

NUMERICAL INTEGRATION AND DIFFERENTIATION OF SAMPLED TIME SIGNALS BY USING FFT

J. Tůma*

Summary: *The paper deals with differentiation and integration of sampled time signals in the frequency domain using the FFT and inverse FFT. The time signal integration in the time domain is replaced by division of the signal frequency spectrum by $j\omega$ factor in the frequency domain. Similarly the differentiation of time signals with respect to time is replaced by multiplication of the frequency spectrum by factor $j\omega$. As the data are corrupted by noise some components of the frequency spectrum are filtered out.*

1. Úvod

Signály se výhradně zaznamenávají jako vzorkované nejčastěji s konstantní vzorkovací frekvencí. Příkladem může být rychlost pohybu. V případě, že je požadována znalost dráhy (výchyly) nebo zrychlení, je třeba signál integrovat nebo derivovat. Jestliže je potřeba odvodit ze záznamu zrychlení pohybu výchyly, pak je třeba integrovat dvakrát. Stejně v případě výpočtu zrychlení ze známé výchyly je třeba použít druhou derivaci. Protože vzorkovací frekvence je obvykle dostatečně vysoká, stačí vypočítat derivaci nebo integrál pouze v okamžicích vzorkování.

Učebnice numerické matematiky nabízejí interpolační vzorce pro numerické integrování nebo derivování. Pro integraci je nejjednodušší kumulovaný součet a pro derivaci zpětná nebo dopředná diference. V obou případech je uvažováno s velikostí vzorkovací periody. U integrace tento postup znamená náhradu časového průběhu obdélníky. Složitější výpočet představuje náhrada lichoběžníky a ještě složitější postup pak náhrada polynomy vyššího stupně než 2. U derivace lze pro okamžik zvoleného vzorku vypočítat derivaci rovněž z aproximačního polynomu. Výpočet koeficientů zvoleného aproximačního polynomu vyžaduje o jeden vzorek více než je stupeň tohoto polynomu. Je výhodnější samozřejmě co největší stupeň polynomu. Rovněž přesnost je vyšší pokud se počítá derivace pro vzorek prostřední než pro vzorky na okraji skupiny po sobě jdoucích vzorků.

Popsané postupy však nevyhoví, jestliže jsou data zatížena specifickými měřicími chybami. Další nevýhodou je to, že například při výpočtu derivace je počet vypočtených diferencí o jednu nižší než je počet vzorků, což někdy nemusí vyhovovat. Tento referát bude demonstrovat postup využívající transformaci signálu do frekvenční oblasti, ve které se provede úprava frekvenčního složení spektra a záznam se bude transformovat inverzní

*Prof. Ing. Jiří Tůma, CSc., Department of Control Systems and Instrumentation, VŠB - Technical University of Ostrava, 17.listopadu 15, Ostrava-Poruba, 708 33, Czech Republic, tel.: 596993482
jiri.tuma@vsb.cz

transformací zpět do časové oblasti. Použití tohoto postupu je zvláště vhodné pro signál zrychlení piezoelektrickým akcelerometrem, z jehož záznamu je třeba vypočítat výchylku, nebo pro signál úhlové výchylky sloužící k výpočtu úhlového zrychlení. Pro obě tyto úlohy budou uvedeny příklady z měření.

2. Teoretické základy integrace a derivace ve frekvenční oblasti

Nejrozšířenějším postupem výpočtu Fourierovy transformace je rychlá Fourierova transformace (FFT). Jejím omezením je počet vzorků. I když jsou odvozeny algoritmy pro počty vzorků rozložitelných na nestejně činitele, nejrozšířenější je výpočet pro počet vzorků roven mocnině dvou. Konečnou posloupnost vzorků o tomto počtu N , $x_i, i = 0, 1, \dots, N-1$ se převede diskrétní Fourierovou transformací (DFT) na stejný počet vzorků $X_i, i = 0, 1, \dots, N-1$

$$\mathbf{X} = DFT(\mathbf{x}), \quad (1)$$

kde \mathbf{x} a \mathbf{X} jsou vektory obsahující prvky x_i a X_i . Jestliže x_i je vektor reálných čísel, pak \mathbf{X} je vektor komplexních čísel a pro jeho složky s pořadím $i > 0$ platí, že jsou komplexně sdružené

$$X_i = X_{N-i}^*. \quad (2)$$

Je třeba si všimnout, že jsou to prvky symetrické kolem prvku s pořadím $N/2$. Hodnota prvku s pořadím nula, X_0 , je reálné číslo, které je úměrné součtu vzorků.

Obraz matematické operace integrování podle času odpovídá obecně dělení Fourierova obrazu časové funkce výrazem $j\omega$ a obraz operace derivování podle času je ve frekvenční oblasti nahrazeno násobením tímto faktorem. Pro vzorkované hodnoty je úhlová frekvence ω vypočtena podle vzorce

$$\omega_i = \begin{cases} 2\pi i/T, & 0 \leq i \leq N/2 \\ 2\pi(N-i)/T, & N/2 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (3)$$

kde T je doba záznamu vzorků o počtu N . První složka vektoru \mathbf{X} souvisí se střední hodnotou vzorků v záznamu, druhá a poslední složka jsou v absolutní hodnotě shodné a souvisejí s amplitudou složky vzorkovaného signálu o periodě T , třetí a předposlední složka souvisí s amplitudou složky vzorkovaného signálu o periodě $T/2$, atd.

Faktor $j\omega_i$ je ryze imaginární číslo. Při integraci se jim dělí jednotlivé komplexní prvky vektoru \mathbf{X} a při derivaci naopak se uvedené prvky násobí. Tato operace zachovává symetrii v absolutní hodnotě a reálné části komplexních prvků výsledného vektoru a antisymetrii v imaginárních částech prvků tohoto vektoru, což je podmínka pro reálné prvky vektoru vzorků po inverzní Fourierově transformaci.

