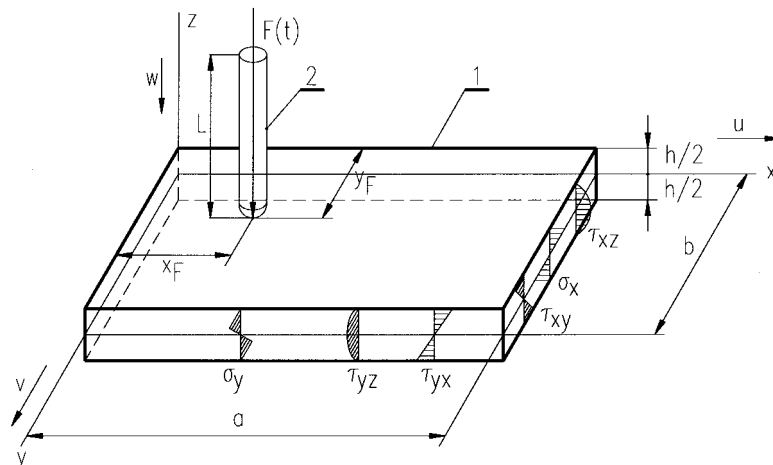


## TRANSVERSAL IMPACT OF ELASTIC ROD ON THIN ELASTIC ISOTROPIC AND ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE

J. Volek<sup>1</sup>, J. Soukup<sup>1</sup>

**Summary:** *In relation to previous solution of non-stationary state of stress in elastic plate excited by singular force, the solution of transversale impact an elastic thin rod on thin elastic isotropic and orthotropic rectangular plate including rotary inertia is published here.*

V příspěvku IM 2002 [1] byl uveden postup a základní vztahy řešení příčného rázu tenké elastické tyče na tenkou elastickou izotropní desku – obr. 1.



Řešení vychází z podmínky rovnosti posuvů v místě  $A$  dotyku obou těles  $w_{A1} = w_{A2}$ <sup>2)</sup>. Posuv dotykového bodu  $A$  desky  $w_{A1}$  je dán součtem posuvu  $w_{KA1}$ , který je určen, vzhledem k předpokladům teorie tenkých desek, kmitavým posuvem průmětu bodu  $A$  do střednicové plochy, a posuvu  $w_{DA1}$ , který odpovídá dotykové deformaci horní lící plochy. Posuv dotykového bodu  $A$  tyče  $w_{A2}$  je dán posuvem  $w_{T2}$  padající tyče jako tuhého tělesa, na nějž působí rázová síla  $F(t)$  proti pohybu, zmenšeném o posuv  $w_{KA2}$  pružné volné tyče a o posuv  $w_{DA2}$ , odpovídající dotykové deformaci tyče:

$$w_{KA1} + w_{DA1} = w_{T2} - w_{KA2} - w_{DA2}$$

nebo

$$w_{DA1} + w_{DA2} = w_{DA} = w_{T2} - w_{KA2} - w_{KA1} \quad (1)$$

<sup>1</sup> PhDr. Ing. Jan Volek, Ing. Josef Soukup, CSc.: Ústav techniky a řízení výroby, Univerzita J. E. Purkyně Ústí n. L., Na Okraji 1001, 400 96 Ústí n. L., tel. 475 601 191, e-mail: [soukupj@utr.v.ujep.cz](mailto:soukupj@utr.v.ujep.cz)

<sup>2</sup> Způsob prezentace řešení problému je ovlivněn možností jeho využití při výuce ÚTRV UJEP

Pro posuv  $w_{DA} = w_D(t)$  odpovídající sblížení těles vlivem dotykové deformace při rázu, není známo obecné analytické řešení. Je proto posuv  $w_D$  vyjádřen vztahem

$$w_D = k_d [F(t)]^\delta \quad (2)$$

kde  $k_d$  je konstanta závislá na elastických a geometrických vlastnostech těles v místě dotyku. Proto jako první přiblížení je uvažován Hertzův vztah pro statický dotyk elastické koule (kulového vrcholu tyče – 2) o poloměru  $R_2$  a elastického poloprostoru (horní lící plochy desky – 1).

