

OIL FILM FLOW STABILITY OF LONG LEMON AND OFFSET BEARINGS

V. Rak*, E. Malenovský*, F. Pochylý*

Summary: *This contribution is consider with computational modelling of oil film flow stability in long lemon, offset and lemon-offset uncavitated bearings. In this contribution is presented new theoretical approach to the modelling of dynamic behaviour of the rigid rotating shaft in real liquid. The approach is based on application of the Navier-Stokes eq., equation of continuity and boundary conditions. It is possible to separate the motion of rigid body and liquid from each other using suitable transformation relations and then it is possible to separate the stationary and nonstationary motions from each other. The real Bézier body is used for description of the geometrical configuration and also for approximation of velocity and pressure functions. Oil film flow stability is analyzed through an eigenvalue problem. Some results of numerical solution of the model task are presented.*

1. Úvod

Kluzná ložiska se v technické praxi velmi často používají. Mazacím médiem bývá zpravidla olej, může však být i jiné médium. Např. u čerpadel, kde je pracovním médiem voda. Při analýze dynamických vlastností rotorových soustav je velmi důležité znát dynamické vlastnosti vazeb hřídelové části na základní těleso, v případě kluzných ložisek tekutinového filmu. V těchto případech je nutno rozlišovat statickou a dynamickou analýzu.

V případě statické analýzy se předpokládá, že rotorová soustava je dokonale vyvážená a působí na ni pouze statické, časově neproměnné, vnější silové účinky. V důsledku rotace působí na hřídel silové účinky od mazací tekutiny. Ve staticky rovnovážné poloze hřídele nastane rovnováha mezi zatíženími působícími na hřídel. Při výpočtové modelování se ve většině případů uvažují pouze silové účinky od tekutiny, a momentové, tedy natočení hřídele

* Ing. Vladimír Rak: Ústav mechaniky těles, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Technická 2, 616 69 Brno; e-mail: rakvla@post.cz

** Doc. Ing. Eduard Malenovský, DrSc.: Ústav mechaniky těles, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Technická 2, 616 69 Brno, tel.: +420.54114 2855, fax +420.54114 2876; e-mail: malenov@umtn.fme.vutbr.cz

*** Prof. Ing. František Pochylý, DrSc.: Energetický ústav, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Technická 2, 616 69 Brno, tel.: +420.54114 2335, fax +420.54114 2329; e-mail: pochyly@khzs.fme.vutbr.cz

kolem os kolmých na osu hřídele, se zanedbávají. Staticky rovnovážná poloha je pak v rovině kolmé na osu hřídele dána dvěma souřadnicemi. Tekutinový film v kluzném ložisku v tomto případě má pouze statickou tuhost.

V technické praxi se zpravidla rozlišují dva typy ložisek, a to krátká a dlouhá. Jak je uvedeno v práci (Vance, 1988), pokud $L/D \leq 0,25$ považuje se ložisko za krátké a v opačném případě za dlouhé. Z hlediska fyzikálního pak v případě krátkého ložiska je gradient tlaku v axiálním směru podstatně větší než v tangenciálním (obvodovém) směru a u dlouhého ložiska je tomu obráceně. Tento příspěvek se zabývá výpočtovým modelováním dlouhého nekavitujícího ložiska.

V literatuře je analýza kluzných ložisek poměrně podrobně a často publikována. Teoretický základ téměř všech analýz vychází z Reynoldsovy pohybové rovnice. Pohyb tekutiny v obvodovém směru, v prostoru mezi vnitřním a vnějším kroužkem, je analyzován jako jednodimenzionální proudění po přímce s délkou rovnou obvodu vnitřního kroužku.

Přístup, který je uveden v tomto příspěvku, je na obecnější úrovni. Je založen na aplikaci Navier-Stokesovy rovnice, rovnice kontinuity a okrajových podmínek. V příspěvku je analyzován rovinný případ proudění, což odpovídá dlouhému olejovému ložisku. Tento přístup spočívá v možnosti separace pohybu tělesa a tekutiny. Vhodnou substitucí lze tedy od sebe separovat a následně i řešit pohyb tělesa a tekutiny zvlášť, přičemž k analýze pohybu tekutiny je použita metoda kontrolních objemů. K vytvoření geometrické konfigurace byla využita reálná Bézierova tělesa, tato tělesa byla využita také k aproximaci rychlostní a tlakové funkce. Stabilita proudění je analyzována pomocí reálné části komplexního vlastního čísla. V příspěvku jsou uvedeny některé vybrané výsledky analýz stabilitního chování olejového filmu citrónových, přesazených a citrónových s přesazením dlouhých kluzných ložisek včetně vybraných tvarů pohybu tekutiny a tvarů kmitu.