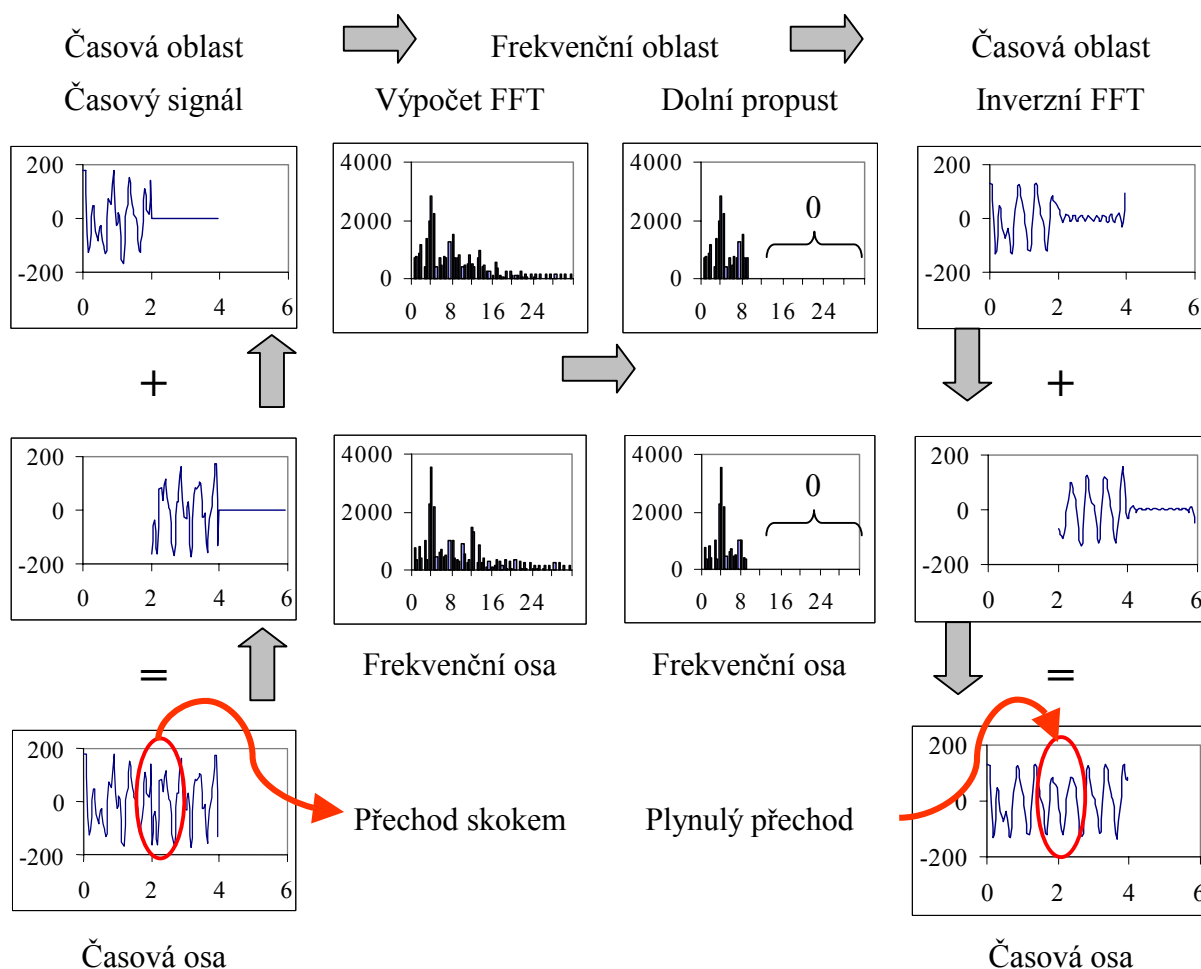
Při integraci vzorkovaného signálu popsáním postupem nelze prvek vektoru \mathbf{X} s pořadím 0 dělit nulovou úhlovou frekvencí. Ostatně nenulová střední hodnota (nenulový součet vzorků záznamu) vede po integraci na lineárně se zvětšující trendovou složku. Pokud má tato složka význam pro výsledek integrace, lze její průběh vypočítat bez použití techniky FFT. V případě například dat z měření zrychlení pohybu ve svislém směru je apriorně předpokládáno, že střední hodnota zrychlení je nulová.

Výhodou výpočtu derivace vzorkovaného signálu je to, že výsledkem je stejný počet vzorků jako u výchozího záznamu.

Transformaci časového průběhu vzorkovaného signálu do frekvenční oblasti je možné využít k úpravě frekvenčního spektra signálu. Při měření je apriori známo, které složky spektra přísluší měřicímu šumu. Nejjednodušší filtrace nežádoucích složek je jejich nulování. Při náhradě složek nulami je třeba dodržet symetrii kolem prvku s pořadím $N/2$.

3. Integrace posloupnosti záznamů a vyhlazení navazujících spojů

Dosud popsaný postup není nikterak složitý a lze jej realizovat snadno dostupnými prostředky. Nevýhodou popsaného postupu je to, že délka záznamů u metody výpočtu FFT, opírající se o počet vzorků rovný mocnině dvou, nelze provést pro libovolnou délku nebo aspoň s minimalizací zbytku záznamu, který nelze do integrace zařadit. Například 12000 vzorků umožňuje vypočítat FFT jen z 8192 vzorků. Zbývající asi 4000 vzorků nelze v tomto případě použít.



