

STUDY OF INTERACTION OF PERIODICAL ARRAY OF COLINEAR CRACKS WITH PERIODICAL ARRAY OF CIRCULAR INCLUSIONS IN PARTICLE COMPOSITES

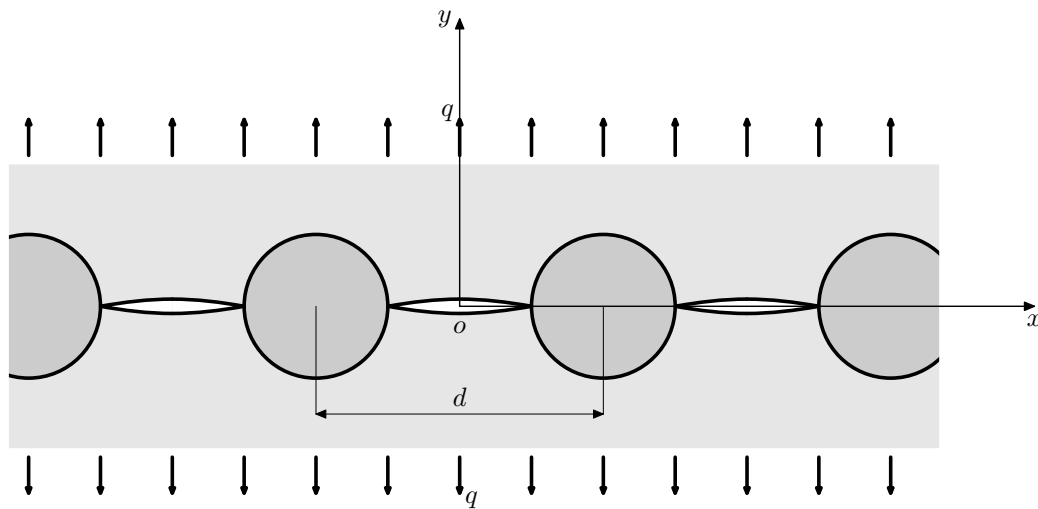
T. Profant*, M. Kotoul*

Summary: *Crack problem for an array of colinear cracks in composite matrix, where the cracks tips may terminate at the interfaces of inclusions with the different elastic properties than the matrix, is investigated. In the first part an approximative fundamental solution for a single dislocation lying in a general point between two inclusions is developed. Here, the technique of Muschelischvili complex potentials, which are approximated by suitable base functions, is employed. The Galerkin method for a numerical evaluation of the coefficients of base functions is used. In the second part the solution for a single dislocation between two inclusions is employed in the problem of the array of collinear cracks separated by the array of inclusions. The distribution of continuously distributed dislocations is used for each crack modelling. The Bueckner principle and the periodicity allow investigating the solution of a singular integral equation, in which the problem is converted. The integral equation is solved using the numerical principles founded on the properties of the orthogonal polynomials.*

1. Úvod

V lomové mechanice kompozitních materiálů, hraje významnou roli modelování interakce trhliny s částicemi sekundární fáze, které mají odlišné elastické, tepelné aj. vlastnosti než materiál inkluze. Ukazuje se, že lomové vlastnosti kompozitních materiálů závisejí na souhře mnoha faktorů, mezi které patří již zmíněné interakce trhlin s nehomogenitami, vlastnosti materiálových rozhraní, zbytková napětí, intristické lomové vlastnosti jednotlivých složek a charakter zatěžování. Pro díly zhotovené z kompozitů s křehkou maticí je často typická vysoká koncentrace mikrotrhlin, které vznikají při zatěžování nebo již při vlastní výrobě. V případě šíření hlavní trhliny se často vyskytuje stav, kdy se trhlina rozšíří pouze v křehké matici a její lince přemostují neporušené částice (vlákna) druhé fáze. Pokud nedochází k dekohezi rozhraní matrice/částice nebo k porušení vláken mimo rovinu hlavní trhliny a k jejich následnému vytahování z matrice, nabízí se modelovat takto

* Ing. Tomáš Profant, Doc. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.: Ústav mechaniky těles, FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno



Obrázek 1: Model přemostění magistrální trhliny řadou inkluzí

přemostěnou hlavní trhlínu pomocí řady kolineárních mikrotrhlin oddělených sekundárními částicemi, viz obrázek 1. Z lomové mechanického hlediska jde o značně komplikovaný problém interakce samotných inkluzí, interakce mikrotrhlin s inkluzemi a interakce mikrotrhlin navzájem, přičemž se současně mění charakteristiky popisující lokální rozložení napětí v okolí kořenů mikrotrhlin, které je typu $1/r^p$, kde r je vzdálenost od kořene trhliny a exponent $0 < p < 1$ závisí na materiálových vlastnostech matrice a inkluzí. Jako schůdná cesta pro analytické řešení se jeví technika spojitě rozdělených dislokací v kombinaci s Buecknerovým principem, viz např. monografii Hills & Kelly (1996).

