

SOLUTION OF THE FLOW IN THE THIN GAP BETWEEN ROTATING SHAFT AND FLEXIBLE COATING

F. Pochylý*, R. Klas*, V. Habán*

Summary: *These problems were solved in past by Reynolds equation, which assumed a thin and a circular gap. A modification of Reynolds equation, a presumption of its derivation and a comparison between analyses and more precise solution with Fluent software for different boundary conditions are presented in the paper.*

1. Úvod

Při řešení vycházíme ze základních Navier-Stokesových rovnic, které linearizujeme zanedbáním nelineárních konvektivních členů. To je první zjednodušení, které se předpokládá při odvozování Reynoldsovy rovnice. Druhé zjednodušení spočívá v předpokladu nestlačitelnosti kapaliny a třetí zjednodušení v zanedbání lokálního zrychlení $\partial c_i / \partial t$, takže se vůbec neuvažuje vliv setrvačných sil kapaliny. To však nejsou všechna zjednodušení, která se předpokládají při odvozování Reynoldsovy rovnice. Další, důležité zjednodušení, které platí pouze pro tenké spáry spočívá v předpokladu, že tlak v radiálním směru je konstantní. Zabývejme se nejdříve důkazem tohoto předpokladu pro rovinné proudění.

2. Rovinné proudění v polárních souřadnicích (r, φ) –určení tlaku p

Uvažujeme rovinné laminární proudění. Pro tento případ je možné zapsat Navier-Stokesovy rovnice a rovnici kontinuity ve tvaru:

$$\rho \frac{\partial c_r}{\partial t} - \eta \left(\frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_r}{\partial \varphi^2} - \frac{c_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial c_\varphi}{\partial t} - \eta \left(\frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{c_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{c_r}{r} = 0 \quad (3)$$

c_r - radiální rychlost, c_φ - obvodová rychlost, p – tlak

* Prof. Ing. František Pochylý, Csc., Ing. Vladimír Habán, Ph.D., Ing. Roman Klas: Energetický ústav VUT FSI, Technická 2896/2, 616 69 Brno, e-mail: pochyly@khzs.fme.vutbr.cz, haban@khzs.fme.vutbr.cz, klas@khzs.fme.vutbr.cz

Uvážíme-li, že platí:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{1}{r} c_r \right) = \frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} c_r \quad (4)$$

a z rovnice kontinuity, že plyne:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r c_r) = - \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (5)$$

Ize úpravou rovnic (1) ÷ (3) obdržet pro tlak p parciální diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (6)$$

Této rovnici vyhovuje funkce:

$$p = \text{Konst.} - \frac{\sigma(\varphi)}{r^2} \quad (7)$$

Z výrazu (7) je zřejmé, že pokud je mezera, ve které řešíme proudění tenká, kde se r málo mění, je tlak skutečně málo závislý na r . Poslední výsledek je tedy potvrzením předchozího předpokladu Reynoldse a je důležitý zejména proto, že obecně platí i pro nestacionární proudění. V dalším se budeme zabývat pouze stacionárním prouděním a uvedeme další předpoklady, za kterých platí Reynoldsova rovnice.

3. Stacionární rovinné laminární proudění

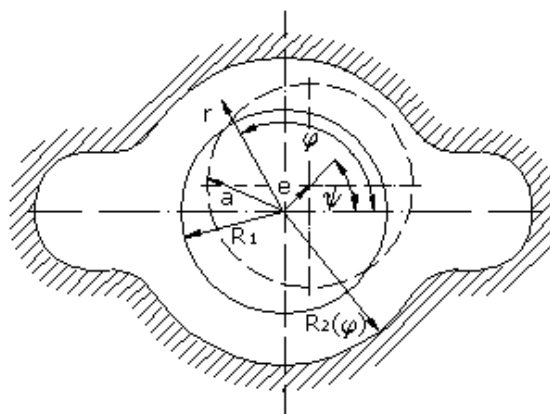
Toto proudění popisuje systém rovnic:

$$\eta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r c_r) \right] + \frac{\eta}{r^3} \frac{\partial^2 (r c_r)}{\partial \varphi^2} + \frac{2\eta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r c_r) = - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (8)$$

$$\eta \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial c_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} c_\varphi \right) \right] + \eta r \frac{\partial^3 c_\varphi}{\partial r \partial \varphi^2} - \eta \frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r c_r) = - \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} \quad (10)$$

$$p = K - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma(\varphi)}{\partial \varphi} \quad (11)$$



