

NUMERICAL SIMULATION OF SELF-OSCILLATIONS OF HUMAN VOCAL FOLDS BASED ON AEROELASTIC THEORY

J. Horáček*, P. Šidlof**

Summary: *Linear two degrees of freedom aeroelastic system for modelling vibrations of human vocal folds was originally developed by which the physiological conditions for so-called phonation thresholds were modelled. The thresholds are given by aeroelastic instabilities of divergence or flutter type. Afterwards the model was generalised taking into account the non-linear aerodynamic terms, important for small glottal openings and large vibration amplitudes. Now, after adding the Hertz's contact model for the impacts of the vocal folds into the developed aeroelastic model a complete numerical simulation of self-oscillations of the vocal folds during phonation is made possible.*

1. Úvod

Lidský hlas vzniká v důsledku aeroelastické interakce mezi vzduchem proudícím z plic a elastickou tkání hlasivek. Takto vzniklé samobuzené oscilace hlasivek vybudí fluktuace tlaku, které jsou dále formovány vokálním traktem. Tím a na základě dalších faktorů, jako je přetlak v plicích, napětí hlasivek a tvar ústní dutiny, vznikají různé hlásky a tóny.

Původně vyvinutý lineární aeroelastický model kmitání lidských hlasivek (Horáček & Švec, 2002a) postihuje podmínky pro vznik fonace. Tzv. práh fonace je modelován vznikem aeroelastické nestability typu divergence nebo flutteru. Numerické výpočty byly prováděny na několika modelech, které se vzájemně lišily zejména tvarem matice tuhosti (Horáček & Švec, 2002b). Nedávno byla původní lineární teorie, která byla omezena pouze na malé výchylky hlasivky, rozšířena tak, že jsou respektovány i nelineární složky aerodynamických sil (Horáček & Šidlof, 2002). Do tohoto modelu byl nyní nově začleněn i model rázů hlasivek, což umožňuje numericky simulovat samobuzené kmity hlasivek. Model byl implementován v prostředí *Mathematica* a k výpočtům byl využit superpočítač IBM-SP2 Centra intenzivních výpočtů VIC ČVUT.

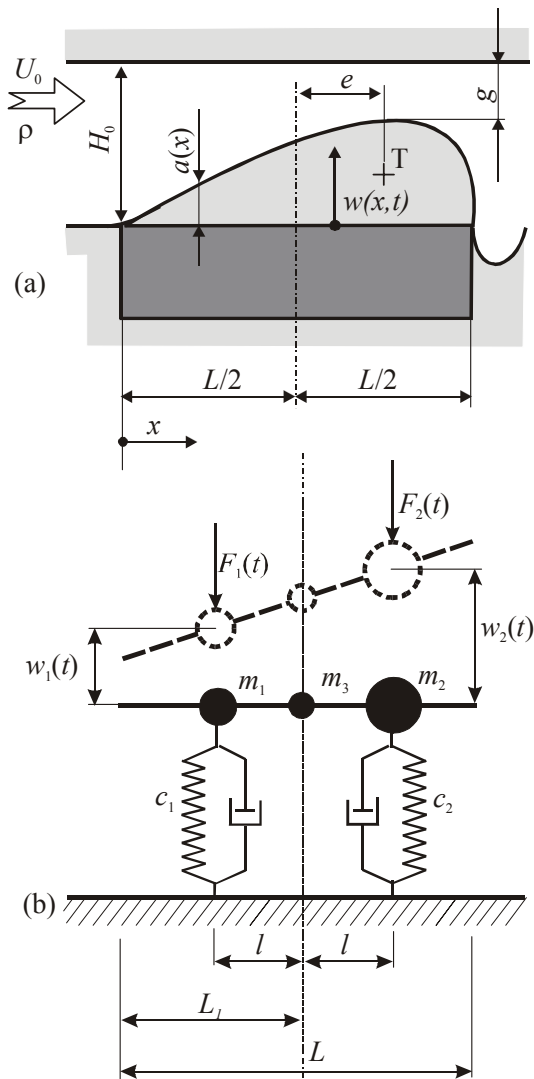
2. Aeroelastický model hlasivek

Model je schematicky znázorněn na obr. 1. Tuhý profil, tvořící povrch modelované hlasivky, je definován funkcí $a(x)$. Profil je umístěn ve stěně kanálu o počáteční výšce H_0 a je obtékán

*) Ing Jaromír Horáček, DrSc.: Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, tel.: 4202 865890383, fax: 4202 86584695, e-mail: jaromirh@it.cas.cz