Řešený problém se uvažuje jako rovinná úloha pružnosti. Postup výpočtu je rozdělen do několika fází. Nejdříve bude předveden postup pro nalezení napjatosti v zatížené desce obsahující dvě kruhové inkluze. Dundurs & Mura (1964) popsali řešení interakce dislokace s jednou inkluzí. S pomocí jejich výsledku bude odvozeno řešení pro interakci dislokace s dvěma inkluzemi. Toto řešení bude rozšířeno na problém nekonečné řady inkluzí s dislokacemi ležícími mezi inkluzemi. Na závěr bude sestavena pomocí Buecknerova principu singulární integrální rovnice pro neznámou hustotu Burgersova vektoru $B_y(x)$.

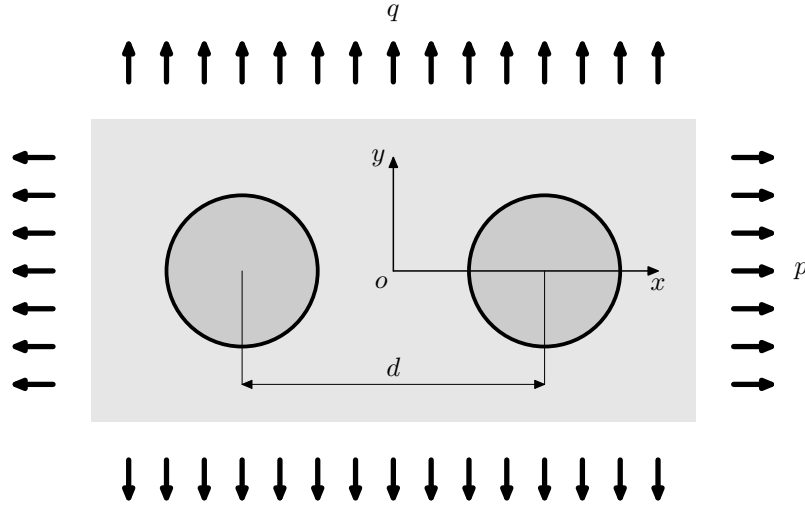
2. Dvě inkluze

Nechť rovina xOy představuje matici kompozitu, která obsahuje dvě kruhové inkluze jednotkového poloměru se středy v bodech $[\pm d/2, 0]$. Materiál inkluzí má obecně jiné charakteristiky než materiál matrice a inkluze jsou s maticí dokonale spojeny. Matrice je zatížena vnějším napětím $\sigma_{xx}^\infty = p$ a $\sigma_{yy}^\infty = q$, viz obr. 2.

Následující řešení je odvozeno podle Savina (1951), kde je řešen problém kolineárních otvorů v nekonečné rovině.

Parametry a proměnné týkající se matrice budou označovány indexem e a parametry týkající se inkluzí indexem i . Vzhledem k ideálnímu spojení matrice/inkluzi musí být na hranici každé inkluzi splněny následující okrajové podmínky

$$u_e + iv_e = u_i + iv_i, \quad \sigma_{e,n_x} + i\sigma_{e,n_y} = -(\sigma_{i,n_x} + i\sigma_{i,n_y}), \quad (1)$$



Obrázek 2: Matrice s dvěma inkluzemi

kde u a v jsou složky posunutí a pro napětí σ_{n_x} a σ_{n_y} platí vztahy

$$\sigma_{xx} \cos(n, x) + \sigma_{xy} \cos(n, y) = \sigma_{n_x}, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} \cos(n, x) + \sigma_{yy} \cos(n, y) = \sigma_{n_y},$$

kde $\cos(n, x)$ a $\cos(n, y)$ jsou cosiny úhlů, jež svírá vnější normála n hranice $\gamma^{(1)}$ pravé inkluze, resp. hranice $\gamma^{(2)}$ levé inkluze, s osou x a osou y . Pomocí vztahů uvedených (např. Muschelišvili 1966) lze přepsat okrajové podmínky (1) do tvaru

$$\begin{aligned} & \kappa_e \varphi_{1e}(\sigma) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi'_{1e}(\sigma)} - \overline{\psi_{1e}(\sigma)} - \\ & - \frac{\mu_e}{\mu_i} \left(\kappa_i \varphi_{1i}^{(k)}(\sigma) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1i}^{(k)'}(\sigma)} - \overline{\psi_{1i}^{(k)}(\sigma)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{1e}(\sigma) + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi'_{1e}(\sigma)} + \overline{\psi_{1e}(\sigma)} - \\ & - \varphi_{1i}^{(k)}(\sigma) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1i}^{(k)'}(\sigma)} - \overline{\psi_{1i}^{(k)}(\sigma)} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

kde $k = 1, 2$, $\sigma = \exp(it)$ je bod jednotkové kružnice a kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou Muschelišviliho komplexní potenciály komplexní proměnné $z = x + iy$. Na základě principu superpozice lze tyto potenciály hledat ve tvaru