Obr.1

4. Reynoldsova rovnice

Uvažujme Obr.1. Předpokládejme, že \mathbf{R}_1 je poloměr čepu. Čep ať je vychýlen do polohy udané $(\mathbf{e}, \boldsymbol{\psi})$. Na povrchu čepu jsou zadány rychlosti:

$$r = a : c_\varphi = c_{\varphi a}; c_r = c_{ra} \quad (12)$$

$$r = R_2 : c_\varphi = 0; c_r = 0 \quad (13)$$

Dosadíme-li z (11) do (8), (9), lze řešením těchto rovnic s okrajovými podmínkami (12), (13) stanovit \mathbf{c}_φ a \mathbf{c}_r v závislosti na $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi})$. Funkci $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi})$ stanovíme z rovnice (11) integrací v oboru $\mathbf{r} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{R}_2 \rangle$. Integrací (10) lze získat vztah:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \int_{a(\boldsymbol{\varphi})}^{R_2(\boldsymbol{\varphi})} c_\varphi dr = a(\boldsymbol{\varphi})c_{ra} - \frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{\varphi}} c_{\varphi a} \quad (14)$$

Položíme-li,

$$r = R_2 - h; H = R_2 - a \quad (15)$$

lze též psát:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \int_0^H c_\varphi dh = a(\boldsymbol{\varphi})c_{ra} - \frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{\varphi}} c_{\varphi a} \quad (16)$$

Posledních dvou vztahů se využívá při odvozování původní Reynoldsovy rovnice. Zabývejme se tímto případem a poukažme na další zjednodušení. Vyjděme z rovnice (9). Dosadíme sem z (11) a předpokládejme, že

$$\frac{\partial c_\varphi}{\partial r} \gg \frac{1}{r} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \boldsymbol{\varphi}}. \quad (17)$$

Po úpravě lze psát:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial c_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} c_\varphi \right) = -\frac{1}{\eta r^3} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \quad (18)$$

Dále předpokládejme:

$$\frac{\partial c_\varphi}{\partial r} \gg \frac{1}{r} c_\varphi \quad (19)$$

Za těchto předpokladů je odvozena původní Reynoldsova rovnice a vzhledem k (19) lze (18) psát ve tvaru:

$$\frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial r^2} = -\frac{1}{\eta r^3} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \quad (20)$$

Vzhledem k tomu, že se v tenké spáře poloměr \mathbf{r} málo mění, provedeme poslední zjednodušení tak, že místo \mathbf{r} dosadíme \mathbf{R}_1 , takže:

$$\frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial r^2} = -\frac{1}{\eta R_1^3} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \quad (21)$$

Vyjádříme-li ještě \mathbf{r} pomocí \mathbf{h} , viz (15), platí:

$$\frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial h^2} = -\frac{1}{\eta R_1^3} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \quad (22)$$

Řešení této rovnice má tvar:

$$c_\varphi = B(\varphi) + A(\varphi)h - \frac{1}{\eta R_1^3} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \frac{h^2}{2} \quad (23)$$

Uvážíme-li okrajové podmínky (12), (13), získáme odtud funkce $\mathbf{B}(\varphi)$, $\mathbf{A}(\varphi)$, takže pro \mathbf{c}_φ platí:

$$c_\varphi = c_{\varphi a} \frac{h}{H} + \frac{1}{2\eta R_1^3} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} (Hh - h^2) \quad (24)$$

Dosadíme-li do (16) získáme Reynoldsovu rovnici ve tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H^3 \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right) = 6\eta R_2^3 \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi} - 2 \frac{\partial R_2}{\partial \varphi} \right) c_{\varphi a} - 6\eta R_2^3 H \frac{\partial c_{\varphi a}}{\partial \varphi} + 12\eta R_2^3 a c_{ra} \quad (25)$$

Rovnice (25) uvažuje i změny $\mathbf{R}_2(\varphi)$. Původní Reynoldsova rovnice tyto změny neuvažuje a neuvažuje ani výraz pro tlak. Její původní podobu získáme tak, že za σ dosadíme tlak ze (7), místo \mathbf{a} píšeme \mathbf{R}_2 a $\partial R_2 / \partial \varphi = 0$. Tedy:

$$R_2^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) = -6\eta R_2^3 \frac{\partial H}{\partial \varphi} c_{\varphi a} + 6\eta R_2^3 H \frac{\partial c_{\varphi a}}{\partial \varphi} - 12\eta R_2^4 c_{ra} \quad (26)$$

5. Modifikovaná Reynoldsova rovnice

Při odvození této rovnice vyjdeme z výrazu (18), který již dále nebudeme zjednodušovat. Tedy:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial c_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} c_\varphi \right) = -\frac{1}{\eta r^3} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \quad (27)$$

Řešení této rovnice lze nalézt vzhledem k okrajovým podmínkám ve tvaru:

$$c_\varphi = \frac{a}{r} \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - a^2} c_{\varphi a} - \frac{1}{2\eta r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \left(\ln \frac{R_2}{r} - \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - a^2} \ln \frac{R_2}{a} \right) \quad (28)$$

Dosadíme-li nyní do rovnice kontinuity (16), lze po integraci psát:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ a c_{\varphi a} \left(\frac{R_2^2}{R_2^2 - a^2} \ln \frac{R_2}{a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \ln \frac{R_2}{a} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{a} - \frac{R_2^2}{R_2^2 - a^2} \ln \frac{R_2}{a} + \frac{1}{2} \right] \right\} = a c_{ra} - \frac{\partial a}{\partial \varphi} c_{\varphi a} \quad (29)$$