***) Petr Šidlof, FJFI-ČVUT v Praze, Katedra materiálů, Trojanova 13, 120 00 Praha 2, e-mail: sidlof@kmlinux.fjfi.cvut.cz

vzduchem o hustotě ρ , který má na vstupu rychlost U_0 ; $\tilde{p}(x,t)$ je poruchový aerodynamický tlak způsobený výchylkou $w(x,t)$ profilu; t je čas a x podélná souřadnice. Pro výpočet je hlasivka o hmotnosti m nahrazena ekvivalentním tříhmotovým systémem. Kmitající tuhé



Obr. 1 - Model hlasivky a náhradní mechanický tříhmotový systém

těleso o hmotnosti m s momentem setrvačnosti I a těžištěm T ve vzdálenosti e od osy je uloženo na pružném podloží o délce L , modelovaným dvěma pružinami s tuhostmi pružin c_1 a c_2 , a dvěma tlumiči umístěnými pod náhradními hmotami m_1 a m_2 . Výchylku profilu lze rozepsat jako

$$w(x,t) = (x - L_1) \frac{w_2(t) - w_1(t)}{2l} + \frac{w_2(t) + w_1(t)}{2}, \quad (1)$$

kde $w_1(t)$ a $w_2(t)$ jsou výchylky náhradních hmot m_1 a m_2 , $2l$ je vzdálenost mezi těmito hmotami a L_1 je vzdálenost třetí náhradní hmoty m_3 od náběžné hrany (viz obr. 1b). Tvar povrchu $a(x)$ a délka L jsou zhruba dány anatomii skutečné hlasivky, vzdálenost l je libovolná ($0 < l < L/2$) a lze ji využít k naladění modelu.

2.1 Pohybové rovnice mechanického modelu

Pohybové rovnice lze psát v maticovém tvaru

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{V} + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

kde $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{K}}$ a $\bar{\mathbf{B}}$ jsou matice hmotnosti, tuhosti a proporcionálního tlumení:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} -lm_1 & m_1 + \frac{m_3}{2} \\ +lm_2 & m_2 + \frac{m_3}{2} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -c_1 l & c_1 \\ +c_2 l & c_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \varepsilon_1 \bar{\mathbf{M}} + \varepsilon_2 \bar{\mathbf{K}}, \quad (4)$$

ε_1 , ε_2 jsou koeficienty využitelné pro ladění modelu (Horáček & Švec, 2002a); vektor \mathbf{F} vyjadřuje působení aerodynamických (hlasivka je otevřena) nebo rázových (hlasivka je uzavřena) sil a vektor \mathbf{V} představuje rotaci a posuv náhradního systému:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$V_1(t) = \frac{w_2(t) - w_1(t)}{2l}, \quad V_2(t) = \frac{w_2(t) + w_1(t)}{2}. \quad (6)$$

2.2 Aerodynamické síly působící na kmitající těleso

Popis proudového pole je zjednodušen na nestacionární 1-D proudění ideální nestlačitelné tekutiny v kanálu obdélníkového průřezu šířky $h = \text{const}$ a výšky $H(x, t)$. Proudění je popsáno Eulerovou rovnicí a rovnicí kontinuity:

$$\rho \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \rho U(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho h H(x, t) \Delta x)}{\partial t} = (\rho U(x, t) h H(x, t))_x - (\rho U(x, t) h H(x, t))_{x+\Delta x}. \quad (8)$$

Rychlost proudění $U(x, t)$ a tlak $P(x, t)$ jsou složeny z ustálené a poruchové části:

$$U(x, t) = \bar{U}_0(x) + \tilde{u}(x, t), \quad P(x, t) = P_0(x) + \tilde{p}(x, t) \quad (9)$$

a výška $H(x, t)$ se dle obr. 1 předpokládá ve tvaru

$$H(x, t) = H_0 - w(x, t) - a(x). \quad (10)$$

Ve skutečnosti zde tedy nepočítáme s kmitáním profilu jako tuhého celku, neboť při naklápění uvažujeme malé změny tvaru hlasivky vyjádřené superpozicí funkce $a(x)$ a lineární funkce w .

Dosadíme-li vztahy (9) do rovnice (7), lze odtud po integraci a s použitím Bernoulliho rovnice: $\frac{1}{2} \rho \bar{U}_0^2(x) + P_0(x) = \text{const}$. po zavedení potenciálu rychlosti $\tilde{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ vyjádřit poruchový tlak, vzhledem k potenciálu v nelineárním tvaru (Horáček & Šidlof, 2002):

$$\tilde{p}(x, t) = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_0(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Předpokládáme-li nulové poruchy rychlosti na vstupu a nulové poruchy tlaku na výstupu:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0} \quad \text{a} \quad \tilde{p} = 0 \Big|_{x=L}, \quad (12)$$