$$\varphi_{1i}^{(1)}(z) = \varphi_{1i}^{D(1)}(z) + \varphi_{1i}^{(i,1)}(z) = \varphi_{1i}^{D(1)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{i,n}^{(1)}(z - d/2)^n, \quad (5)$$

$$\psi_{1i}^{(1)}(z) = \psi_{1i}^{D(1)}(z) + \psi_{1i}^{(i,1)}(z) = \psi_{1i}^{D(1)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{i,n}^{(1)}(z - d/2)^n \quad (6)$$

pro pravou inkluzi,

$$\varphi_{1i}^{(2)}(z) = \varphi_{1i}^{D(2)}(z) + \varphi_{1i}^{(i,2)}(z) = \varphi_{1i}^{D(2)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{i,n}^{(2)}(z + d/2)^n, \quad (7)$$

$$\psi_{1i}^{(2)}(z) = \psi_{1i}^{D(2)}(z) + \psi_{1i}^{(i,2)}(z) = \psi_{1i}^{D(2)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{i,n}^{(2)}(z + d/2)^n \quad (8)$$

pro levou inkluzi a

$$\begin{aligned} \varphi_{1e}(z) &= \varphi_{1e}^D(z) + \varphi_{1e}^{(ii)}(z) = \\ &= \varphi_{1e}^D(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{e,n}^{(1)}}{(z - d/2)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{e,n}^{(2)}}{(z + d/2)^n}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1e}(z) &= \psi_{1e}^D(z) + \psi_{1e}^{(ii)}(z) = \\ &= \psi_{1e}^D(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{e,n}^{(1)}}{(z - d/2)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{e,n}^{(2)}}{(z + d/2)^n} \end{aligned} \quad (10)$$

pro matici.

Potenciály $\varphi_{1i}^{D(k)}$ a $\psi_{1i}^{D(k)}$ pro $k = 1, 2$ jsou rovny nule a potenciály φ_{1e}^D a ψ_{1e}^D odpovídají zatížené matici bez inkluzí a mají tvar

$$\varphi_{1e}^D(z) = \frac{p+q}{4}z, \quad \psi_{1e}^D(z) = -\frac{p-3q}{4}z. \quad (11)$$

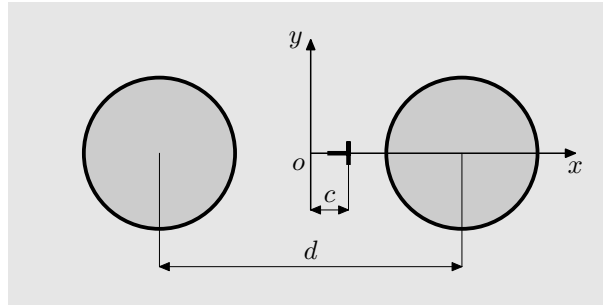
Koeficienty $\alpha_{e,n}^{(k)}$, $\alpha_{i,n}^{(k)}$, $\beta_{e,n}^{(k)}$ a $\beta_{i,n}^{(k)}$ v rovnicích (5)–(10) jsou neznámé a musí být určeny pomocí okrajových podmínek (1). K jejich určení je vhodná Bubnova-Galerkinova metoda, viz např. Michlin (1974). K nalezení neznámých koeficientů $\alpha_{e,n}^{(k)}$, $\alpha_{i,n}^{(k)}$, $\beta_{e,n}^{(k)}$ a $\beta_{i,n}^{(k)}$ se vychází z podmínky, že levá strana každé z rovnic (3) a (4) musí být ortogonální na všechny prvky báze vhodně zvoleného lineárního prostoru funkcí. V daném případě byl jako báze zvolen systém funkcí