Obr. 1 Vysokorychlostní konvoluce s využitím FFT

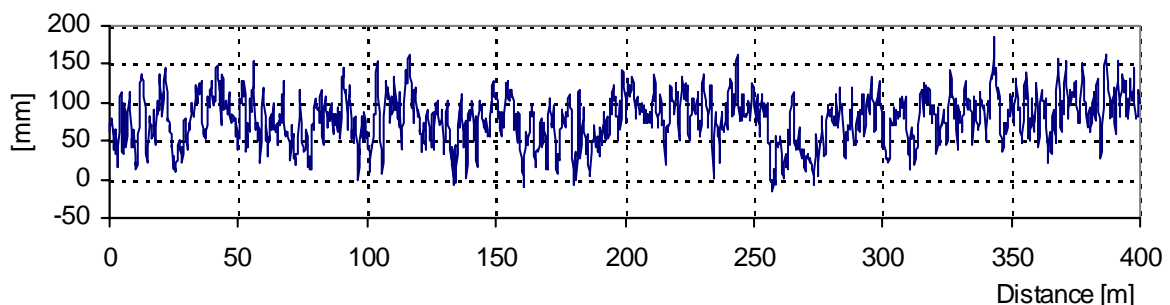
Aby se lépe zužitkovaly naměřená data, lze výchozí záznam například rozdělit na bloky (segmenty) o velikosti 2048 nebo 1024 a pro každý blok samostatně vypočítat integrovaný

nebo derivovaný časový průběh. Výsledné bloky však nebudou na sebe navazovat. V místě spojení budou skoky, což může vadit například, jestliže jsou dvojitě integrované záznamy zrychlení do výchylek polohy použity jako řídicí veličina pro hydraulický zatěžovací stroj. Přítomnost skoků znamená rozšíření frekvenčního spektra o složky s vysokou frekvencí. Například dvakrát integrovaný signál zrychlení pro řízení zatěžovacího stroje může mít omezené spektrum s vyloučením složek o vysokých frekvencích, která regulační obvod není schopen přenést na zdvih hydraulických válců. Jiným příkladem je derivovaný signál, s potlačením intenzivně zesílených složek spektra o vysokých frekvencích. Obě operace, integrování a derivování, je vhodné doplnit filtrací typu dolní propusti.

Vhodnou technikou je vysokorychlostní filtrace s využitím FFT. Princip spočívá v rozdělení navzorkovaného signálu na dílčí segmenty. Každý segment je prodloužen na dvojnásobnou délku doplněním nulami. Takto rozšířený segment je transformován FFT do frekvenční oblasti, kde je filtrován. Pro použití k vyhlazení spojů segmentů je použita dolní propust, což znamená, že vysokofrekvenční složky jsou nulovány. Segment s upraveným spektrem je inverzní FFT převeden zpět do časové oblasti. Jednotlivé segmenty jsou složeny tak, že rozšířený segment s úsekem vyplněný nulami se přičte k první části následujícího segmentu. Postup výpočtu je zřejmý z obr. 1. V literatuře je uvedeno, že tento způsob filtrace předčí svou rychlostí číslicovou filtraci, například filtrem s konečnou impulsní odezvou (FIR).

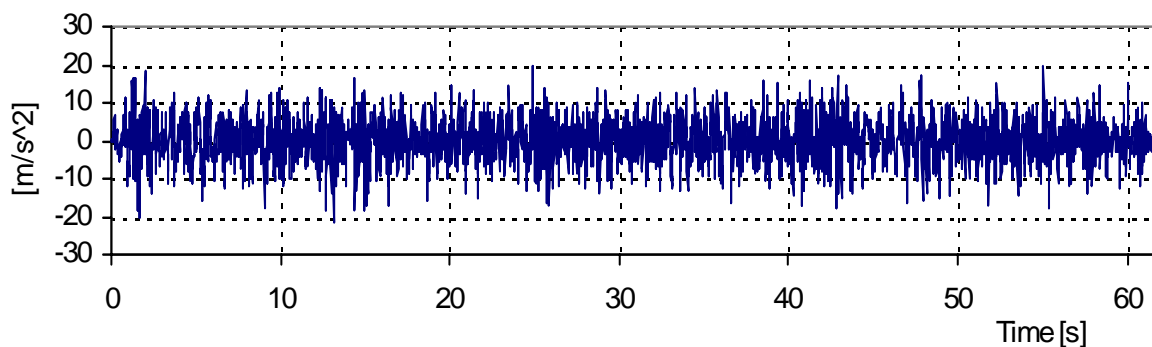
4. Příklad dvojitě integrace vzorkovaného signálu

Při testech systému pérování automobilu se projíždí zkušební vozovky a měří se zrychlení na nápravách nebo v místě uchycení kabiny k rámu a nebo přímo na podlaze kabiny. Cílem měření je získat budící funkce pro zkušební stavy simulující pohyb vozidla po zkušební vozovce. Protože elektrohydraulické systémy se řídí výchylkou, je třeba záznamy zrychlení dvakrát integrovat. Problém integrace však spočívá v tom, že akcelerometry mají nízkofrekvenční tepelný drift. Například na zkušební dráze PAVE o délce 400 m s nerovnostmi v rozsahu jednotek centimetrů se po integraci signálu zrychlení bez úprav frekvenčního spektra zjistí převýšení nebo vlny v metrech, přičemž dráha je ve skutečnosti téměř plochá. Nerovnosti v milimetrech jsou uvedeny na obr. 2.