lze po složitějších výpočtech (viz – Horáček & Šidlof, 2002; Horáček & Švec 2002a,b) vyjádřit poruchový tlak ve tvaru:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, t) = & -\rho \{ K_1(x) [V_1(t)]^2 + K_2(x) V_2(t) + K_3(x) [V_2(t)]^2 + K_4(x) [V_1'(t)]^2 + \\ & K_5(x) V_2'(t) + K_6(x) V_2(t) V_2'(t) + K_7(x) [V_2'(t)]^2 + \\ & K_8(x) V_1'(t) + K_9(x) V_1'(t) V_1(t) + K_{10}(x) V_1'(t) V_2(t) + \\ & K_{11}(x) V_1'(t) V_2'(t) + K_{12}(x) V_1(t) + K_{13}(x) V_1(t) V_2(t) + \\ & K_{14}(x) V_1(t) V_2'(t) + K_{15}(x) V_1''(t) + K_{16}(x) V_2''(t) \}, \end{aligned} \quad (13)$$

kde koeficienty $K_i(x)$ ($i=1,2,\dots,16$) lze nalézt ve výše uvedených pracích. Integrací tlaku pak dostáváme pro složky vektoru \mathbf{F} ekvivalentních aerodynamických sil vztahy:

$$F_1(t) = \frac{h}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{l} + \frac{L_1}{l} \right) \tilde{p}(x, t) dx, \quad F_2(t) = \frac{h}{2} \int_0^L \left(1 + \frac{x}{l} - \frac{L_1}{l} \right) \tilde{p}(x, t) dx, \quad (14)$$

$$F_1(t) = -\rho \{ K_1^{int1} [V_1(t)]^2 + K_2^{int1} V_2(t) + K_3^{int1} [V_2(t)]^2 + K_4^{int1} [V_1'(t)]^2 + K_5^{int1} V_2'(t) + \\ K_6^{int1} V_2(t) V_2'(t) + K_7^{int1} [V_2'(t)]^2 + K_8^{int1} V_1'(t) + K_9^{int1} V_1'(t) V_1(t) + K_{10}^{int1} V_1'(t) V_2(t) + \\ K_{11}^{int1} V_1'(t) V_2'(t) + K_{12}^{int1} V_1(t) + K_{13}^{int1} V_1(t) V_2(t) + K_{14}^{int1} V_1(t) V_2'(t) + K_{15}^{int1} V_1''(t) + K_{16}^{int1} V_2''(t) \}, \quad (15)$$

$$F_2(t) = -\rho \{ K_1^{int2} [V_1(t)]^2 + K_2^{int2} V_2(t) + K_3^{int2} [V_2(t)]^2 + K_4^{int2}(x) [V_1'(t)]^2 + K_5^{int2} V_2'(t) + \\ K_6^{int2} V_2(t) V_2'(t) + K_7^{int2}(x) [V_2'(t)]^2 + K_8^{int2} V_1'(t) + K_9^{int2} V_1'(t) V_1(t) + \\ K_{10}^{int2}(x) V_1'(t) V_2(t) + K_{11}^{int2} V_1'(t) V_2'(t) + K_{12}^{int2} V_1(t) + K_{13}^{int2} V_1(t) V_2(t) + \\ K_{14}^{int2}(x) V_1(t) V_2'(t) + K_{15}^{int2} V_1''(t) + K_{16}^{int2} V_2''(t) \}, \quad (16)$$

kde

$$K_i^{int1} = h \int_0^L K_i(x) \left(\frac{l+L_1}{2l} - \frac{x}{2l} \right) dx \quad \text{a} \quad K_i^{int2} = h \int_0^L K_i(x) \frac{l-L_1+x}{2l} dx, \quad i=1, \dots, 16. \quad (17)$$

2.2 Hertzův model pro rázy hlasivek

Síly působící na hlasivky při jejich kontaktu modelujeme na základě Hertzovy teorie rázu. Ta předpokládá, že kontaktní síla F_H mezi dvěma narážejícími koulemi je dána vztahy (Půst, 1999 a 2003):

$$F_H = \bar{k}_H z^{3/2} \quad \text{pro } z > 0, \quad F_H = 0 \quad \text{pro } z \leq 0, \quad (18)$$

kde \bar{k}_H je Hertzův koeficient a z je přiblížení středů koulí. Hertzův model v této nejjednodušší formě nepostihuje disipaci energie při rázu.