Pro hodnotu \mathbf{a} lze odvodit výraz:

$$a = R_1 \cos \varepsilon + e \cos(\varphi - \psi) \quad (30)$$

$$\sin \varepsilon = \frac{e}{R_1} \sin(\varphi - \psi) \quad (31)$$

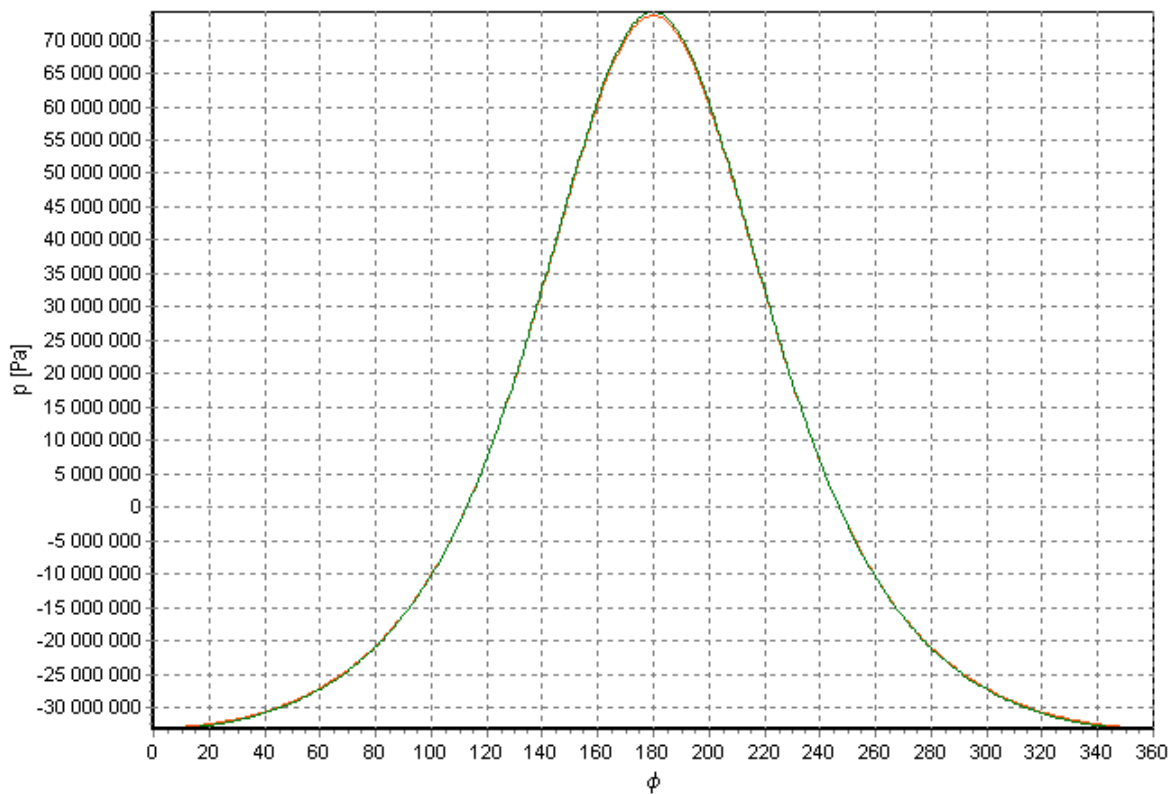
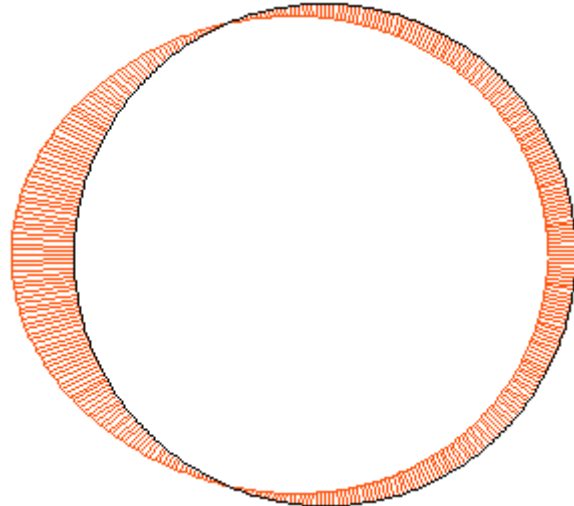
Pro srovnání obou rovnic (25), (29) byly vypočteny následující příklady a výsledky byly porovnány se stejnými úlohami modelovanými v softwaru FLUENT.