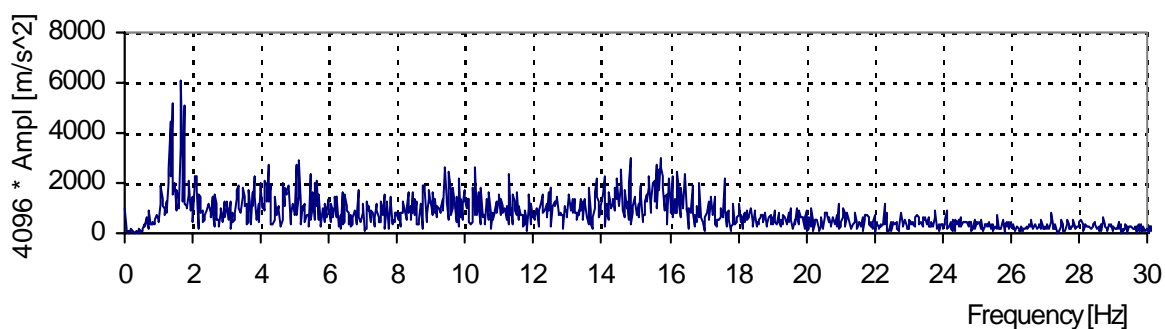


Obr. 2 Nerovnosti zkušební dráhy PAVE polygonu TATRA Kopřivnice

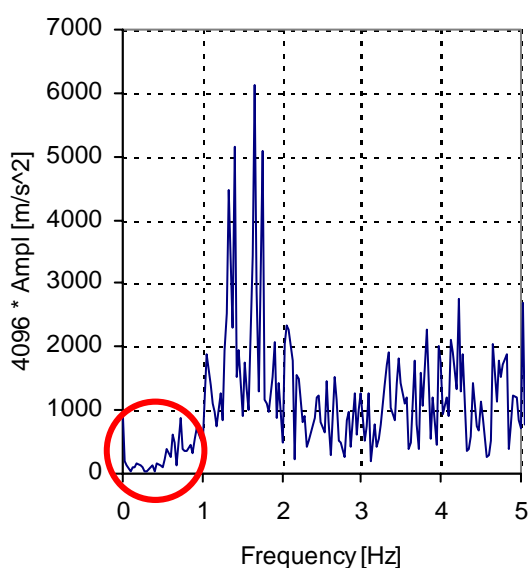
Vozidlo se pohybovalo rychlostí asi 25 km/h. Signály zrychlení byly vzorkovány s frekvencí 256 Hz. Záznam zrychlení podlahy kabiny nákladního automobilu T 815 za 62 s je znázorněn na obr. 3 a obsahuje 15831 vzorků. Pro výpočet FFT bylo možné použít jen 8192 vzorků, což odpovídá 32 s jízdy na dráze asi 220 m. Absolutní hodnota FFT spektra je na obr. obr. 4.



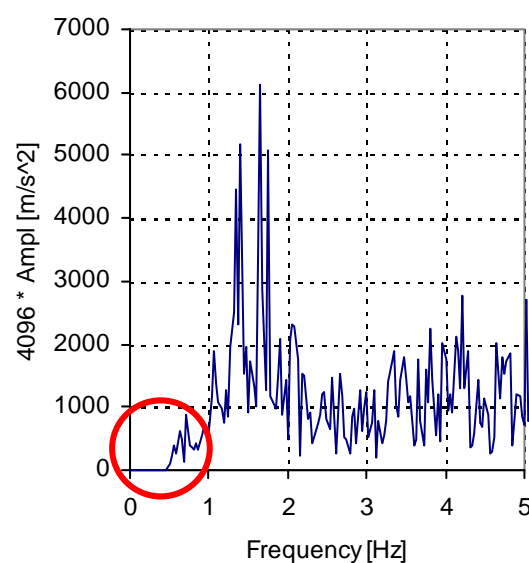
Obr. 3 Signál zrychlení na podlaze kabiny nákladního automobilu při průjezdu dráhou PAVE



Obr. 4 Spektrum signálu zrychlení z obr. 3

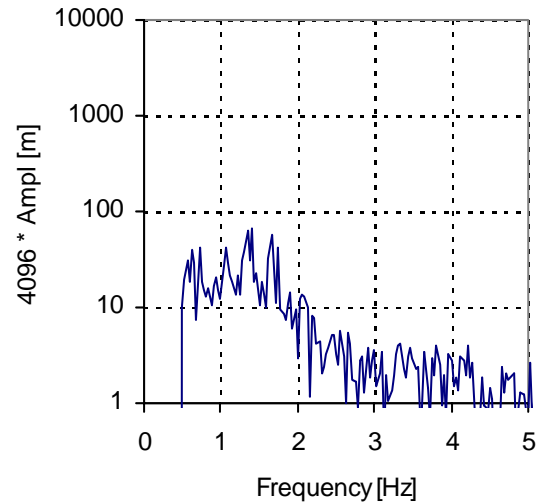
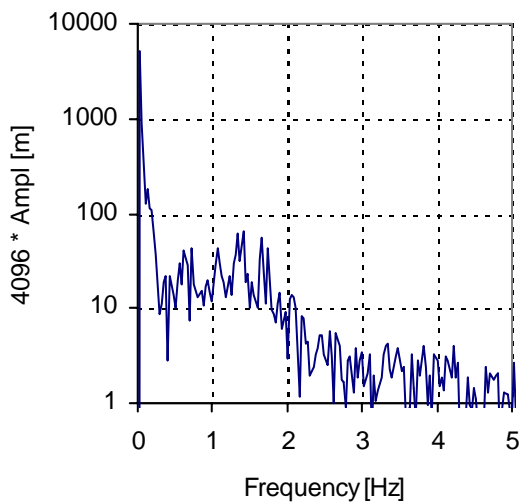