2. Seznam označení

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{K}, \mathbf{M}$ – matice; $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ – vektory pravých stran stanovené na základě okrajových podmínek; L – délka ložiska; n_i – i -tá část kovariantního normálového vektoru k ploše ΔS ; p, σ – tlak; D – průměr ložiska ($D = 2R$); ΔS – plocha kontrolního objemu; t, τ – čas; u' – bezrozměrná souřadnice; c, w – rychlost; c_{0i} – je i -tá složka vektoru stacionární rychlosti; z, v – souřadnice středu hřídele; ΔV – kontrolní objem; x_i, y_i, z_i – souřadnice; z_{0k} – staticky rovnovážná poloha středu hřídele; $\alpha_{0i}, \alpha_{0ij}, \mathbf{\alpha}_{01}, \mathbf{\alpha}_{02}, h$ – funkce rychlosti; $\beta_0, \beta_{0i}, \mathbf{\beta}_{01}, \mathbf{\beta}_{02}, s$ – funkce tlaku; ρ – hustota; η – dynamická viskozita; ε_{ijk} – Levi-Civitův tenzor; ε – relativní poloha středu hřídele; ω – úhlová rychlost rotace hřídele; λ_k – je k -té vlastní číslo pohybu tekutiny; δ – radiální vůle ložiska. Index 0 značí statickou analýzu.

3. Teoretická analýza

Pro předpoklad laminárního proudění má pohybová rovnice tekutiny tvar

$$\rho \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \rho \left[\text{rot } \vec{c} \times \vec{c} + \frac{1}{2} \text{grad } |\vec{c}|^2 \right] + \eta \text{rot rot } \vec{c} + \text{grad } p = \vec{0} \quad (1)$$

Rovnice kontinuity

$$\rho \text{div } \vec{c} = 0 \quad (2)$$

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned} S: \quad \vec{c} &= \vec{\omega} \times \vec{y} + \vec{z}^* \\ \Gamma: \quad \vec{c} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3)$$

V Einsteinově sumační symbolice se zahrnutím konvektivních členů má pohybová rovnice tekutiny, rovnice kontinuity a okrajové podmínky tvar

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (c_i c_j) - \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

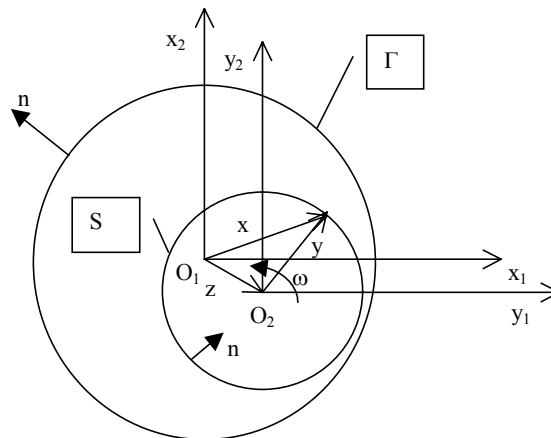
$$\begin{aligned} S: \quad c_i &= \varepsilon_{i3k} \omega y_k + z_i^* \\ \Gamma: \quad c_i &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Předpokládáme, že jak poloha středu hřídele, tak i rychlost a tlak jsou dány součtem stacionární a nestacionární části. Pak pro polohu, rychlost a tlak platí

$$\begin{aligned} z_j &= z_{0j}(x_i) + v_j(x_i, t) \\ c_j &= c_{0j}(x_i) + w_j(x_i, t) \\ p &= p_0(x_i) + \sigma(x_i, t) \end{aligned} \quad (7)$$

Porovnáním členů u stacionární části se obdrží soustava rovnic pro analýzu stacionárního pohybu tělesa a porovnáním členů u nestacionární části se obdrží soustava rovnic pro analýzu nestacionárního pohybu tělesa. Řešení je provedeno v kolmých složkách rychlosti a v křivočarých souřadnicích u^i pro $i = 1, 2$. Pak pro rychlosti platí $c_i = c_i(x_j, t)$, a $x_j = x_j(u^i)$.