6. Řešené úlohy

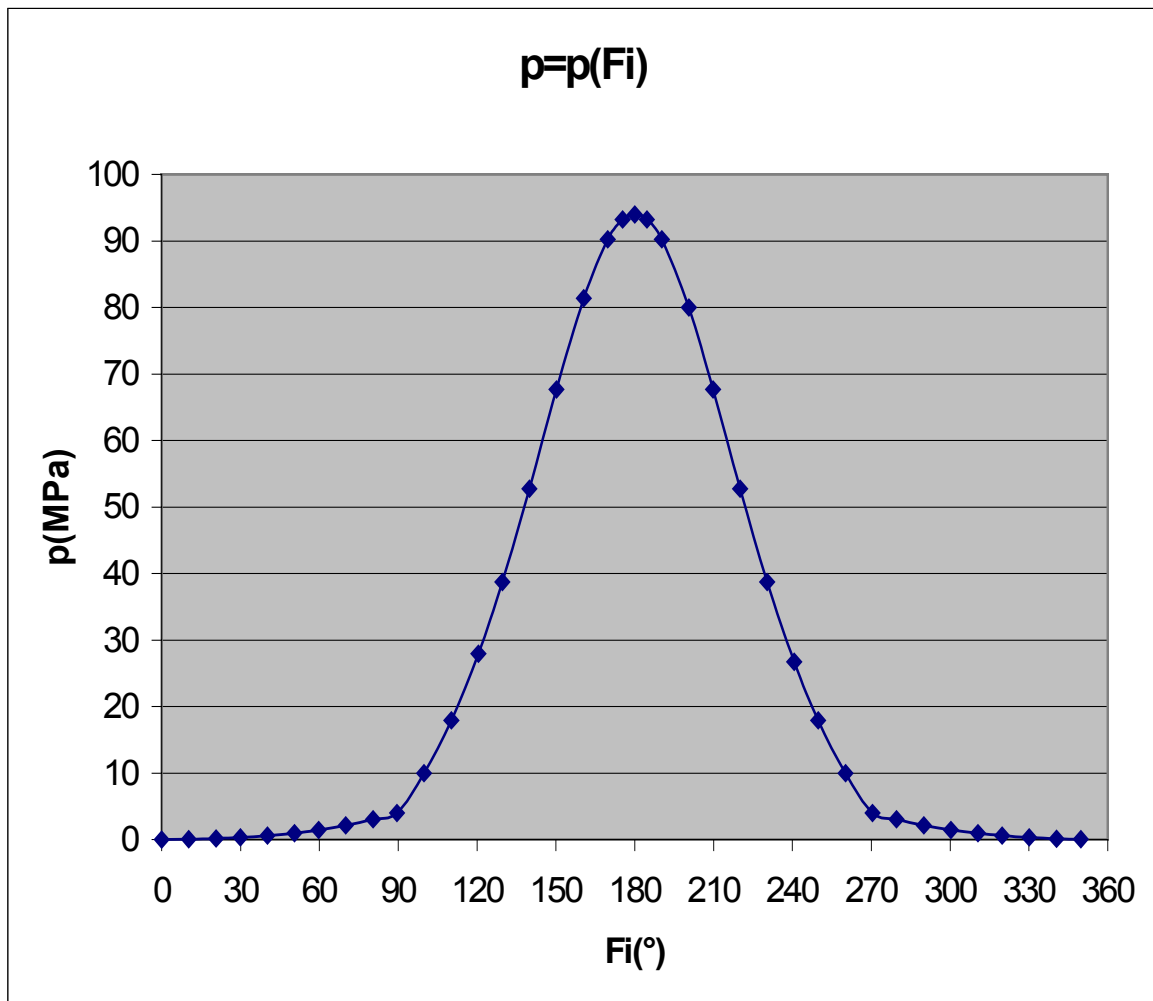
Na dalších stránkách jsou zobrazeny výpočty pro různé modifikace, je zde uvedena tabulka vstupních hodnot a sil působících na čep, dále je zde uveden obrázek působících tlakových sil a graf tlaku v závislosti na úhlu ϕ . Červenou barvou je zakreslen průběh tlaku dle klasického řešení a zelenou barvou dle přesnějšího modifikovaného řešení.

Příklad 1. – čep koná ve válcovém pouzdře radiální pohyb

R1	0.05	m
Rx	0.0502	m
Ry	0.0502	m
η	0.008	Pa.s
ρ	885	kg.m ⁻³
e	-0.0001	m
vx	-1	m/s
vy	0	m/s
ω	100	rad/s
Fx	7.31E+06	N
Fy	-2.43E+04	N