Obr. 5 ZOOM spektra z obr. 4



Obr. 6 ZOOM spektra z obr. 5 bez složek s frekvencí do 0,5 Hz

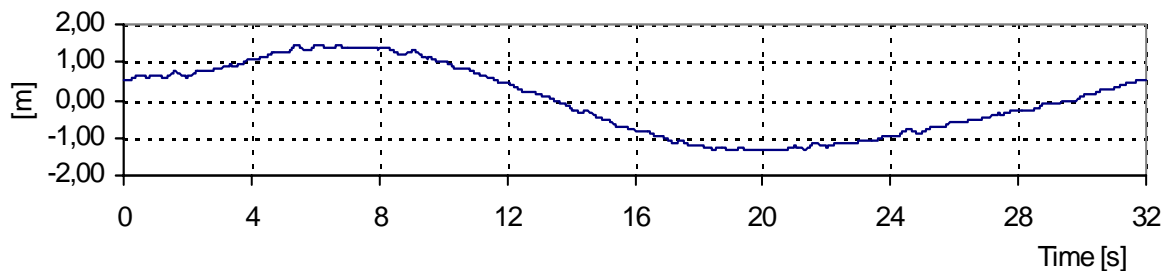
Tepelný drift akcelerometru se předpokládá v rozsahu do 0,5 Hz. Toto pásmo bylo stanoveno zkusmo tak, aby rozsah pohybů kabiny byl realistický. Na obr. 5 a 6 jsou znázorněny ZOOM spektra bez úprav a s odfiltrováním složek do 0,5 Hz. Je zřejmé, že v tomto pásmu se nevyskytuje žádná rezonanční složka, kterou lze spojovat s karoserií, kabinou nebo nápravou vozidla. Spektrum výchylek po integraci je znázorněno na obr. 7 a 8 s logaritmickou svislou osou. Tento obrázek dokumentuje neodůvodněnou složku spektra dominující v pásmu tepelného šumu akcelerometru.



Obr. 7 ZOOM dvakrát integrovaného spektra z obr. 4

Obr. 8 ZOOM dvakrát integrovaného spektra z obr. 6 bez složek s frekvencí do 0,5 Hz

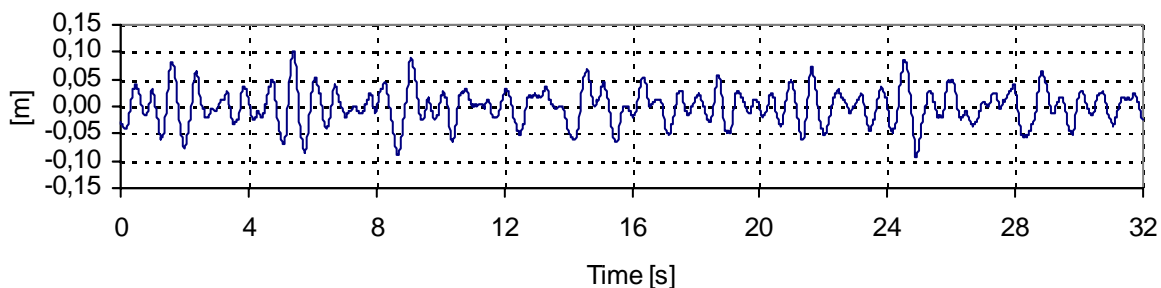
Jestliže se dříve popsaným způsobem nevyloučí ze spektra pásmo v rozsahu do 0,5 Hz, pak výsledkem integrace je časový průběh pohybu kabiny znázorněný na obr. 9. Naproti tomu spektru z obr. 6 odpovídá časový průběh výchylek podlahy kabiny znázorněný na obr. 10.



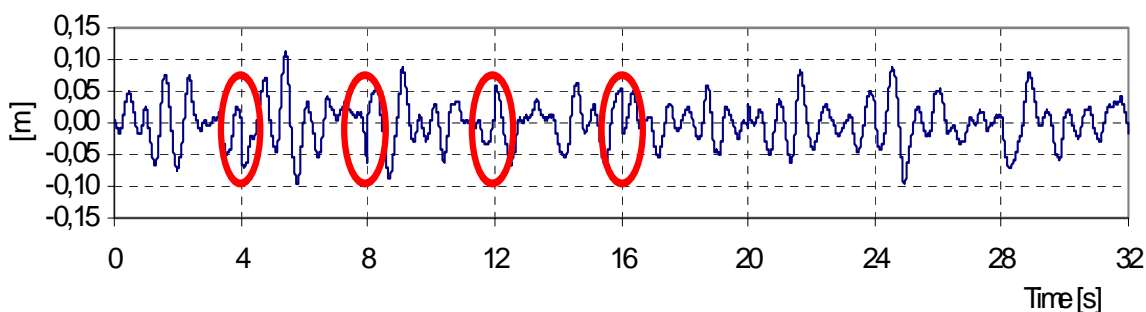
Obr. 9 Časový průběh výchylky po dvojitě integraci signálu zrychlení bez úpravy frekvenčního spektra signálu

Délka celé dráhy je 400 m. Jak již bylo uvedeno, časový úsek záznamu o velikosti 32 s odpovídá uletí více než poloviny dráhy. Integrace celého časového záznamu lze provést tak, že se záznam rozdělí do většího počtu segmentů, pro které se provede integrace zvlášť. Na obr. 11 je uveden příklad výpočtu z 4sekundových segmentů o délce 1024 vzorků s vyhlazením spojů dolnoproputným filtrem 20 Hz. V místech spojení segmentů, která jsou v tomto obrázku zvýrazněna, jsou zřejmé skoky. Na obr. 12 je demonstrováno spojení segmentů o délce 512 vzorků v druhé sekundě a použití různých dolnoproputných filtrů, a to 3 Hz a 10 Hz.