Schematické znázornění souřadnicových systémů pro statickou polohu ze kterých vychází vlastní analýza je na obr.1. V pevném nerotujícím s.s. O_1 je statická poloha středu hřídele, který je zatížen statickou silou (např. tíhovou) dán polohou středu hřídele, který je určen počátkem O_2 . Kolem tohoto středu, jehož souřadnice jsou dány vektorem \vec{z} rotuje hřídel úhlovou rychlostí ω . Pro zadávání okrajových podmínek je důležité specifikovat rychlosti tělesa a tekutiny na okraji S . Pro reálnou tekutinu jsou zde rychlosti tekutiny a tělesa stejné.



Obr.1 Schéma rotujícího hřídele

Statická analýza

Pro analýzu pohybu tekutiny je zvolena metoda kontrolních objemů. Po integraci pohybové rovnice a rovnice kontinuity přes zvolený kontrolní objem, využitím věty Gauss-Ostrogradského, lze psát rovnici rovnováhy, kontinuity a okrajové podmínky v křivočarách souřadnicích ve tvaru

$$\rho \int_{\Delta S} \tilde{c}_{0i} \tilde{c}_{0r} \kappa_{mir} n_l dS - \eta \int_{\Delta S} \left(\frac{\partial \tilde{c}_{0r}}{\partial u^l} - \frac{\partial \tilde{c}_{0l}}{\partial u^r} \right) \gamma_{rm} n^l dS + \int_{\Delta S} p_0 \gamma_{rm} n_r dS = 0 \quad (8)$$

$$\int_{\Delta S} \rho \tilde{c}_{0i} n^l dS = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S: \quad \tilde{c}_{0i} \gamma_{im} &= \varepsilon_{m3k} (x_k - z_{0k}) \omega \\ \Gamma: \quad \tilde{c}_{0i} \gamma_{im} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Pokud bychom řešili systém rovnic (8) – (10) bez dalších úprav, museli bychom vzít v úvahu ještě pohybovou rovnici tělesa a problém řešit jako vázanou úlohu. Pro další postup je velmi výhodné eliminovat staticky rovnovážnou polohu středu hřídele z_{0k} z okrajových podmínek. Právě zavedení této substituce přináší nový pohled na celé řešení. Eliminace polohy středu hřídele z okrajových podmínek lze docílit na základě následujících předpokladů:

$$\tilde{c}_{0i} = \alpha_{0i} + \alpha_{ij} z_{0j} \quad ; \quad p_0 = \beta_0 + \beta_{0j} z_{0j} \quad (11)$$

Uvedenou substitucí se obecně v prostoru 3D zavádí místo tří složek rychlosti a tlaku tři složky rychlosti α_{0i} , jedna složka tlaku β_0 , devět složek α_{ij} a tři složky β_{0j} . Rychlostní funkce α_i na povrchu hřídele je závislá na souřadnicích x_i okraje hřídele, jehož souřadnice se zadávají v pevném s.s. a dále jsou funkcí úhlové rychlosti rotace hřídele. Souřadnice x_i jsou závislé na statické poloze středu hřídele z_{0k} . Rychlostní funkce α_{ij} na povrchu hřídele je závislá pouze na úhlové rychlosti rotace hřídele. Dosazením z (11) do (8) – (10) se obdrží dva systémy rovnic. Pro oba systémy je možné použít stejné kontrolní objemy, jejichž počet je nutno volit s ohledem na počet neznámých. Oba systémy v symbolickém vyjádření mají tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\alpha}_{01}^2 - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\alpha}_{01} + \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}_{01} &= \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_{01} &= -\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{A}_2 (\boldsymbol{\alpha}_{01}) \boldsymbol{\alpha}_{02} - \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}_{02} + \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}_{02} &= \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_{02} &= -\mathbf{f}_4 \end{aligned} \quad (12)$$

Z prvních dvou rovnic soustavy se vypočítají řešením nelineární soustavy rovnic funkční hodnoty β_0 a α_{0i} a z druhých dvou β_{0j} a α_{0ij} .