Obr.2 Příklad 1. Reynoldsova rovnice a modifikovaná Reynoldsova rovnice

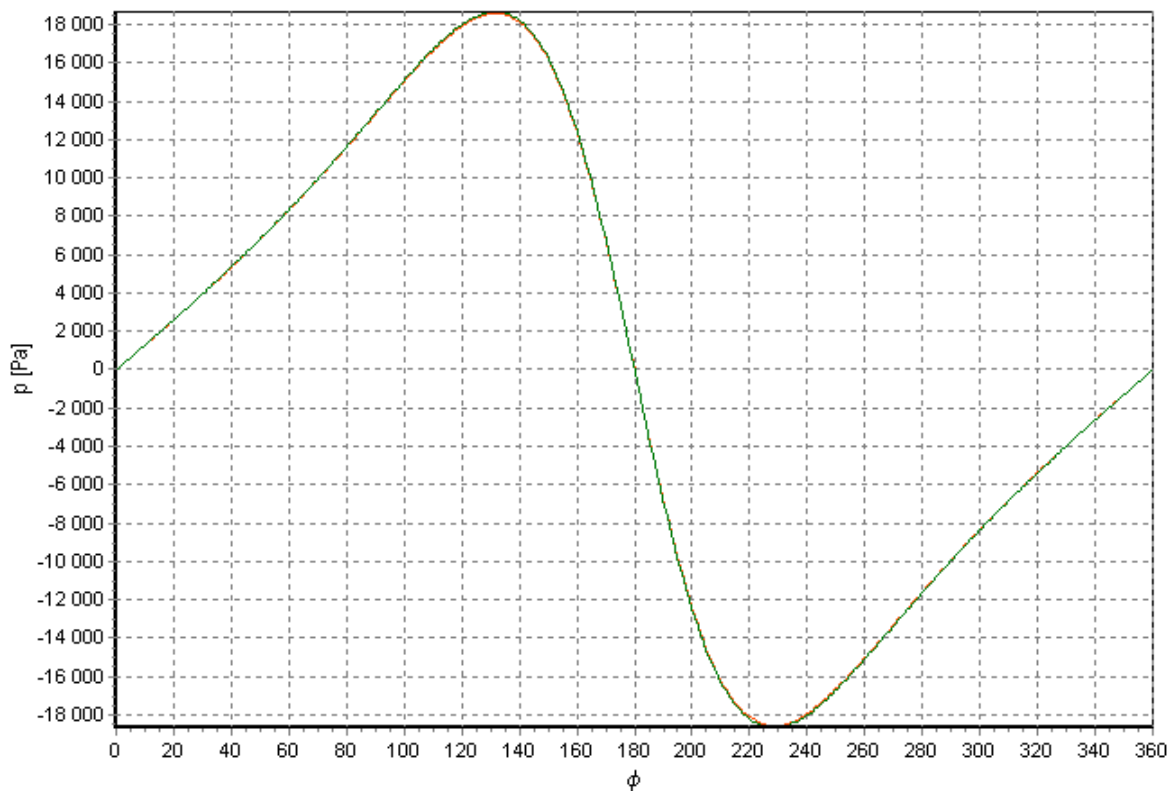
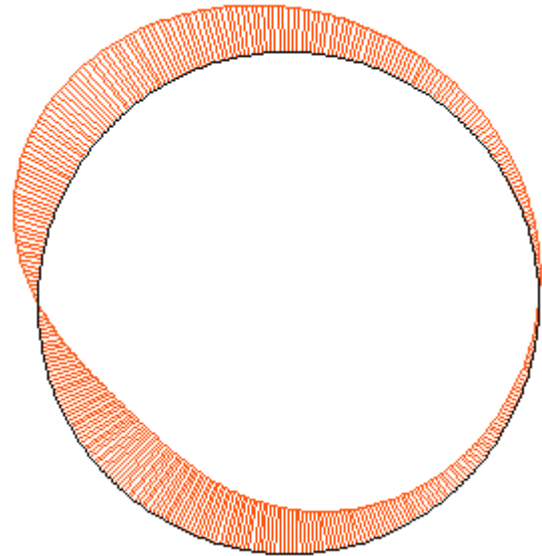


Obr.3 Příklad 1. FLUENT

Reynoldsova a modifikovaná Reynoldsova rovnice vykazují velmi vysokou míru shody, obě křivky se prakticky zcela překrývají. Výsledky získané modelováním v softwaru FLUENT se liší, minimum funkce je v nule, to nás však nesmí zmýlit, neboť při výpočtu nebyla stanovena žádná tlaková podmínka a proto je možno celou křivku o patřičnou konstantu po vertikální ose posouvat. Rovněž je patrné, že vzrůst tlaku je strmější, křivka se téměř přimyká k ose a poté je dobře patrný náhlý nárůst. Rozdílnost prezentovaných výsledků je dána odlišnou počáteční podmínkou při modelování v softwaru FLUENT, ta však byla vzhledem k proveditelnosti výpočtu nutná. Touto skutečností je možné vysvětlit i zmíněný značný nárůst tlaku v poloze 90° a 270° , v těchto místech dochází k náhlé změně směru proudění tekutiny, což odpovídá již zmíněné okrajové podmínce. Pro posouzení Reynoldsovy a modifikované Reynoldsovy je důležité kvalitativní hledisko, které je vyhovující.