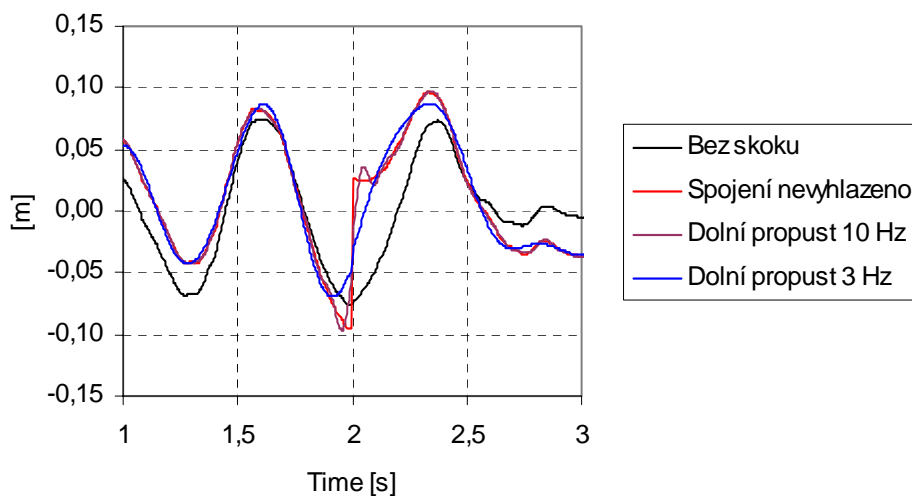
V případě, že výsledný signál je použit k řízení elektrohydraulického zatěžovacího stroje, pak omezení frekvenčního rozsahu je zdůvodnitelné přenosovými vlastnostmi hydraulických válců. Jiným řešením propojení segmentů pro řízení elektrohydraulického zatěžovacího stroje je plynulé utlumení a opětovný náběh řídicího signálu například s modulační funkcí podobnou Hanningovu časovému oknu.



Obr. 10 Časový průběh výchylky po dvojitě integraci signálu zrychlení s úpravou spektra signálu (odfiltrování složek od 0 do 0,5 Hz)



Obr. 11 Časový průběh výchylky po dvojitě integraci signálu zrychlení složený ze 2sekundových segmentů (místa spojení segmentů jsou zvýrazněna)

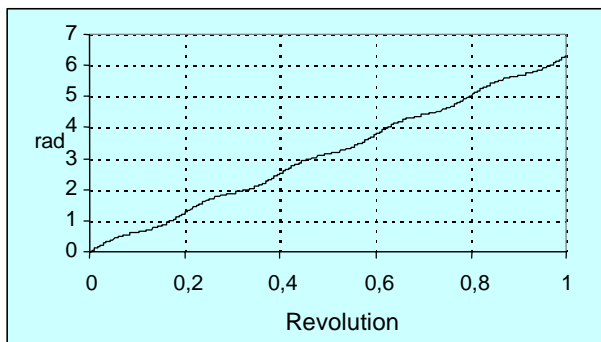


Obr. 12 Skoky ve spojení segmentů s různě filtrovaným signálem

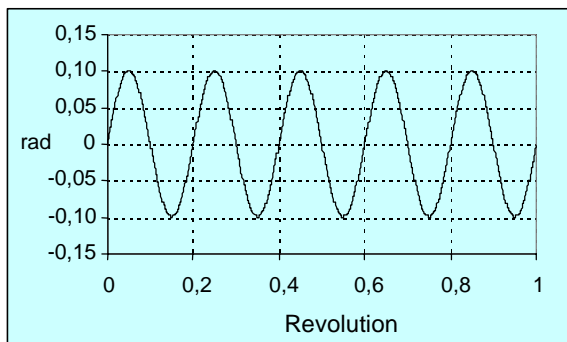
5. Příklad dvojitě derivace vzorkovaného signálu

Výsledkem fázové demodulace impulsního signálu je závislost úhlu otočení na čase [Tůma, 1997]. Rovnoměrnému otáčení odpovídá s časem lineárně narůstající úhel otočení. Jestliže dochází k úhlovým kmitům ze rotace, není nárůst úhlu otočení v čase lineární, ale kolísá kolem lineárně vzrůstajícího úhlu. Příklad časového průběhu narůstajícího úhlu otočení je uveden na obr. 13 a příklad extrahovaných odchylek úhlu je na obr. 14. Místo časové osy je použita stupnice v počtech otočení, jejíž dělení je v čase lineární. Tento způsob přepočtu

kompenzuje měnící se průměrnou rychlost otočení. Časový průběh odchylky je považován za úhlové kmity za rotace. Odchytky úhlu mají nulovou střední hodnotu.

