$$c_R = 0, \quad c_\varphi = 0, \quad c_3 = 0 \quad (29)$$

lze psát:

$$\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_j} (a_i a_j + b_i b_j) = R \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{c_\varphi}{R} \right) \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(a_R^2 - a_\varphi^2) + (b_R^2 - b_\varphi^2)] \cdot \\ \cdot \sin \varphi \cos \varphi \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \\ + (a_i a_j + b_i b_j) \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2 \end{array} \right\} \quad (30)$$

Uvažujeme-li oblast V , tvořenou mezikružím s vnitřním poloměrem R_1 , vnějším poloměrem R_2 a délkou L , lze psát:

$$\int_V \frac{\partial c_{0i}}{\partial x_j} (a_i a_j + b_i b_j) dV = \Pi \int_{R_1}^{R_2} \left[R^2 \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{c_\varphi}{R} \right) \int_0^L (a_i a_j + b_i b_j) dx \right] dx dR \quad (31)$$

Vzhledem k tomu, že v rovině (x_1, x_2) lze psát:

$$a_R = a_\varphi \cot g \varepsilon_a; \quad b_R = b_\varphi \cot g \varepsilon_b; \quad \varepsilon_a < \frac{\pi}{2} \wedge \varepsilon_b < \frac{\pi}{2} \quad \text{je} \quad (a_i a_j + b_i b_j) > 0$$

takže nutná podmínka pro nestabilitu má tvar:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{c_\varphi}{R} \right) < 0 \quad (32)$$

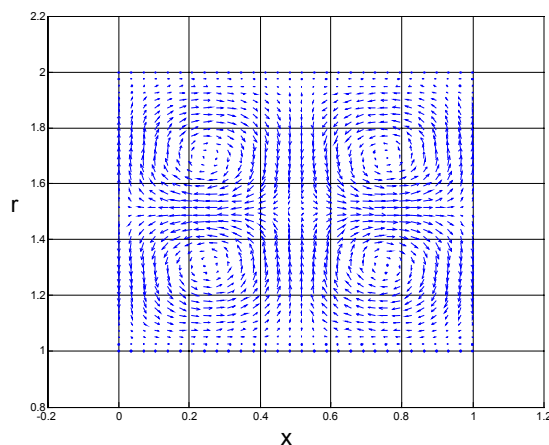
Z podmínky (3.9) je zřejmé, že možnost vzniku Taylorových vírů je vytvořena tehdy, když vnitřní kroužek rotuje vyšší obvodovou rychlostí než kroužek vnější.

Z podmínky (3.8) je dále zřejmé, že nestabilitě budou přispívat ty tvary rychlosti, pro něž platí $a_R, b_R \neq 0$.

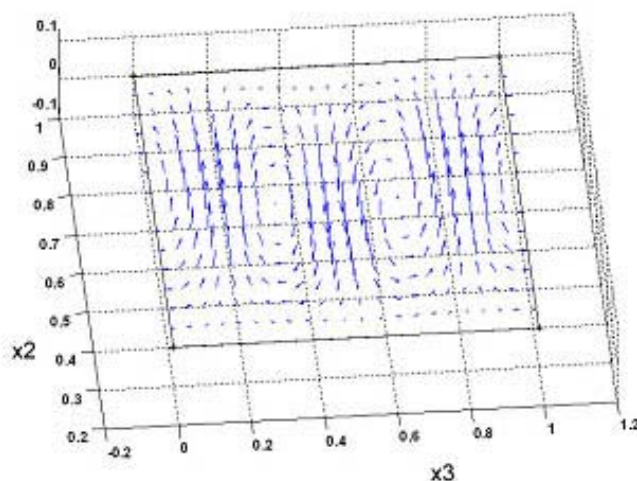
Naopak vlastní tvary, u nichž $a_R, b_R = 0$, se po krátkém čase utlumí a nemají vliv na stabilitu stacionárního proudění.

Na obr. 2 je uveden vlastní tvar rychlosti při $c_\varphi = 0$, a na obr. 3 vlastní tvar rychlosti odpovídající úhlové rychlosti $\omega = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

OBR. 2



OBR. 3



$$\rho = 885 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; R_1 = 0,05 \text{ m};$$

$$R_2 = 0,055 \text{ m}; \omega = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$\eta = 0,008 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

4. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory těchto výzkumných záměrů:

MSM 262 10001
CZ 300004

5. Literatura

Taylor, F.R.S.: (1923), *Stability of a Viscous liquid Contained Between Two Rotating Cylinders*. Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 223, pp. 289-343.

Stuart, J.T.: (1986), *Taylor – Vortex Flow: a Dynamical System*. SIAM Review 28, 315.

Pochylý, F., Malenovský, E.: (2003), *The Stability of Steady Flow in Journal Bearings*. New York