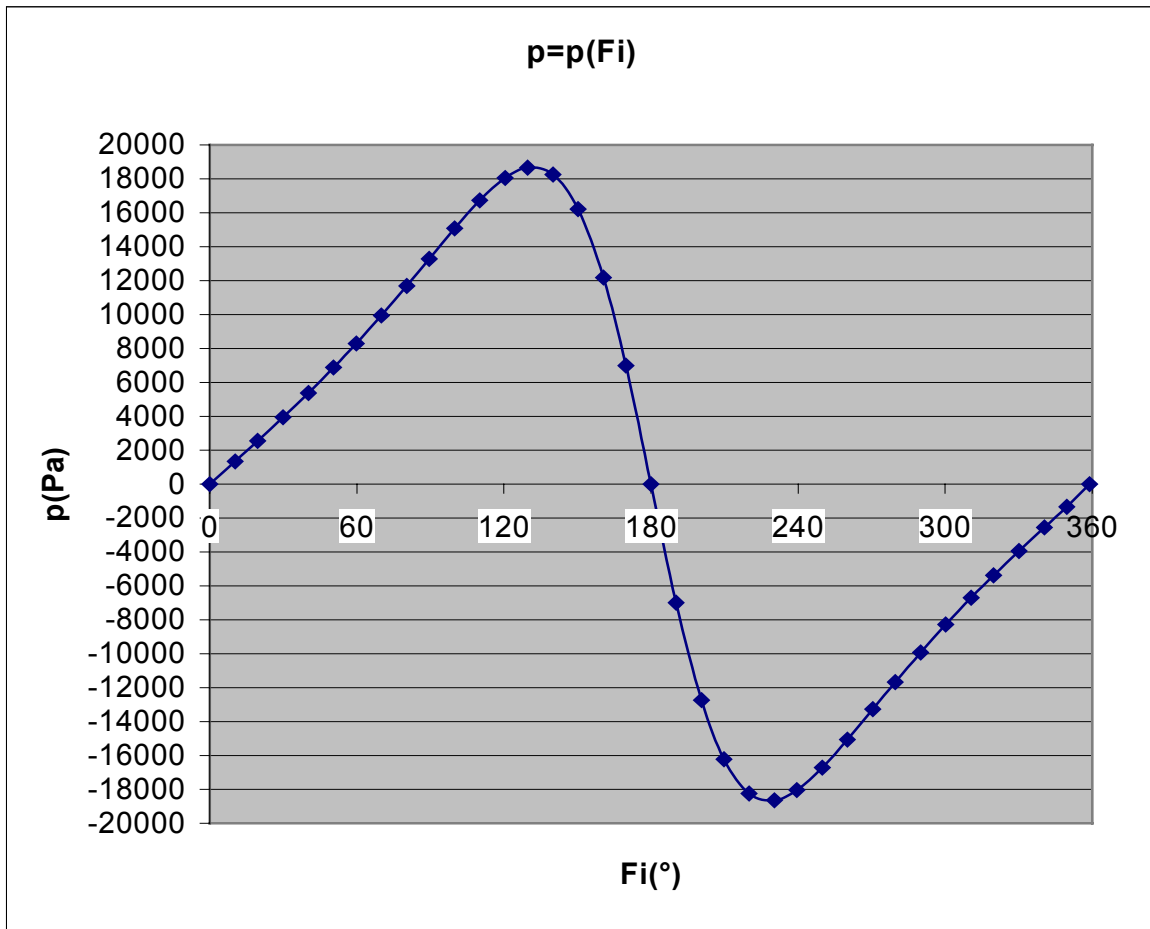
Příklad 2. – vyosený čep koná ve válcovém pouzdře rotační pohyb

R1	0.05	m
Rx	0.0502	m
Ry	0.0502	m
η	0.008	Pa.s
ρ	885	kg.m ⁻³
e	-0.0001	m
vx	0	m/s
vy	0	m/s
ω	10	rad/s
Fx	-2.53E-08	N
Fz	-2.43E+03	N



Obr.4 Příklad 2. Reynoldsova rovnice a modifikovaná Reynoldsova rovnice

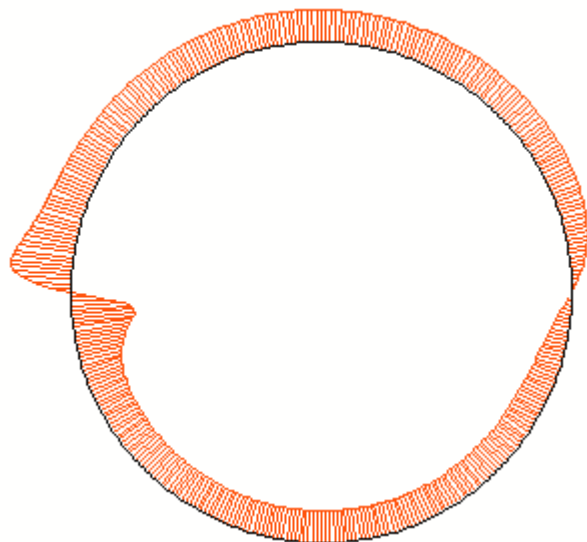
Z Obr.4 a Obr.5 (na následující stránce) plyne vysoká shoda výsledků použitých metod. Modelování v softwaru FLUENT bylo uskutečněno bez i se zanedbáním setrvačných sil. Výsledek je totožný a je zachycen na Obr.5.