$$(z \pm d/2)^k, \quad (12)$$

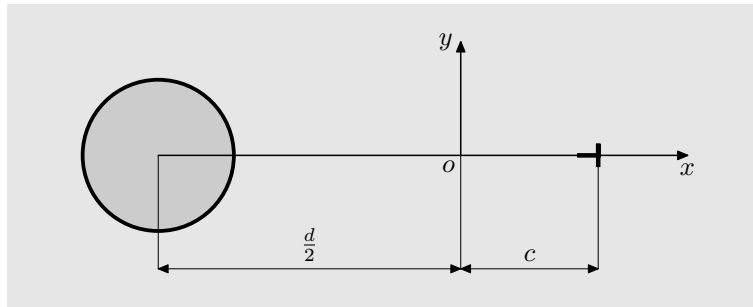
kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ a podmínky ortogonálnosti lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma^{(k)}} \left[\kappa_e \varphi_{1e}^{(ii)}(\sigma) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1e}^{(ii)'(\sigma)}} - \overline{\psi_{1e}^{(ii)}(\sigma)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_e}{\mu_i} \left(\kappa_i \varphi_{1i}^{(i,k)}(\sigma) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1i}^{(i,k)'(\sigma)}} - \overline{\psi_{1i}^{(i,k)}(\sigma)} \right) + const \right] \sigma^n d\sigma = \\ &= - \int_{\gamma^{(k)}} \left[\kappa_e \varphi_{1e}^D(\sigma) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1e}^{D'(\sigma)}} - \overline{\psi_{1e}^D(\sigma)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_e}{\mu_i} \left(\kappa_i \varphi_{1i}^{D(k)}(\sigma) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1i}^{D(k)'(\sigma)}} - \overline{\psi_{1i}^{D(k)}(\sigma)} \right) + const \right] \sigma^n d\sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma^{(k)}} \left[\varphi_{1e}^{(ii)}(\sigma) + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1e}^{(ii)'(\sigma)}} + \overline{\psi_{1e}^{(ii)}(\sigma)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\varphi_{1i}^{(i,k)}(\sigma) + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1i}^{(i,k)'(\sigma)}} + \overline{\psi_{1i}^{(i,k)}(\sigma)} \right) + const \right] \sigma^n d\sigma = \\ &= - \int_{\gamma^{(k)}} \left[\varphi_{1e}^D(\sigma) + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1e}^{D'(\sigma)}} + \overline{\psi_{1e}^D(\sigma)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\varphi_{1i}^{D(k)}(\sigma) + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi_{1i}^{D(k)'(\sigma)}} + \overline{\psi_{1i}^{D(k)}(\sigma)} \right) + const \right] \sigma^n d\sigma, \end{aligned} \quad (14)$$



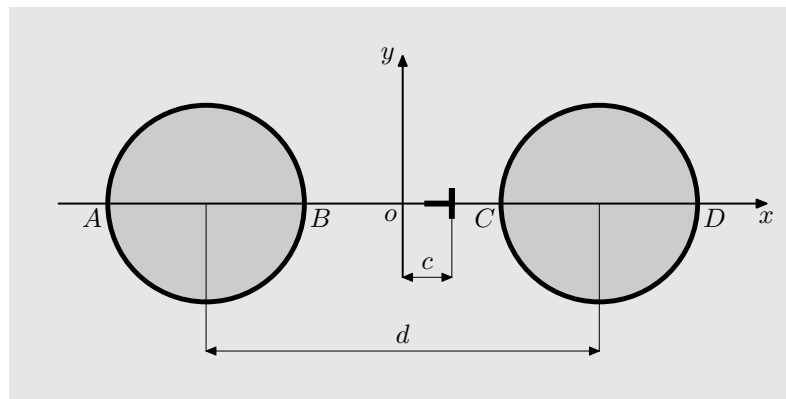
Obrázek 3: Matrice s dvěma inkluzemi a dislokací mezi nimi.

Obrázek 4: Matrice s inkluzí a dislokací s Burgersovým vektorem b_y .

kde $\gamma^{(k)}$ je hranice pravé resp. levé inkluze pro $k = 1$ resp. $k = 2$ a $n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Dosazením potenciálů (5)–(10) do (13) a (14) pro $\varphi_{1i}^{D(k)} = 0$ a $\psi_{1i}^{D(k)} = 0$ obdržíme po integraci soustavu lineárních rovnic, ve které koeficienty $\alpha_{e,n}^{(k)}$, $\alpha_{i,n}^{(k)}$, $\beta_{e,n}^{(k)}$ a $\beta_{i,n}^{(k)}$ vystupují jako neznámé. Tato soustava je velice obsáhlá a nebude zde uvedena, lze ji nalézt v práci Profant & Kotoul (2003).

3. Dvě inkluze a dislokace

Uvažujme nyní nulové zatížení matrice v nekonečnu a mezi inkluze vložme do bodu $[c, 0]$ dislokaci s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (0, b_y)$ (dále jen b_y), viz obrázek 3. Dundurs & Mura (1964) vyjádřili Airyho funkci napětí, která popisuje vztah mezi jednou inkluzí a dislokací. Transformací posunutím se střed inkluze přesune do bodu $[-d/2, 0]$ (viz obrázek 4) a podle Muschelišviliho (1966) se odvodí komplexní potenciály $\varphi_{1e}^D(z)$, $\psi_{1e}^D(z)$, $\varphi_{1i}^{D(2)}(z)$ a $\psi_{1i}^{D(2)}(z)$. Potenciály $\varphi_{1i}^{D(1)}(z)$ a $\psi_{1i}^{D(1)}(z)$ jsou podobně jako v předchozím případě nulové, protože vliv druhé inkluze je zachycen jen pomocí Muschelišviliho potenciálů $\varphi_{1e}^{(ii)}(z)$, $\psi_{1e}^{(ii)}(z)$, $\varphi_{1i}^{(i,1)}(z)$, $\psi_{1i}^{(i,1)}(z)$, $\varphi_{1i}^{(i,2)}(z)$ a $\psi_{1i}^{(i,2)}(z)$. Opakováním postupu použitého pro případ dvou inkluzí v zatížené matrici se získají soustavy rovnic formálně shodné se soustavami (13) a (14). Změní se pouze pravé strany rovnic. Protože komplexní potenciály $\varphi_{1e}^D(z)$, $\psi_{1e}^D(z)$ a $\varphi_{1i}^{D(2)}(z)$ a $\psi_{1i}^{D(2)}(z)$ již splňují okrajové podmínky (1) na hranici $\gamma^{(2)}$ levé inkluze, je výraz na pravé straně rovnic (13) a (14) pro $k = 2$ roven nule. Pro $k = 1$ je pravá strana rovnic (13) a (14) nenulová, a potenciály $\varphi_{1e}^D(z)$ a $\psi_{1e}^D(z)$ zde reprezentují vliv levé inkluze na inkluzi pravou. Jako příklad jsou v tabulce 1 uvedeny hodnoty napětí