Transformace a řešení rovnic tekutiny

Eliminace rychlosti pohybu tělesa z rovnic lze docílit na základě následujících transformačních vztahů

$$\tilde{w}_i = \int_0^t h_{ik}(t-\tau) b_k^*(\tau) d\tau \quad ; \quad \sigma = \int_0^t s_j(t-\tau) b_j^*(\tau) d\tau \quad (13)$$

příčemž

$$h_{ik}(t=0) = 0 \quad ; \quad s_j(t=0) = 0 \quad (14)$$

Uvedenou substitucí se obecně v prostoru 3D zavádí místo tří složek rychlosti a tlaku, devět složek h_{ij} a tři složky s_i . To ale umožní s využitím Diracovy distribuce vyloučit z okrajových podmínek rychlost pohybu tělesa b_j^* . Po dosazení se obdrží pohybová rovnice tekutiny ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} h_{rj} \gamma_{mr} dV + \rho \int_{\Delta S} [(\alpha_{0i} + \alpha_{0ik} z_{0k}) h_{rj} + (\alpha_{0r} + \alpha_{0rk} z_{0k}) h_{ij}] \kappa_{mir} n_l dS - \\ - \eta \int_{\Delta S} \left(\frac{\partial h_{rj}}{\partial u^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^r} \right) \gamma_{rm} n^l dS + \int_{\Delta S} s_j \gamma_{rm} n_r dS = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

rovnice kontinuity

$$\int_{\Delta S} \rho n^l h_{ij} dS = 0 \quad (16)$$

a okrajové podmínky

$$\begin{aligned} S: \quad h_{ij} \gamma_{im} = \delta_{mj} \delta(t) \\ \Gamma: \quad h_{ij} \gamma_{im} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Do pohybové rovnice jsou zahrnuty rychlostní funkce a staticky rovnovážná poloha z předchozího kroku řešení. Vyřešením systému rovnic pro potřebný počet kontrolních objemů lze po dosazení do (13) získat složky rychlosti a tlaku jako funkce rychlosti translačního pohybu tělesa.

Jedna z možností řešení soustavy rovnic (13) – (17) je taková, že se neznámé hodnoty funkcí h_{ij} na obou okrajích z rovnic (17) explicitně vypočítají a dosadí do rovnic (15) a (16). Tento přístup byl vybrán pro testování celé řady algoritmů jako nejvhodnější. Okrajové podmínky jsou definovány pouze pro rychlostní funkci, kterou předpokládáme ve tvaru

$$h = h_X + h_{S\Gamma} \quad (18)$$

Pak mají rovnice tvar

$$\begin{aligned} Ah_X^* + B_1 h_X + B_2 (\alpha_{01}, \alpha_{02}) h_X + Cs = -g_1 \delta^* - g_2 \delta \\ Dh_X = -g_3 \delta \end{aligned} \quad (19)$$

kde pro vektory na pravých stranách platí

$$g_1 = Ah_{S\Gamma} \quad , \quad g_2 = B_2 h_{S\Gamma} \quad , \quad g_3 = Dh_{S\Gamma} \quad (20)$$

Stabilita proudění olejového filmu

Rovnice (19) převedeme do tvaru pro libovolný bod v olejovém filmu a dosadíme do nich příslušné okrajové podmínky. Potom pro staticky rovnovážnou polohu středu hřídele z_{0k} a pro rychlostní funkce α_{01} ; α_{02} napíšeme rovnice v následujícím homogenním tvaru

$$\begin{aligned} Ah\dot{h} + B_1(z_{0k}, \alpha_{01}, \alpha_{02})h + Cs &= 0 \\ Dh &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

rovnice je vhodné převést na maticový zápis

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ s \end{bmatrix} \dot{} + \begin{bmatrix} B_1 & C \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