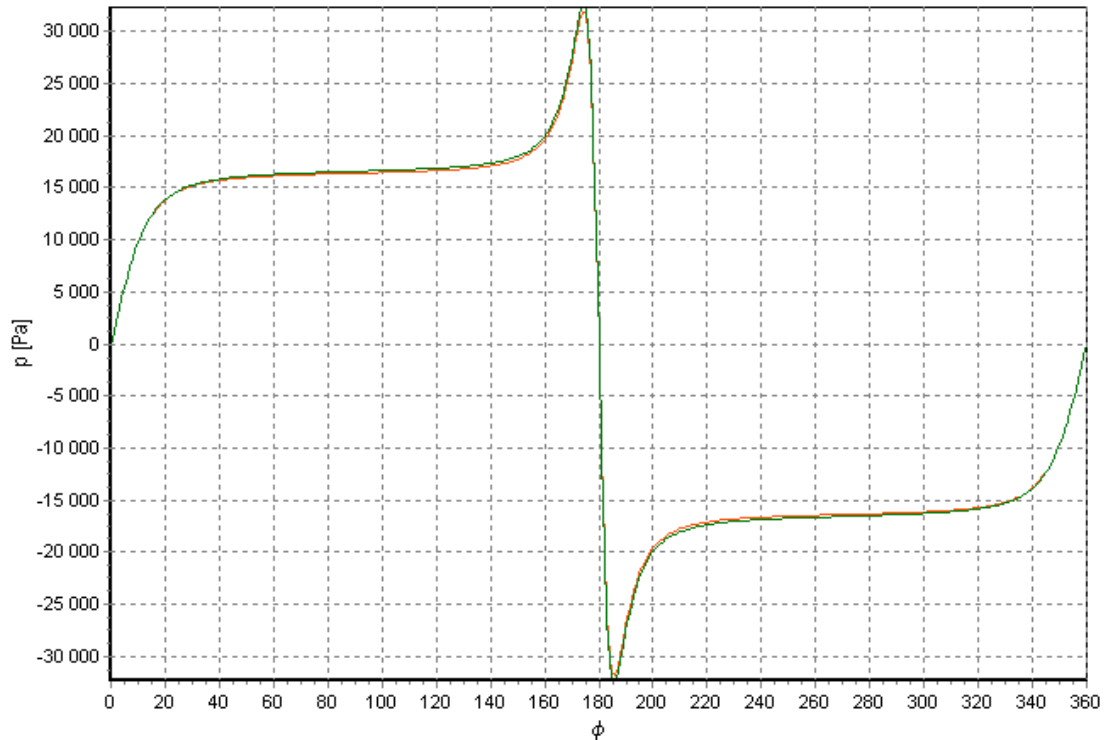


Obr.5 Příklad 2. FLUENT

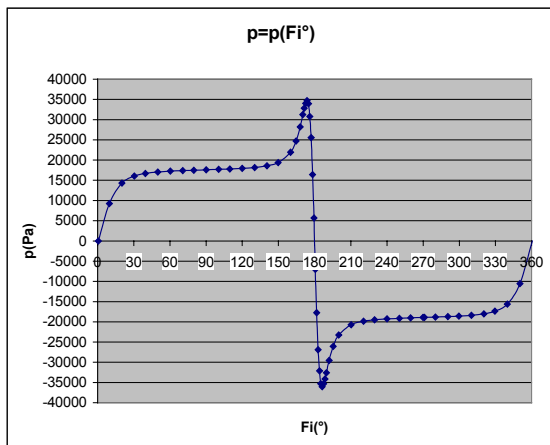
Příklad 3. – vyosený čep koná v pouzdře ve tvaru elipsy rotační pohyb

R1	0.05	m
Rx	0.0502	m
Ry	0.055	m
η	0.008	Pa.s
ρ	885	kg.m ⁻³
e	-0.0001	m
vx	0	m/s
vy	0	m/s
ω	100	rad/s
Fx	1.28E-10	N
Fz	-3.33E+03	N