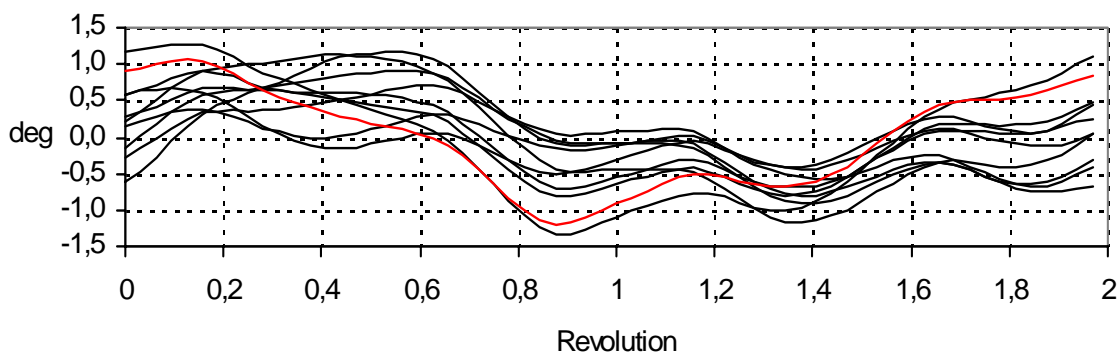


Obr. 13 Úhel otočení v závislosti na čase



Obr. 14 Kolísání úhlu otočení v závislosti na čase

K demonstraci dvojité derivace časového průběhu odchylek úhlu otočení podle času je použito měření úhlových kmitů 4taktního a 4válcového zážehového motoru osobního automobilu za volnoběhu. Kolísání úhlu otočení za 10 dvojitáček je znázorněno na obr. 15. Pro fázovou demodulaci bylo použito pásmo do 6 order od nosné složky. Na obr. 16 je znázorněno spektrum amplitud složek po Fourierově transformaci. Měřítka pro amplitudy je úhlových stupních a měřítko pro frekvenční osu je v order, tj. v násobcích základní průměrné rychlosti otáčení. Ve spektru úhlových výchylek dominují nízkofrekvenční složky, zatímco vysokofrekvenční složky nad 6 order jsou zanedbatelné.



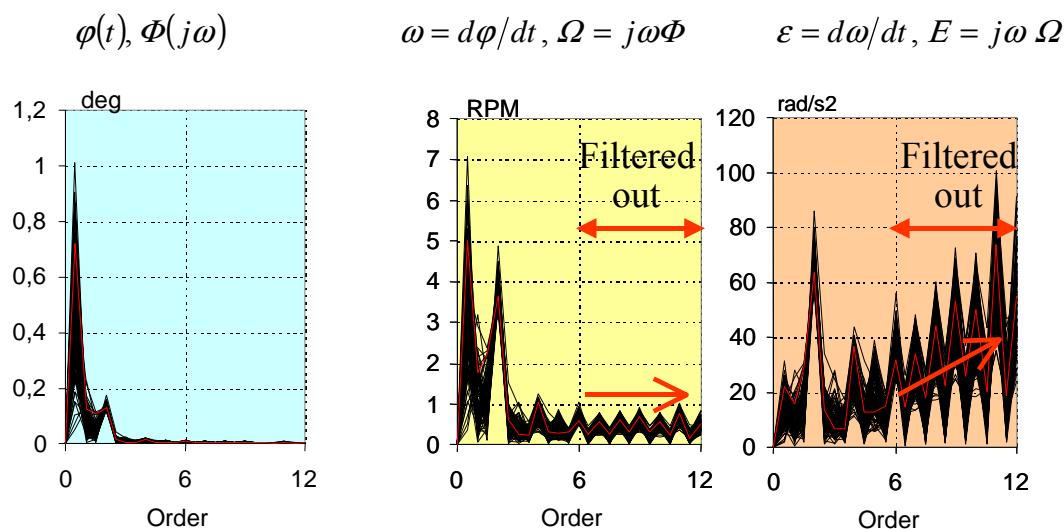
Obr. 15 Časový průběh úhlové rychlosti během 10 dvojitáček po integraci úhlových odchylek (odfiltrovány složky na 6 order)

Úhlová rychlost v RPM (otáčky za minutu) se získá násobením Fourierova obrazu úhlových odchylek $\Phi(\omega)$ faktorem $j\omega$, které zesílí vysokofrekvenční složky. V pásmu nad 6 order je zvlněné nenulové pozadí spektra. Patrná je rovněž změna proporcí mezi nízkofrekvenčními složkami, které obsahují užitečnou informaci o úhlovém kmitání za rotace. Opakovaně násobením Fourierova obrazu úhlové rychlosti $\Omega(\omega)$ znovu faktorem $j\omega$ se získá Fourierův obraz úhlového zrychlení. Nad frekvencí 6 order se v tomto případě lineárně s frekvencí zvětší amplituda šumových složek. Vyloučit šum lze tedy jen nulováním složek spektra nad s frekvencí převyšující 6 order.

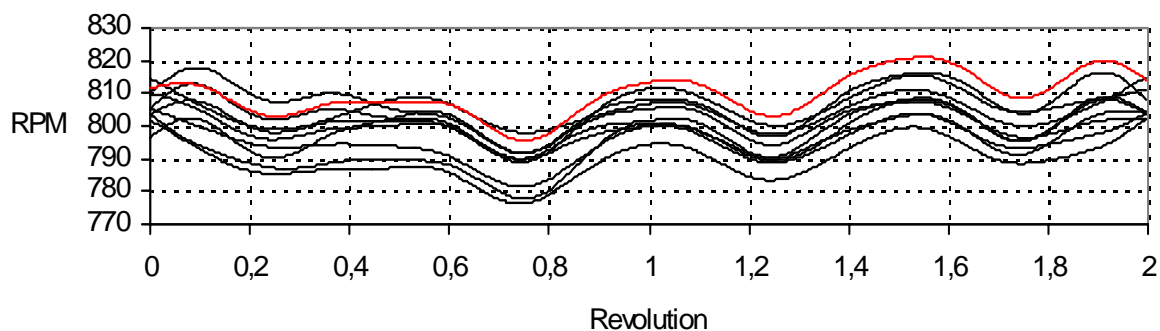
Výsledek výpočtu úhlové rychlosti v otáčkách za minutu metodou derivování časového průběhu úhlových výchylek podle času je znázorněn na obr. 17. Časová osa je v otočeních.

Úplnému cyklus čtyřtaktu odpovídají dvě otáčky motoru. V diagramu je zakresleno celkem 10 dvojotáček přes sebe.

Výsledek výpočtu kolísání úhlového zrychlení metodou druhé derivace časového průběhu úhlových výchylek podle času za dvojotáčku je znázorněn na obr. 18. V časovém průběhu lze pozorovat čtyři zpomalení vlivem komprese směsi ve válcích a čtyři fáze zrychlení vlivem spalovacího tlaku při hoření paliva včetně anomálie vznikající v prvním válci a velkého rozptylu maxim amplitud zrychlení ve všech válcích. V komentáři k výsledkům je třeba si uvědomit, že záznamy obsahují frekvenční složky jen do šesté harmonické frekvence otáček, tj. do třetí harmonické frekvence zápalů paliva ve válcích (dvakrát za otáčku).