matice (22) má ve zkrácené formě tvar

$$Mq\dot{h} + Kq = 0 \quad (23)$$

Řešení předpokládáme ve tvaru

$$q = q_0 e^{\lambda t} \quad (24)$$

kde λ – je vlastní číslo pohybu tekutiny

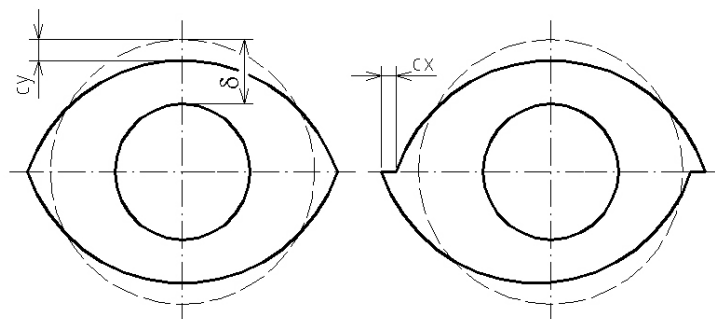
Protože matice hmotnosti M je singulární, rovnici (23) upravuji do tvaru

$$\left(\frac{1}{\lambda} K^+ M \right) q_0 = 0 \quad (25)$$

Pro řešení vlastních čísel matic $K^+ M$ z rovnice (25) používáme známé standardní procedury, kde horní index $+$ značí pseudoinverzi matice. Počítáme převrácené hodnoty vlastních čísel $\frac{1}{\lambda}$. Vlastní vektory počítáme klasickými postupy.

4. Modelová úloha

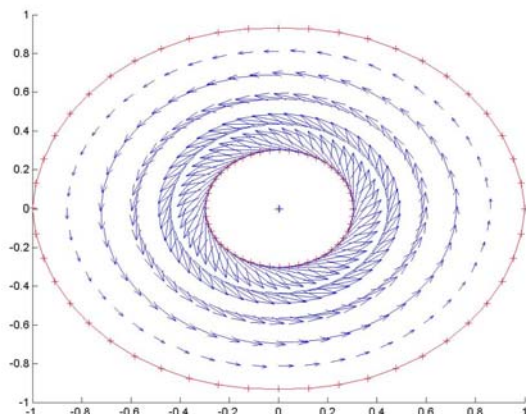
V tomto příspěvku budou prezentovány pouze některé výsledky, které mají zejména ilustrační charakter. Geometrické rozměry ložisek jsou $L = 0,1$ m, $R = 0,0505$ m, radiální vůle $\delta = 0,5$ mm. Řešení bylo provedeno pro několik otáčkových kroků v rozmezí $\omega = 1 - 1200$ rad.s⁻¹. Fyzikální veličiny nestlačitelné tekutiny jsou $\rho = 885$ kg.m⁻³, $\eta = 0,008$ Pa.s.



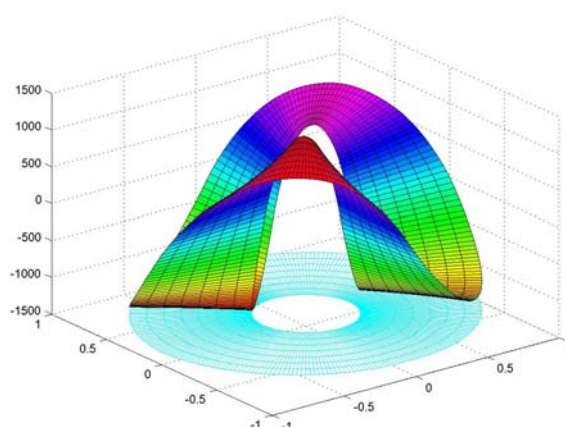
Obr. 2 Citrónovitost a přesazení kluzného ložiska

$$\text{Citrónovitost: } ccy = \frac{cy}{\delta} \quad ; \quad \text{Přesazení: } ccx = \frac{cx}{\delta} \quad (26)$$

Na obr. 3 je nakresleno statické rychlostní a na obr. 4 statické tlakové pole citrónového ložiska s citrónovitostí $ccy = 0,1$ (10%), pro úhlovou rychlost hřídele $\omega = 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.



Obr. 3 Rychlostní pole



Obr. 4 Tlakové pole

Na povrchu hřídele je tečná rychlost o velikosti $U = \omega r$, kde ω je úhlová rychlost hřídele a r je poloměr hřídele. Na vnějším kroužku ložiska je povrchová rychlost tekutiny nulová – viz. obr.3. Z obrázku 4 jsou dobře patrná dvě tlaková maxima předpokládaná Z. Racicem (2001), což je způsobeno dynamickou tuhostí olejového filmu.