$$k_d = \left[ \frac{9\pi}{16} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2 \frac{1}{R_2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{a} \quad \delta = \frac{2}{3} \quad (3)$$

Pro další řešení je nutno určit poloměr kružnice dotyku koule, resp. kulového vrchlíku a roviny:

$$c = k_c [F(t)]^{\frac{1}{3}} \quad \text{kde} \quad k_c = \left[ \frac{3\pi}{4} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right) R_2 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

Posuv dolního koncového řezu tyče je dán vztahem [1]

$$w_{T2} - w_{KA2} = vt + g \frac{t^2}{2} - \frac{1}{m_2} \int_0^t T(\tau)(t-\tau) d\tau - \frac{2}{m_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j} \int_0^t F(t) \sin \omega_j (t-\tau) d\tau \quad (5)$$

$$\text{kde} \quad \omega_j = \frac{j\pi}{L} c_0 \quad c_0 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$$

Vztah pro výpočet posuvu desky  $w_A$  se získá řešením pohybové rovnice, resp. pohybových rovnic posuvných a rotačních pohybů vzhledem k osám procházejícím těžištěm elementu tenké elastické desky [1]:

#### Izotropní deska

Kirchhoffův model

$$\Delta \Delta w + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p(x; y; t)}{D} \quad (6)$$

Rayleigho model

$$\Delta \Delta w - \frac{1}{c_3^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p(x; y; t)}{D} \quad (6a)$$

kde

$$c_3^2 = \frac{E}{(1-\mu^2)} \quad \frac{1}{c_3^2} = \frac{J_\rho}{D} \quad D = \frac{E.h^3}{12(1-\mu^2)}$$

### Ortotropní deska [3]

Rayleigho model

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{\xi\eta} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\rho.h.w - J_\rho.\Delta w] = p(x; y; t) \quad (7)$$

Kirchhoffův model desky ( $J_\rho = 0$ )

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{\xi\eta} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\rho.h.w - J_\rho.\Delta w] = p(x; y; t)$$

$$D_x = \frac{E_x.h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \quad D_y = \frac{E_y.h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \quad D_{xy} = \frac{G_{xy}.h^3}{12} \quad J_\rho = \frac{\rho.h^3}{12} \quad (7a)$$

$$D_{\xi\eta} = D_x\mu_{yx} + 2D_{xy} = D_y\mu_{xy} + 2D_{xy}$$

Řešení pohybových rovnic (6) a (7), tj. vztah pro výpočet posuvu desky je možno hledat Fourierovou metodou ve tvaru dvojně řady

$$w(x; y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X(x)Y(y)T(t) \quad (8)$$

kde funkce  $X(x)$  a  $Y(y)$  vyhovují příslušné pohybové rovnici a okrajovým podmínkám a jsou ortogonální. V řešeném případě obdélníkové desky po obvodě prostě podepřené [2], [3]

$$X(x) = \sin \alpha_n x \quad Y(y) = \sin \beta_m y$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} \quad (9)$$

Za předpokladu, že vnější budící spojité zatížení  $p(x; y; t)$  je možno vyjádřit ve tvaru

$$p(x; y; t) = P(x, y) F(t)$$

je řešení rovnic (6) a (7), tj. posuv bodu střednicové plochy desky [2], [3]

$$w(x; y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^b P(x; y) X(x) Y(y) dx dy}{\int_0^a \int_0^b [X(x) Y(y)]^2 dx dy} \cdot \frac{X(x) Y(y)}{\Psi_{nm} \omega_{nm}} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{nm} (t - \tau) d\tau \quad (10)$$