Obrázek 5: Dvě inkluze s dislokací.

σ_{yy} v bodech A , B , C a D , viz obrázek 5, pro polohu dislokace v bodě

$$c_i = \left(\frac{d}{2} - 1 \right) c_{0,i} \quad \text{pro } i = 1, \quad (15)$$

kde

$$c_{0,i} = \cos \left(\frac{\pi 2i + 1}{2 N + 1} \right) \quad (16)$$

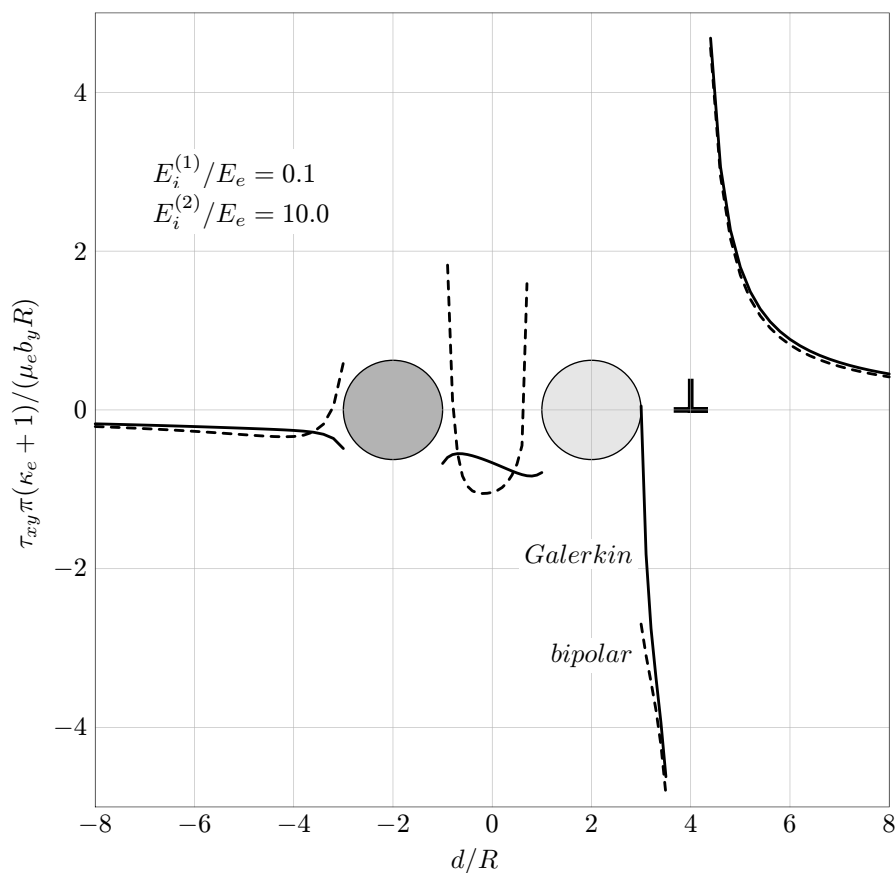
jsou kořeny Čebyševova polynomu stupně $N + 1 = 5$. Materiál inkluzí byl zvolen s poloviční tuhostí než materiál matrice. Z výpočtů vyplývá závislost rychlosti konvergence přibližného řešení popisovaného problému jak na vzájemné poloze inkluzí tak i na poloze dislokace. Dostatečně rychlá konvergence (přiblížení do desátého řádu) nastává při daných materiálových charakteristikách pro případ, kdy vzdálenost mezi inkluzemi je řádově shodná s průměrem inkluzí a pro dislokaci neležící v těsné blízkosti inkluzí. V opačném případě je třeba užít vyšších stupňů aproximace.