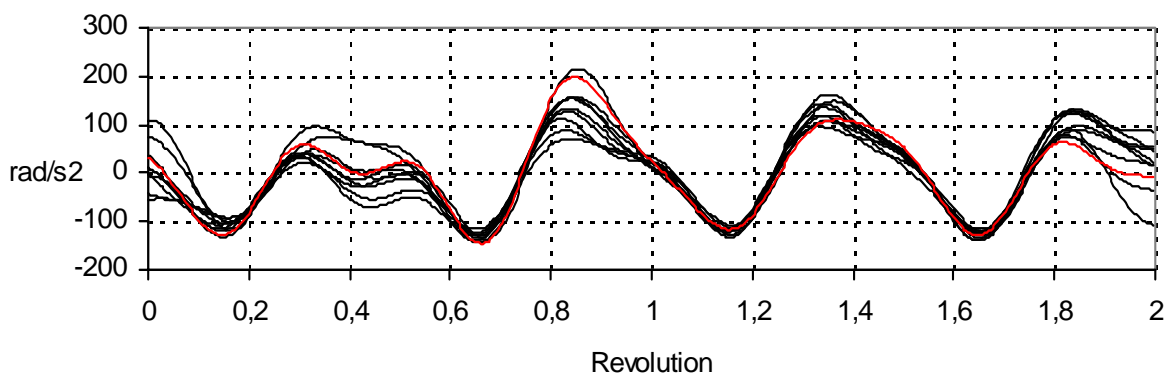


Obr. 16 Spektrum kolísání úhlu otočení, úhlové rychlosti a zrychlení

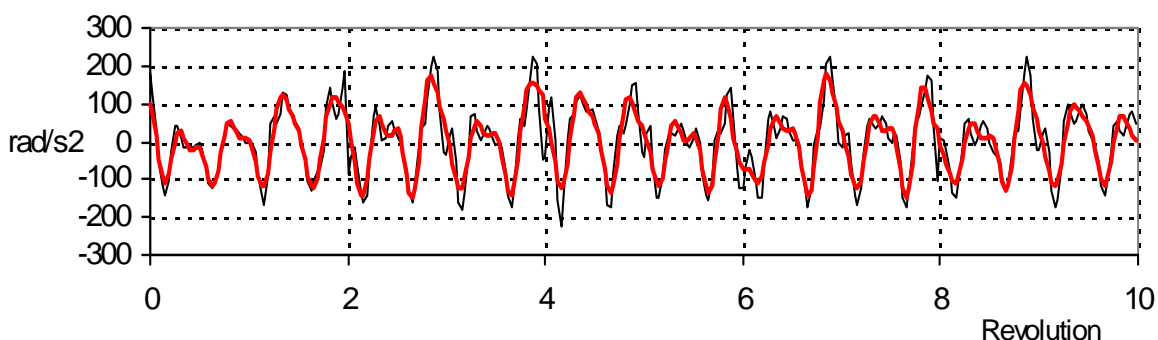


Obr. 17 Časový průběh úhlové rychlosti během 10 dvojotáček po integraci úhlových odchylek (odfiltrovány složky na 6 order)

V posledních dvou obrázcích byly časové průběhy úhlové rychlosti kresleny přes sebe, což lze zdůvodnit potřebou zjistit rozsah změn zrychlení v jednotlivých pracovních fázích motoru. Pro jiné důvody může být požadováno kreslit časové průběhy za sebou. Výpočty probíhají však po segmentech odpovídajících dvojotáčce a vznikne problém skoků mezi navazujícími segmenty. Řešení tohoto problému spočívá ve vyhlazení míst spojení filtrací dat. Výhodné se jeví proto použití metody vysokorychlostní konvoluce jako v příkladu s integrací záznamu zrychlení. V obr. 19 je časový průběh pěti dvojotáček následujících bezprostředně za sebou nevyhlazený ve spojích (kresleno černě) a průběh vyhlazený (červeně).



Obr. 18 Časový průběh úhlového zrychlení během 10 dvojitáček po dvojitě integraci úhlových odchylek (odfiltrovány složky na 6 order)



Obr. 19 Časový průběh úhlového zrychlení po dvojitě integraci úhlových odchylek během 5 po sobě jdoucích dvojitáček

6. Závěr

Referát popisuje postup integrování a derivování signálů pomocí rychlé Fourierovy transformace, tj. ve frekvenční oblasti dělením nebo násobením faktorem $j\omega$. Protože ve vzorkovaných záznamech je obsažen měřicí šum, je signál ve frekvenční oblasti filtrován vynulováním vhodných složek spektra. Pro integraci je nezbytné vyloučit složky spektra ve frekvenčním pásmu počínaje nulou. Naproti tomu derivace vyžaduje filtrovat vysokofrekvenční složky. V obou případech jsou tyto složky silně zesilovány a překryjí užitečné čístejší signálu.

Litertura

[Tůma, 1997] Tůma, J.: Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT. Sdělovací technika, Praha 1997.

PODĚKOVÁNÍ Výzkum byl proveden na katedře Automatizační techniky a řízení Fakulty strojní, VŠB – Technické univerzity Ostrava jako součást prací na řešení grantového projektu „Identifikace vibračního účinku na lidské tělo v obecném směru a jeho aktivní potlačení“ č. 101/02/0175/A GAČR České republiky. Některé poznatky vyplynuly rovněž z práce pro průmyslové podniky, jmenovitě ŠKODA-Auto a.s. a TATRA a.s..