Parametr  $\Psi_{nm}$  pro izotropní i ortotropní desku

Rayleigho model

$$\Psi_{nm} = J_{\rho} (\alpha_n^2 + \beta_m^2) + \rho \cdot h$$

Kirchhoffův model  $J_{\rho} = 0$

$$\Psi_{nm} = \rho \cdot h$$

Vlastní frekvence pro Rayleigho i Kirchhoffův model desky

izotropní 
$$\omega_{nm} = \frac{D}{\Psi_{nm}}$$

ortotropní 
$$\omega_{nm} = \frac{D_x \alpha_n^2 + 2D_{\xi\eta} \alpha_n^2 \beta_m^2 + D_y \beta_m^2}{\Psi_{nm}}$$

Dvojný integrál v čitateli vztahu (10) je bezrozměrný parametr

$$p_{nm} = \int_0^a \int_0^b P(x, y) X(x) Y(y) dx dy \quad (11)$$

který určuje vliv geometrie vnějšího budícího zatížení  $p(x; y; t) \rightarrow P(x, y)$ .  $F(t)$ , tj. vliv tvaru a velikosti kontaktní plochy a její polohu v horní lící ploše, např. souřadnicemi jejího středu  $x_F$  a  $y_F$ , a rozložení intenzity spojitého zatížení. V příspěvku [1] je v pohybových rovnicích uvažován kontakt razníku a desky jako osaměle působící síla  $F(t)$  aplikací Diracova impulsu (delta funkce)  $\delta_{(x_F)}, \delta_{(y_F)}$ . Přetvoření desky v blízkém okolí bodu dotyku lépe vyhovuje vyjádření vnějšího spojitého zatížení ve tvaru rotačního paraboloidu

$$p(\rho) = \frac{2}{\pi} \frac{F(t)}{c^2} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{c} \right)^2 \right] \quad (12)$$

přičemž poloměr  $c$  kružnice dotykové deformace mění se v průběhu rázu je určen vztahem (4). V takovém případě je parametr [4]

$$p_{nm} = \frac{8}{c^2} \frac{J_2(\gamma_{nm} c)}{\gamma_{nm}^2} X(x_F) Y(y_F) \quad (13)$$

kde  $\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$  a  $J_2(\gamma_{nm}c)$  je Besselova funkce prvního druhu, druhého řádu pro argument  $(\gamma_{nm}c)$ .

Jmenovatel zlomku ve vztahu (10) s ohledem na (9)

$$\int_0^a \int_0^b [X(x)Y(y)]^2 dx dy = \frac{a.b}{4}$$

V řešeném případě prostě uložené desky je vertikální posuv

$$w(x; y; t) = \frac{32}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm} \Psi_{nm}} \cdot \sin \alpha_n x_F \cdot \sin \beta_m y_F \cdot \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_{nm} (t - \tau) d\tau \quad (14)$$

Vertikální posuv v místě rázu  $x = x_F, y = y_F$

$$w(x_F; y_F; t) = \frac{32}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm} \Psi_{nm}} \cdot \sin^2 \alpha_n x_F \cdot \sin^2 \beta_m y_F \cdot \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{nm} (t - \tau) d\tau \quad (14a)$$

Dosazením vztahů (2), (5) a (14a) do rovnice (1) se po úpravě, za předpokladu stejnoměrné konvergence všech řad, které tyto výrazy obsahují, získá nelineární integrální Volterrova rovnice II. druhu pro výpočet rázové síly  $F(t)$

$$k_d [F(t)]^{\delta} = \Psi(t) - \int_0^t F(\tau) \cdot K(t - \tau) d\tau \quad (15)$$

kde funkce  $\Psi(t) = v.t + \frac{g.t^2}{2}$  a jádro integrální rovnice je dáno vztahem

$$K(t) = \frac{t}{m_2} + \frac{2}{m_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j} + \frac{32}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm} \Psi_{nm}} \sin^2 \alpha_n x_F \cdot \sin^2 \beta_m y_F \cdot \sin \omega_{nm} t \quad (16)$$