Zajímavé řešení stejného problému popsali Fukuzaki & Shioa (1986). Využili vlastností bipolárních souřadnic. V prvním kroku použili řešení Dundurse & Mury (1964), přidali druhou inkluzi a zobrazili obě kruhové hranice pomocí vhodného konformního zobrazení na přímky rovnoběžné s jednou osou souřadnic. V dalším kroku požadovali, aby na těchto přímkách byly splněny okrajové podmínky (1). Řešení hledali ve tvaru nekonečných řad. Jejich řešení je však příliš složité a nevhodné tudíž pro další modelování. Na obrázku 6 je graf srovnávající obě řešení pro případ dvou inkluzí stejného průměru, různých materiálových charakteristik a s dislokací napravo od obou inkluzí s Burgersovým vektorem b_x . Řešení Galerkinovou metodou odpovídá aproximaci $n = 10$, řešení pomocí bipolárních souřadnic odpovídá aproximacím $n = 10$ a $t = 9$.

4. Řada inkluzí a dislokací

Předchozí úlohu nyní rozšíříme na případ nekonečné řady dislokací, které leží mezi inkluzemi. Muschelišviliho komplexní potenciály pro pravou a levou inkluzi opět hledáme ve tvaru (5)–(8). Potenciály pro matici se na rozdíl od předchozího případu nepatrně změní a hledají se ve tvaru

$$\varphi_{1e}(z) = \varphi_{1e}^D(z) + \varphi_{1e}^{(ii)}(z) =$$



Obrázek 6: Srovnání výsledků Galerkinovy metody a metody bipolárních souřadnic.

Tabulka 1: Hodnoty napětí σ_{yy} ve vybraných bodech na ose x .

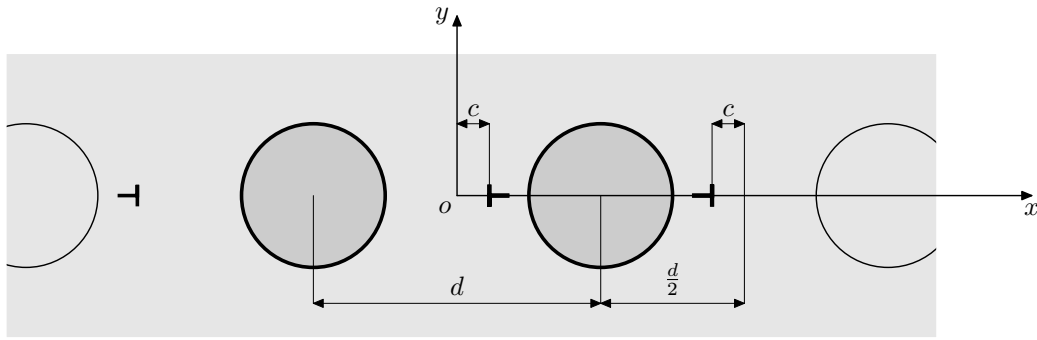
$$E_i/E_e = 1/2, \nu_i = \nu_e = 1/3, \kappa = 3 - 4\nu$$

$$2c/(d - 2R) = \cos(\pi(2i + 1)/2(N + 1)), N = 4, i = 1$$

$$\sigma_0 = \mu_e b_y R / \pi(\kappa_e + 1)$$

	$2c/(d - 2R)$	x/R^*	1. přiblížení				3. přiblížení			
			ϵ				ϵ			
			1/6	1/4	1/3	2/5	1/6	1/4	1/3	2/5
σ_{yy}/σ_0	0.5878	A	-0.4934	-0.7340	-0.9711	-1.1561	-0.4938	-0.7362	-0.9805	-1.1758
		B	-0.6786	-1.2514	-2.2454	-4.0515	-0.6762	-1.2432	-2.2212	-3.9097
		C	2.9524	5.7253	10.8732	20.6249	2.7589	5.7402	11.4140	21.7632
		D	1.0055	1.3309	1.6191	1.8197	0.9405	1.1602	1.4124	1.6519
	$2c/(d - 2R)$	x/R^*	5. přiblížení				7. přiblížení			
			ϵ				ϵ			
			1/6	1/4	1/3	2/5	1/6	1/4	1/3	2/5
σ_{yy}/σ_0	0.5878	A	-0.4939	-0.7364	-0.9809	-1.1794	-0.4939	-0.7365	-0.9813	-1.1802
		B	-0.6760	-1.2399	-2.2062	-3.8717	-0.6760	-1.2392	-2.1963	-3.8393
		C	2.5411	5.3997	11.3521	22.3259	2.4276	5.0537	11.0103	22.4914
		D	0.9675	1.1337	1.3106	1.5341	0.9896	1.1502	1.2680	1.4523

*viz obrázek 5.