V tomto příspěvku jsme analyzovali stabilitu proudění olejového filmu podle velikosti prvních vlastních čísel λ , která jsme počítali z rovnice (25). Reálné části vlastních čísel musí být záporné, jinak je chování nestabilní. Čím vyšší (v absolutní hodnotě) je záporná hodnota reálné části vlastního čísla λ , tím vyšší je stabilita proudění. Pokud je imaginární část vlastního čísla nulová, olej nekmitá, pouze se pohybuje. Při komplexně sdružených imaginárních částech vlastních čísel hovoříme o příslušných tvarech kmitu olejového filmu. Na obr. 5 – 10 jsou vykresleny jednotlivé tvary pohybu a tvary kmitu tekutiny, odpovídající jednotlivým vlastním číslům λ . Opět se jedná o výsledky analýzy citrónového ložiska s citrónovitostí $ccy = 0,1$ s úhlovou rychlostí hřídele $\omega = 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

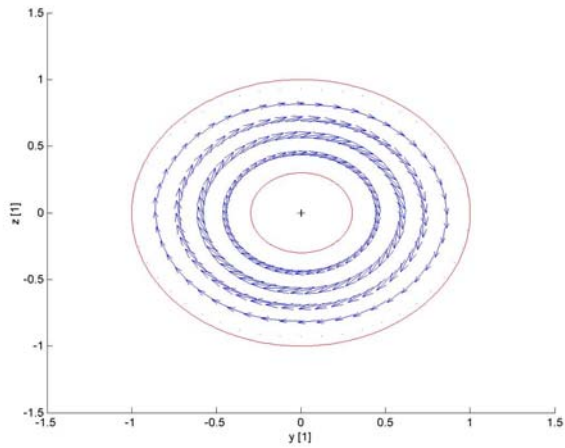
5. Závěr

Příspěvek je zaměřen na analýzu stability proudění dlouhých nekavitujících kluzných ložisek s různou geometrickou konfigurací. Celkově lze na základě teoretické analýzy i výsledků výpočtového modelování učinit následující závěry:

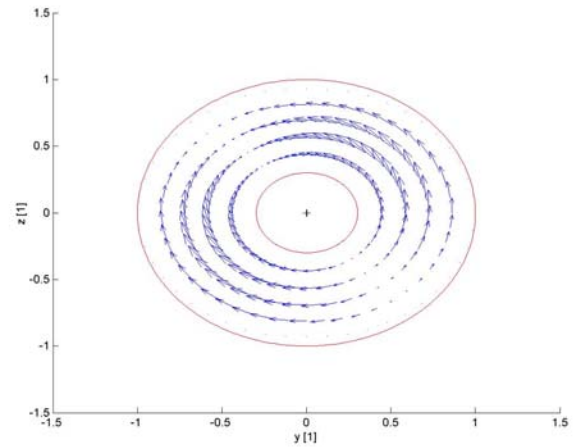
- Vhodnou transformací lze vzájemně od sebe separovat pohyb tělesa a tekutiny.
- Prezentovaný přístup lze využít k analýze problémů stability proudění a tudíž i k analýze stability rotorových soustav.

Nové typy kluzných ložisek (např. ložiska citrónová, eliptická, přesazená, 3-laloková, aj.) mají oproti klasickým válcovým kluzným ložiskům nepravidelnou geometrii a tedy nepravidelně rozložený olejový film a díky tomu vykazují lepší stabilitu chování olejového filmu.

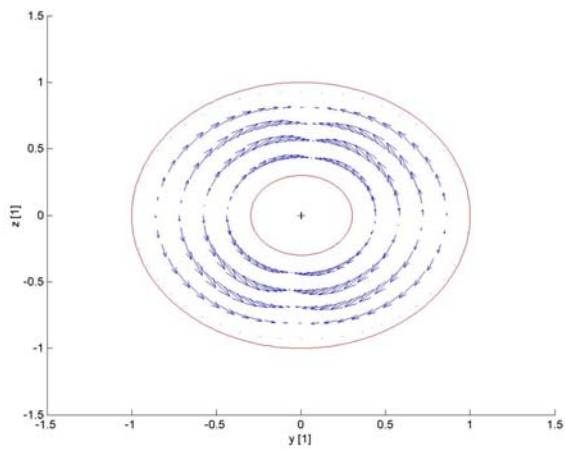
Z našich analýz vyplývá, že se vzrůstající citrónovitostí (i přesazením) roste stabilita chování olejového filmu (zvětšují se – v absolutní hodnotě – reálné části vlastních čísel λ).