Řešení integrální rovnice (15) nelze provést pomocí integrální transformace a není známa ani jiná metoda analytického řešení. Pro přibližné řešení integrální rovnice byla použita vlastní numerická metoda : v časových intervalech  $\Delta t$ , tj.  $\tau$  v intervalu

$$t_{i-1} = (i-1)\Delta t \leq \tau \leq i\Delta t = t_i$$

je vhodné hledanou funkci  $F(t)$  je vhodné aproximovat lineární funkcí, určenou hodnotami

$$F_{i-1} = F(t = (i-1)\Delta t) \quad \text{a} \quad F_i = F(t = i\Delta t)$$

$$F(t) = F_i \left[ \frac{t}{\Delta t} - (i-1) \right] - F_i \left[ \frac{t}{\Delta t} - i \right]$$

pak Duhamelův integrál v rovnici (15) je možno vyjádřit vztahem

$$I = \int_0^t F(\tau) K(t-\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \left\{ F_i \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - (i-1) \right] - F_{i-1} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - i \right] \right\} K(N\Delta t - \tau) d\tau$$

kde  $t = N\Delta t$  a podle (16)

$$K(N\Delta t - \tau) = \frac{t - \tau}{m_2} + \frac{2}{m_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_j (N\Delta t - \tau)}{\omega_j} + \frac{32}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \alpha_n x_F \cdot \sin^2 \beta_m y_F \cdot \sin \omega_{mn} (N\Delta t - \tau) \quad (16a)$$

Jestliže platí  $F_N = F(t=N\Delta t)$ , pak po dosazení vztahu (16a) do integrální rovnice (15) se po úpravě získá nelineární rovnice pro  $F_N$

$$a_2 F_N^\delta + a_1 F_N + a_0 = 0 \quad (17)$$

kde

$$a_2 = k_d \quad (18)$$

pro  $N \geq 2$

$$a_1 = \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} \left( \frac{\tau}{\Delta t} - N + 1 \right) K(N\Delta t - \tau) d\tau \quad (18a)$$

$$a_0 = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \left\{ F_i \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - i + 1 \right] - F_{i-1} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - i \right] \right\} K(N\Delta t - \tau) d\tau - \\ - F_{N-1} \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - N \right] K(N\Delta t - \tau) d\tau - \Psi(N\Delta t) \quad (18b)$$

pro  $N = 1$

$$a_1 = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \tau \cdot K_1(\Delta t - \tau) d\tau \quad (18c)$$

$$a_0 = -\Psi(\Delta t) \quad (18d)$$

$$\text{kde } K_1(\Delta t - \tau) = \frac{\Delta t - \tau}{m_2}$$

tj. druhý a třetí člen ve vztahu (18b), pro  $a$  a pro  $N \geq 2$  jsou pro  $N = 1$  rovny nule, neboť do příchodu odražené vlny je možno dotyk obou těles považovat za dotyk dvou poloprostorů, posuv dotykového bodu je určen jen dotykovou deformací, tzn. časový interval pro numerickou integraci je nutno volit v rozsahu

$$\Delta t \leq \frac{2h}{c_1} \quad \text{a} \quad \Delta t \leq \frac{2d}{c_1}$$

Při volbě lineární funkce aproximující funkci  $F(t)$  v krátkých časových intervalech  $\Delta t$  je splněna podmínka  $F(t=0)=0$ , avšak podmínka odpovídající experimentálně zjištěnému časovému průběhu síly  $\left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$  splněna není, neboť v případě lineární aproximující funkce  $\frac{dF(t)}{dt} = \frac{F_1}{\Delta t}$ .