Obrázek 7: Nekonečná řada inkluzí a dislokací.

$$= \varphi_{1e}^D(z) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{e,n}^{(1)}}{(z - d/2 + 2md)^n} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{e,n}^{(2)}}{(z + d/2 + 2md)^n}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1e}(z) &= \psi_{1e}^D(z) + \psi_{1e}^{(ii)}(z) = \\ &= \psi_{1e}^D(z) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{e,n}^{(1)}}{(z - d/2 + 2md)^n} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{e,n}^{(2)}}{(z + d/2 + 2md)^n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Nekonečná řada inkluzí a dislokací se modeluje následujícím způsobem. Inkluze z řešení Dundurse & Mury (1964) se přesune do bodu $[-d/2, 0]$ a dislokace se přesune do bodu $[c, 0]$. V dalším kroku se přidá druhá inkluze, tentokrát se její střed umístí do bodu $[d/2, 0]$ a s ní svázaná dislokace se umístí do bodu $[d - c, 0]$, avšak s Burgersovým vektorem $-b_y$. Tento základní motiv dvou inkluzí a dvou dislokací se nyní rozvine s periodou $2d$ po celé délce osy x , viz obrázek 7. Muschelišviliho potenciály $\varphi_{1e}^D(z)$, $\psi_{1e}^D(z)$, $\varphi_{1i}^{D(1)}(z)$, $\psi_{1i}^{D(1)}(z)$, $\varphi_{1i}^{D(2)}(z)$ a $\psi_{1i}^{D(2)}(z)$ budou nyní reprezentovat nekonečnou řadu inkluzí a s nimi svázaných dislokací. Vzhledem k periodicitě úlohy stačí, aby okrajová podmínka (1) byla splněna jen na inkluzích se středy v bodech $[\pm d/2, 0]$, na ostatních inkluzích bude splněna již automaticky. Dosazením (5)–(8) a (17) a (18) do vztahů (13) a (14) se získá soustava lineárních rovnic, jejímž řešením jsou neznámé koeficienty $\alpha_{e,n}^{(1)}$ – $\beta_{i,n}^{(2)}$ ze vztahů (5)–(8) a (17) a (18). Předchozí případ dvou inkluzí se dostane tak, že se nekonečné sumy podle m zredukují pouze na inkluze v bodech $[\pm d, 0]$.

Jako numerický příklad uvádí tabulka 2 hodnoty napětí σ_{yy} v bodech A , B , C a D , uvedených na obrázku 5, pro polohy dislokací s Burgersovým vektorem b_y v bodech $[c + 2md, 0]$ a dislokací s Burgersovým vektorem $-b_y$ v bodech $[-c + (1 + 2m)d, 0]$, kde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a kde c je dáno vztahem (15).

5. Řada trhlin a inkluzí

S pomocí řešení předchozí úlohy lze modelovat případ interakce řady kolineárních mikrotrhlin s řadou inkluzí. K simulaci mikrotrhlin lze v tomto případě použít metodu spojitě rozložených dislokací. Z Buecknerova principu plyne, že řešení problému lze získat superpozicí úlohy o nekonečné řadě inkluzí v zatížené matici, Kosmodamianskij (1964), a tzv. korekčních napětí, která působí podél líců trhlin. Korekční napětí se stanoví pomocí spojitě rozdělených dislokací v místech trhlin. Protože stav napětí vyvolaný přítomností

Tabulka 2: Hodnoty napětí σ_{yy} ve vybraných bodech na ose x .

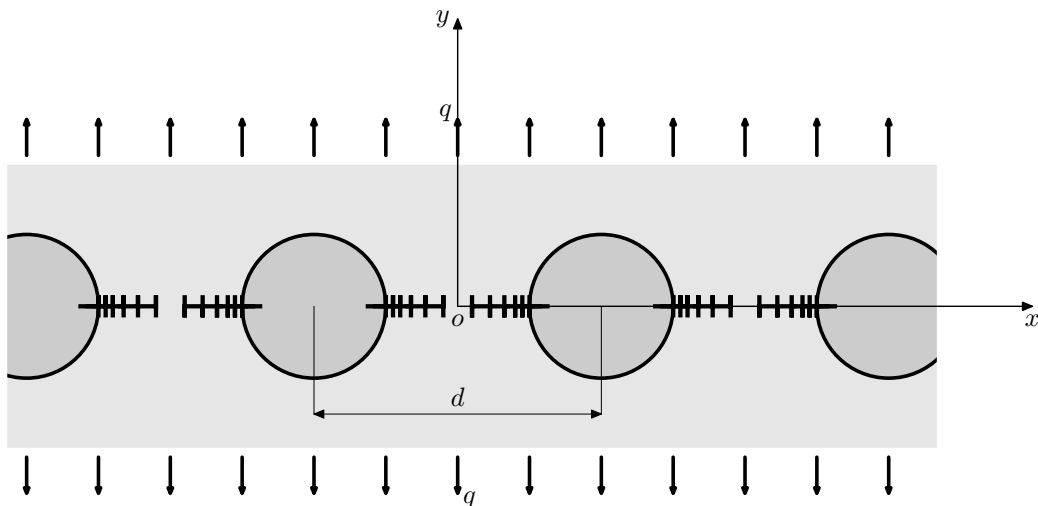
$$E_i/E_e = 1/2, \nu_i = \nu_e = 1/3, \kappa = 3 - 4\nu$$