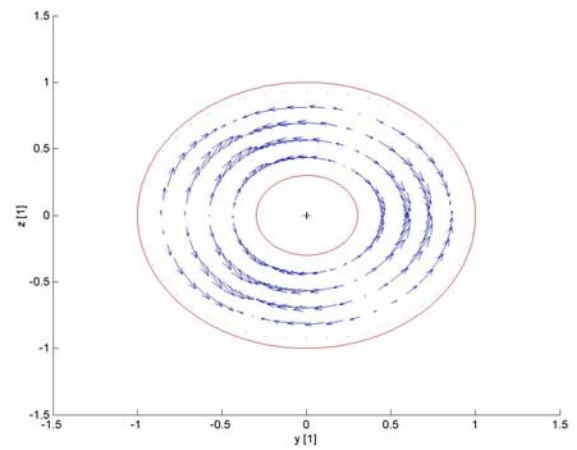
Obr. 5 – 1. tvar pohybu tekutiny



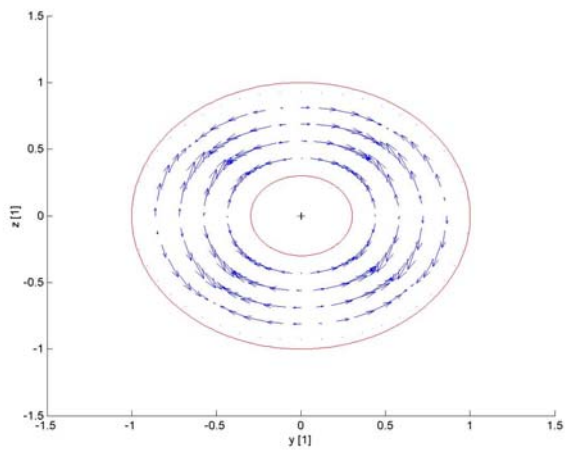
Obr. 6 – 2. tvar kmitu



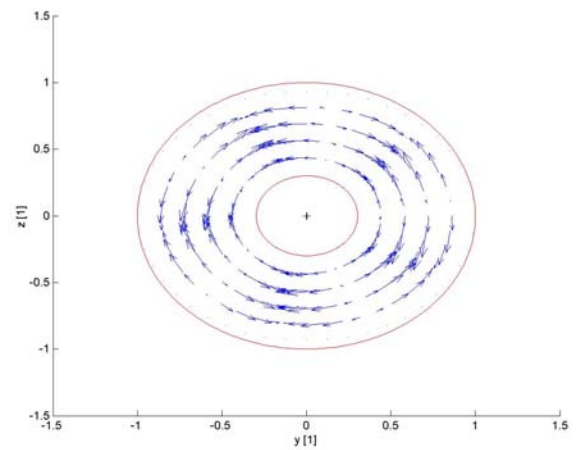
Obr. 7 – 3. tvar kmitu



Obr. 8 – 4. tvar kmitu

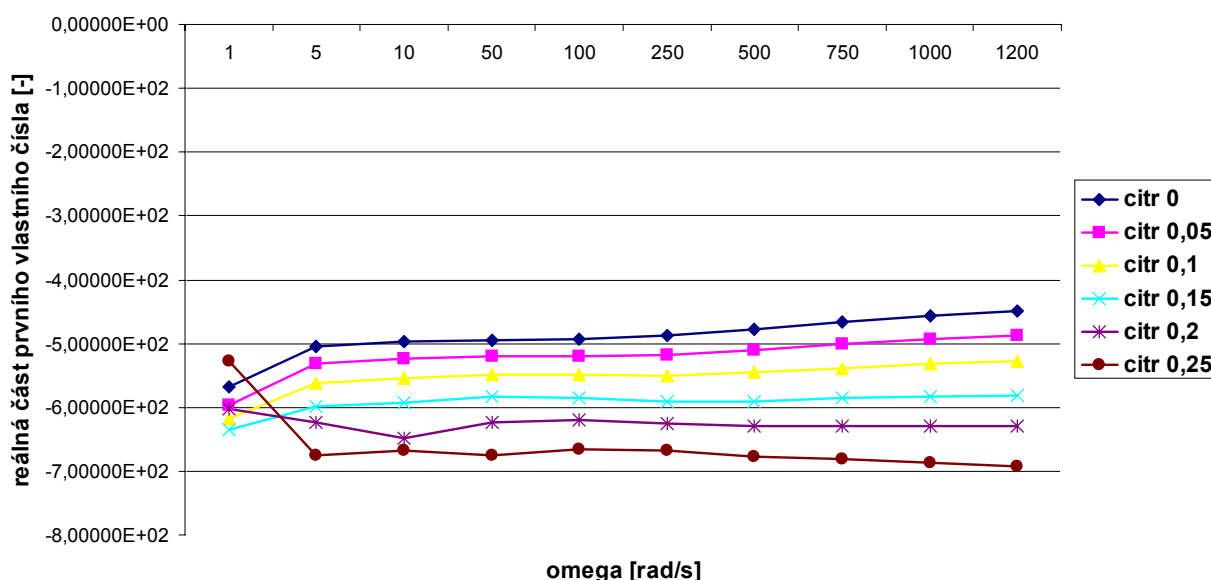


Obr. 9 – 5. tvar kmitu



Obr. 10 – 6. tvar kmitu

**Graf 1. - Stabilita proudění olejového filmu
- vliv citrónovitosti při přesazení $ccx = 0,05$ (5%)**



6. Poděkování

Práce uveřejněné v tomto příspěvku byly vytvořeny na základě finanční podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy výzkumným záměrem CEZ: MSM 2600001.

7. Literatura

- El-Shafei, A. (1991) Unbalance Response of a Jeffcott Rotor Incorporating Long Squeeze Film Dampers, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, January 1991, Vol. 113, pp 85 – 94.
- Krämer, E. (1993) Dynamics of Rotors and Foundations, Springer-Verlag Berlin.
- Malenovský, E., Pochylý, F.(2000) Some Results of Computational Modelling of Dynamic Behaviour of Journal Bearings using the Bézier Body, *VIII. International Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics*, Technical University of Žilina, Liptovský Ján, Slovakia Republic, pp. 1 – 20.
- Malenovský, E., Pochylý, F.(2001) Computational Modelling of Dynamic Behaviour and Stability of Journal Bearings using the Bézier Body, *1st International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery*, South Lake Tahoe, California, USA.