Je proto nutno pro první časový interval volit aproximující funkci ve tvaru paraboly

$$F(t) = p.t^2 \quad (19)$$

Koeficienty rovnice (17) se změjí

$$\text{Pro } N=1 \quad a_1 = \frac{p}{m_2} \int_0^{\Delta t} \tau^2 (\Delta t - \tau) d\tau = \frac{p}{12m_2} \Delta t^4$$

a rovnice (17) se změjí na rovnici pro parametr  $p$  rovnice (19)

$$a_2 p^\delta + a_1 p - \Psi(\Delta t) = 0 \quad [\text{cm}]$$

$$\text{kde} \quad a_2 = k_d (\Delta t)^{2\delta} \quad a_1 = \frac{(\Delta t)^4}{12m_2} \quad \Psi(\Delta t) = v_0 \Delta t + \frac{g}{2} (\Delta t)^2$$

Řešením této rovnice se získá hodnota parametru  $p$  a hodnota  $F_1$  se určí ze vztahu  $F_1 = p(\Delta t)^2$ . V dalších intervalech zůstává aproximující funkcí přímka. Koeficienty  $a_2$  a  $a_1$  pro  $N = 2$  se určí ze vztahů (18) a (18a), avšak změjí se koeficient  $a_0$

$$a_0 = p \int_0^{\Delta t} \tau^2 K(N\Delta t - \tau) d\tau - F_1 \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - N \right] K(N\Delta t - \tau) d\tau - \Psi(N\Delta t)$$

pro  $N \geq 3$  se změjí koeficient

$$a_0 = p \int_0^{\Delta t} \tau^2 K_1(N\Delta t - \tau) d\tau + \sum_{i=2}^{N-1} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \left\{ F_i \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - (i-1) \right] - F_{i-1} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - i \right] \right\} K(N\Delta t - \tau) d\tau -$$

$$- F_{N-1} \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - N \right] K(N\Delta t - \tau) d\tau - \Psi(N\Delta t)$$

kde funkce  $K(N\Delta t - \tau)$  je dána vztahem (16a). Řešením nelineární integrální rovnice (15), resp. nelineární algebraické rovnice (17) se určí hodnota rázové síly  $F_N$  na konci intervalu  $t = N\Delta t$  a tím je možno provést výpočet hodnot složek posuvů, rychlostí a napětí v průběhu rázu, tj. pro  $F_N \geq 0$  i v čase následujícím po ukončení působení rázové síly [3].

Dále jsou uvedeny vztahy pro výpočet veličin potřebných pro analýzu procesu přetváření volně podepřené desky v čase  $t = N\Delta t$  pro ortotropní desku. Pro izotropní desku viz rovnice (6) platí

$$E = E_x = E_y; G = G_{xy}; \mu = \mu_{yx}\mu_{xy}; D = D_x = D_y = D_{\zeta\eta} \quad D_{xy} = D \cdot \frac{1-\mu}{2}$$

Posuv vertikální

$$w(x, y, t) = \frac{64}{a \cdot b \cdot c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \sin \alpha_n x_F \cdot \sin \beta_m y_F \cdot \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

Posuv ve směru x

$$u(x, y, z, t) = -\frac{64z}{a \cdot b \cdot c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \alpha_n \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot \cos \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot \sin \beta_m T(t = N\Delta t)$$

Posuv ve směru y

$$v(x, y, z, t) = -\frac{64z}{a \cdot b \cdot c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \beta_m \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot \sin \alpha_n x \cdot \cos \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

Úhly natočení tečen

$$\varphi_x(x, y, t) = \frac{64}{a \cdot b \cdot c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \alpha_n \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot \cos \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \frac{64}{a \cdot b \cdot c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \beta_m \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot \sin \alpha_n x \cdot \cos \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

Normální napětí

- ve směru osy x

$$\sigma_x(x, y, z, t) = \frac{E_x z}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} \cdot \frac{64z}{a \cdot b \cdot c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c) (\alpha_n^2 + \mu_{yx} \beta_m^2)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot \sin \alpha_n y \cdot \sin \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$