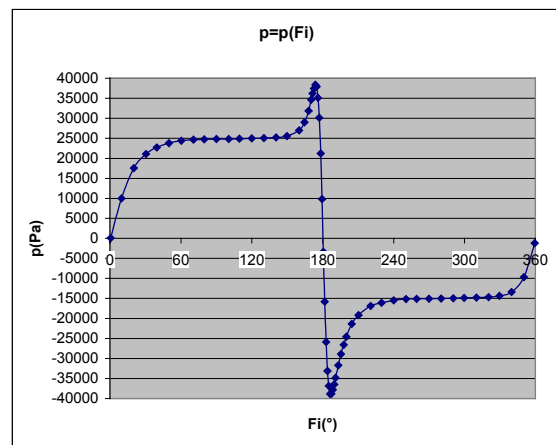




Obr.6 Příklad 3. Reynoldsova rovnice a modifikovaná Reynoldsova rovnice



Obr.7 Příklad 3. FLUENT



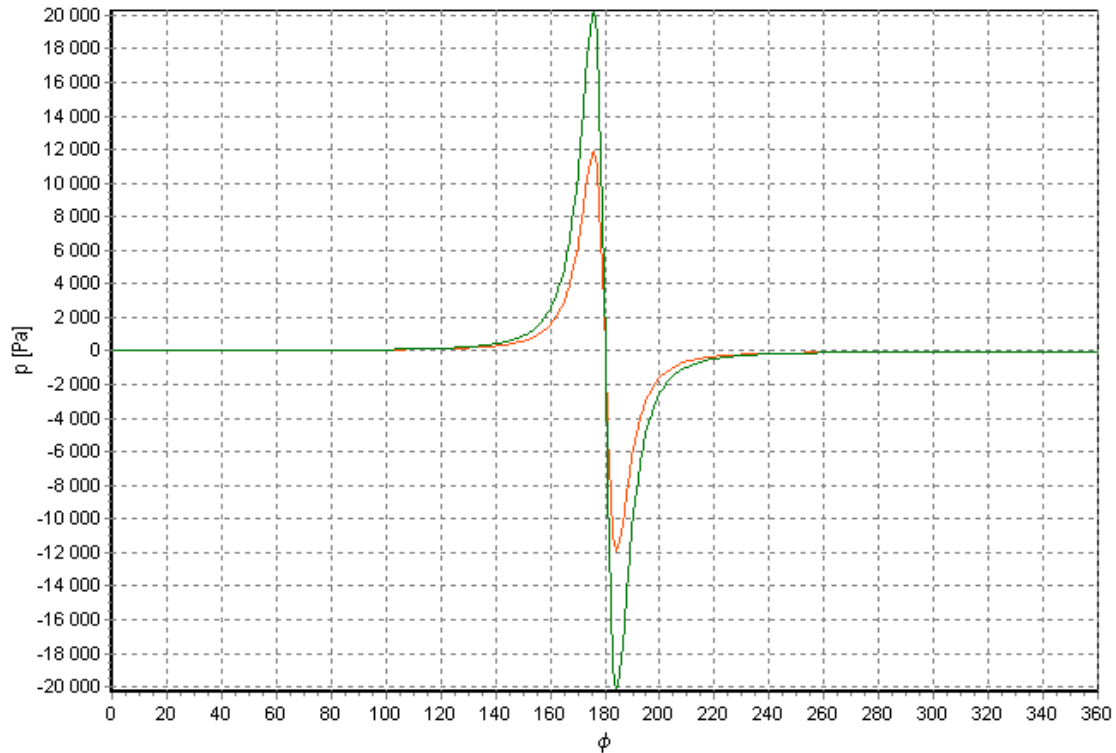
Obr.8 Příklad 3. FLUENT

Řešení plynoucí z Obr.6 a Obr.7 je srovnatelné, jisté odlišnosti jsou patrné ve výsledcích zachycených na Obr.8. Je tomu tak proto, že u prvního řešení ze softwaru FLUENT byl zanedbán vliv setrvačných sil kapaliny, tedy bylo uplatněno zjednodušení, které je možné pro tenké spáry. Poloosa elipsy je výrazně větší než průměr hřídele a proto dochází k mírným odchylkám znázorněným na Obr.8, kde je zaznamenán výsledek řešení bez omezení vlivu setrvačných sil. První poloosa elipsy je větší než poloměr hřídele, ale druhá poloosa se od poloměru hřídele liší v řádu desetin. Tedy ve dvou oblastech je zde splněna podmínka tenké

spáry. Jde vlastně o určitý mezistupeň před nadcházejícím příkladem 4. Zbývá snad je podotknout, že směr vyosení hřídele je totožný se směrem druhé (menší) poloosy.

Příklad 4. – vyosený čep koná ve válcovém pouzdře rotační pohyb-odchylky v řešení

elipsa: $R_1 = 0,05\text{m}$, $R_x = 0,06\text{m}$, $R_y = 0,06\text{m}$, $\omega = 100\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, excentricita $e = -0,0001\text{m}$



Obr.9 Příklad 4. Reynoldsova rovnice a modifikovaná Reynoldsova rovnice

V tomto případě je důležitým větší průměr pouzdra a tedy i větší spára mezi pouzdem a hřídelí. Odchylky obou rovnic, které se neprojevily dostatečně u elipsy, jsou zde dobře patrné. Tato úloha poukazuje na nutnost použití modifikované verze Reynoldsovy rovnice, v Obr.9 zakreslené zeleně, která je pro daný případ přesnější.

7. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory těchto výzkumných záměrů:

MSM 262 10001
CZ 300004