- Malenovský, E., Pochylý, F. (2001) Computational Modelling of Dynamic Properties of Long Journal Bearings by using the Bézier Body, *Schwingungen in rotierenden Maschinen V*, Referate der Tagung in Wien, Österreich, pp. 13 – 20.
- Malenovský, E., Pochylý, F. (2001) Some Results of Computational Modelling of Dynamic Behaviours of Journal Bearings by the Bézier Body Application, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 52, No. 4, pp. 235 – 258.
- Malenovský E., Pochylý, F. (2002) Rychlostní a tlakové pole při statické analýze kluzných ložisek, *18. konference s mezinárodní účastí Výpočtová mechanika 2002*, Nečtiny.

- Muszynska, A. (1987) Improvements in Lightly Loaded Rotor/Bearing and Rotor/Seal Models, *Rotating Machinery Dynamics, Volume One*, Proceedings of *The 1987 ASME Conference on Mechanical Vibrations and Noise*, Boston, Massachusetts, USA, pp. 91 – 98.
- Muszynska, A. (1986) Whirl and Whip – Rotor/Bearing Stability Problems, *Journal of Sound and Vibration*, 110 (3), London, U.K., pp. 443 – 462.
- Racic, Z. (2001) The Effect of Bearing Clearances On Its Dynamic Stiffness, *1st International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery*, South Lake Tahoe, California, USA.
- Vance, J. M. (1990) *Rotordynamics of Turbomachinery*, Wiley, New York, Toronto.