- ve směru osy  $y$

$$\sigma_y(x, y, z, t) = \frac{E_y}{1 - \mu_{yx}\mu_{xy}} \cdot \frac{64z}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c) (\beta_m^2 + \mu_{xy}\alpha_n^2)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot$$

$$\cdot \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

Obdobně smyková napětí

$$\tau_{xy}(x, y, z, t) = -G_{xy} z \cdot \frac{128}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c)}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \cdot \frac{\alpha_n \beta_m}{D_{\xi\eta}} \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot$$

$$\cdot \cos \alpha_n x \cdot \cos \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

$$\tau_{xz}(x, y, z, t) = \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] \cdot \frac{64}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c) \alpha_n \cdot A_x}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot$$

$$\cdot \cos \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

kde

$$A_x = \frac{\alpha_n^2 D_x + \beta_m^2 D_{\xi\eta}}{\omega_{nm}} - J_\rho \omega_{nm}$$

$$\tau_{yz}(x, y, z, t) = \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] \cdot \frac{64}{a.b.c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{nm}c) \beta_m \cdot A_y}{\gamma_{nm}^2 \omega_{nm}^2 \Psi_{nm}} \sin \alpha_n x_F \sin \beta_m y_F \cdot$$

$$\cdot \sin \alpha_n x \cdot \cos \beta_m y \cdot T(t = N\Delta t)$$

kde

$$A_y = \frac{\beta_m^2 D_y + \alpha_n^2 D_{\xi\eta}}{\omega_{nm}} - J_\rho \omega_{nm}$$

kde funkce času  $T(t=N\Delta t)$  po integraci

$$T(t = N\Delta t) = F_1 \left[ \frac{1}{2} \cos \omega_{nm} \Delta t (N-1) + \frac{1}{\omega_{nm} \Delta t} \sin \omega_{nm} \Delta t (N-1) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(\omega_{nm} \Delta t)^2} \sin \frac{\omega_{nm} \Delta t (2N-1)}{2} \sin \frac{\omega_{nm} \Delta t}{2} \right] + \sum_{i=2}^N \left\{ (F_i - F_{i-1}) \left( \frac{1}{2} \cos \omega_{nm} \Delta t (N-i+1) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left[ (2i-1) \sin \omega_{nm} \Delta t (N-i + \frac{1}{2}) - \frac{1}{\omega_{nm}} \cos \omega_{nm} \Delta t (N-i + \frac{1}{2}) \right] \cdot \sin \frac{\omega_{nm} \Delta t}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + F_{i-1} \sin \omega_{nm} \Delta t (N-i + \frac{1}{2}) \sin \frac{\omega_{nm} \Delta t}{2} \right\}$$

Tento příspěvek navazuje na některé studie vypracované s podporou grantového projektu GAČR č. 101/00/0674 a GA AVČR reg. Č. A2076001.

Pro posouzení výsledků uvedeného řešení se předpokládá řešení metodou konečných prvků, analytické řešení pro 3D a experimentální řešení problému rázu v soustavě jedno a dvourozměrných těles.

#### Literatura

- [1] Volek. J., Soukup. J., Karásek, V. : Transversale impact of elastic rod on thin elastic rectangular plate.  
Sborník konference Inženýrská mechanika 2002, Svratka 2002
- [2] Volek. J. : Nestacionární napjatost tenké desky vyvolání příčnou osamělou silou  
Bulletin vědeckých, výzkumných a pedagogických prací ústavu za rok 2000  
Ústav techniky a řízení výroby, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí n. L., 2001
- [3] Volek. J. : Odvození vztahů pro posuvy, rychlosti a napětí v tenké ortotropní elastické desce s příčně působícím zatížením na jedné lící ploše. Model Kirchhoffův a model Rayleigho  
Bulletin vědeckých, výzkumných a pedagogických prací ústavu za rok 2002,  
Ústav techniky a řízení výroby, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí n. L., 2003 (v tisku)
- [4] Woinowsky-Krieger, S. : Über die Biegung dünner rechteckiger Platte durch Kreislasten.  
Ing. Archiv, Bd. III., 1932