$$2c/(d - 2R) = \cos(\pi(2i + 1)/2(N + 1)), N = 4, i = 1$$

$$\sigma_0 = \mu_e b_y R / \pi(\kappa_e + 1)$$

	$2c/(d - 2R)$	x/R^*	1. přiblížení				3. přiblížení			
			ϵ				ϵ			
			1/6	1/4	1/3	2/5	1/6	1/4	1/3	2/5
σ_{yy}/σ_0	0.5878	A	-0.7118	-1.4442	-2.8173	-5.2141	-0.6566	-1.3110	-2.6613	-5.3404
		B	-0.6151	-1.1792	-2.2140	-4.1246	-0.6404	-1.2009	-2.1636	-3.8699
		C	3.7640	6.6044	11.6856	21.2474	3.5732	6.6303	12.2545	22.4461
		D	3.1606	5.3472	9.2552	16.6832	3.0965	5.1773	9.0420	16.4747
	$2c/(d - 2R)$	x/R^*	5. přiblížení				7. přiblížení			
			ϵ				ϵ			
			1/6	1/4	1/3	2/5	1/6	1/4	1/3	2/5
σ_{yy}/σ_0	0.5878	A	-0.6471	-1.2473	-2.4300	-4.9924	-0.6462	-1.2313	-2.3041	-4.6138
		B	-0.6456	-1.2201	-2.1829	-3.8142	-0.6461	-1.2256	-2.1978	-3.7998
		C	3.3555	6.2912	12.2016	23.0240	3.2420	5.9454	11.8623	23.1989
		D	3.1235	5.1499	8.9264	16.2968	3.1457	5.1662	8.8788	16.1650

*viz obrázek 5.



Obrázek 8: Ilustrace techniky spojitě rozdělených dislokací pro modelování nekonečné řady trhlin.

dislokace závisí pouze na Burgersově vektoru b_y , redukuje se problém na hledání takového spojitého rozložení dislokací $B_y(x)$ mezi inkluzemi, které generuje podél líců trhliny napětí co do velikosti stejná, ale opačně orientovaná než ta napětí, která vznikají v důsledku vnějšího zatížení. Protože ze symetrie problému vyplývá, že hustota $B_y(x)$ musí být lichou funkcí proměnné x , lze využít předchozí úlohy k sestavení následující integrální rovnice pro neznámou hustotu Burgersova vektoru $B_y(x)$

$$-\frac{\pi(\kappa_e + 1)}{\mu_e} \tilde{\sigma}_{yy} = \frac{\pi}{d} \int_{-d/2+1}^{d/2-1} B_y(c) \frac{\cos(\pi c/d)}{\sin(\pi x/d) - \sin(\pi c/d)} dc + \int_{-d/2+1}^{d/2-1} B_y(c) f(x, c) dc, \quad (19)$$

kde $x \in (-d/2 + 1, d/2 - 1)$, $\tilde{\sigma}_{yy}$ je napětí vznikající na lícech trhlin v důsledku vnějšího zatížení a funkce $f(x, c)$ je spojitá na intervalu $(-d/2 + 1, d/2 - 1)$ jak v proměnné x tak i v proměnné c a popisuje veškerou interakci mezi inkluzemi a dislokacemi. Její tvar je určen potenciály (5)–(8) a (17) a (18). Integrální rovnice (19) lze řešit jen pomocí numerické integrace založené na aproximaci hustoty Burgersova vektoru $B_y(x)$ vhodně zvoleným systémem ortogonálních polynomů.

Poděkování: tento příspěvek vznikl díky finanční podpoře prostřednictvím grantu GAČR 101/02/0683.

6. Literatura

- Dundurs, J. & Mura, T. (1964) Interaction Between an Edge Dislocation and a Circular Inclusion. *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp.177-189.
- Fukuzaki, K. & Shioa, S. (1986) On the Interaction Between an Edge Dislocation and Two Circular Inclusions in an Infinite Medium. *Int. J. Engng. Sci.* 24, 12, pp.1771-1787.
- Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N. & Kosunsky, A. M. (1996) *Solutions of Crack Problems, The Distributed Dislocation Technoqe*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Kosmodamianskij, A. S. (1964) *Někotorye zadači teorii uprugosti o koncentracii naprjaženij, ravnovesii i kolebanijach uprugich tel*. Sbornik statej, Izdatelstvo Saratovskogo universiteta, Soratovsk, pp.38–53.
- Muschelišvili, N. I. (1966) *Někotoryje osnovnyje zadači metematičeskoy teorii uprugosti*. Izdatelstvo akademii nauk SSSR, Moskva.
- Savin, G. N. (1951) *Koncentracia naprjaženij okolo otverstvij*. Gostechizdat, pp.138–150.
- Profant, T. & Kotoul, M. (2003) vyjde v *Inženýrská mechanika*, 10.