Tvar hlasivky, který je dán funkcí $a(x)$, lze v místě kontaktu aproximovat kulovou plochou s lokálním poloměrem křivosti:

$$1/r = a''(x) / \{1 + [a'(x)]^2\}^{3/2}. \quad (19)$$

V symetrickém případě, kde označíme $y = z/2$ přiblížení středu jedné koule (pevného bodu hlasivky) k rovině kontaktu, lze koeficient k_H určit pomocí vzorce (Brepta, 1977):

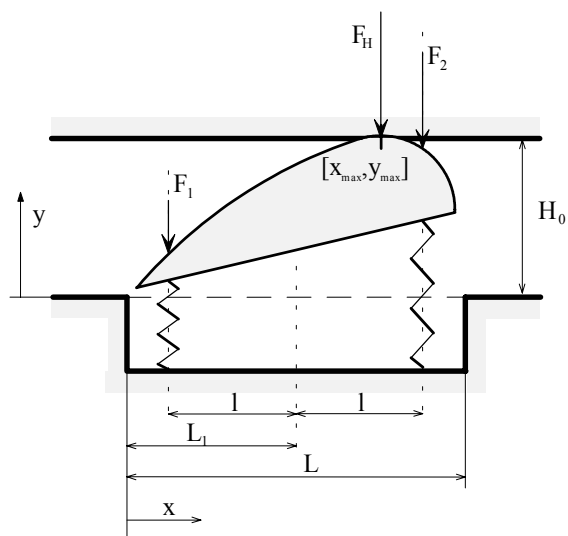
$$F_H = k_H y^{3/2} = \left(\frac{y}{\alpha} \right)^{3/2}, \quad \text{kde} \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{9(1-\mu^2)^2}{2rE^2}}, \quad (20)$$

E je modul pružnosti a μ Poissonovo číslo materiálu. Pro materiálové konstanty $E = 8 \text{ kPa}$, $\mu = 0.4$ (Berry & Titze, 1996; De Vries et. al, 1999) lze vypočítat $k_H \approx 730 \text{ N m}^{-2/3}$.

Vektor sil \mathbf{F} v pohybové rovnici (2) je pro případ rázu dán rozkladem Hertzovy síly F_H do dvou sil působících v místech pružin (viz obr.2). Za působíště kontaktní síly F_H považujeme bod $[x_{\max}, y_{\max}]$. Ten podle obr. 1, 2 a vztahů (1) a (6) leží v maximu funkce:

$$y(x) = a(x) + w(x, t) = a(x) + (x - L_1) V_1 + V_2, \quad x \in \langle 0, L \rangle, \quad (21)$$

kteřá popisuje y-souřadnici povrchu hlasivky. Ve výpočtech byl tvar hlasivky aproximován parabolickou funkcí:



Obr.2 – Rozklad Hertzovy síly

$$a(x) = a_0 + a_1(x) + \frac{a_2}{2}x^2. \quad (22)$$

Vyhledáním maxima funkce (21) na intervalu $\langle 0, L \rangle$ dostáváme

$$x_{\max} = \min\left(L, \max\left(0, -\frac{V_1 + a_1}{a_2}\right)\right), \quad (23)$$

$$y_{\max} = y(x_{\max}) = a(x_{\max}) + (x_{\max} - L_1)V_1 + V_2.$$

Z podmínky silové a momentové rovnováhy lze nyní snadno psát

$$F_1 = F_H \frac{L_1 + l - x_{\max}}{2l}, \quad (24)$$

$$F_2 = F_H \frac{x_{\max} - L_1 + l}{2l},$$

kde velikost Hertzovy síly je v souladu s rovnicí (20) dána vztahem

$$F_H = k_H (y_{\max} - H_0)^{3/2}. \quad (25)$$

2.3 Korekce sil při rázu hlasivek na statický přetlak z plíc

V době uzavření hlasivky lze kromě Hertzovy uvažovat i působení konstantního statického přetlaku z plíc p_{sub} podél náběžné části hlasivky v intervalu $x \in \langle 0, x_{\max} \rangle$ (viz. obr. 2). Z Bernoulliho rovnice a rovnice kontinuity lze tento tlak vyjádřit vztahem:

$$p_{sub} = \frac{\rho}{2} U_0^2 \left(\frac{a(L)}{H_0 - a(L)} \right)^2, \quad \text{kde } H_0 = \max_{0 \leq x \leq L} (a(x)) + g, \quad (26)$$

což např. pro náběžnou rychlost $U_0 = 2.8 \text{ m s}^{-1}$, $g = 0.3 \text{ mm}$, $L = 6.8 \text{ mm}$ a funkci $a(x)$ danou rovnicí (29) dává $p_{sub} = 621 \text{ Pa}$. Integrací a rozložením sil do působišť dostáváme výsledný výraz pro síly působící na uzavřenou hlasivku:

$$F_1 = F_H \frac{L_1 + l - x_{\max}}{2l} + p_{sub} h x_{\max} \frac{L_1 + l - x_{\max}}{2l}, \quad F_2 = F_H \frac{x_{\max} - L_1 + l}{2l} + p_{sub} h x_{\max} \frac{x_{\max} - L_1 + l}{2l}. \quad (27)$$

3. Numerická simulace kmitání hlasivky v časové oblasti

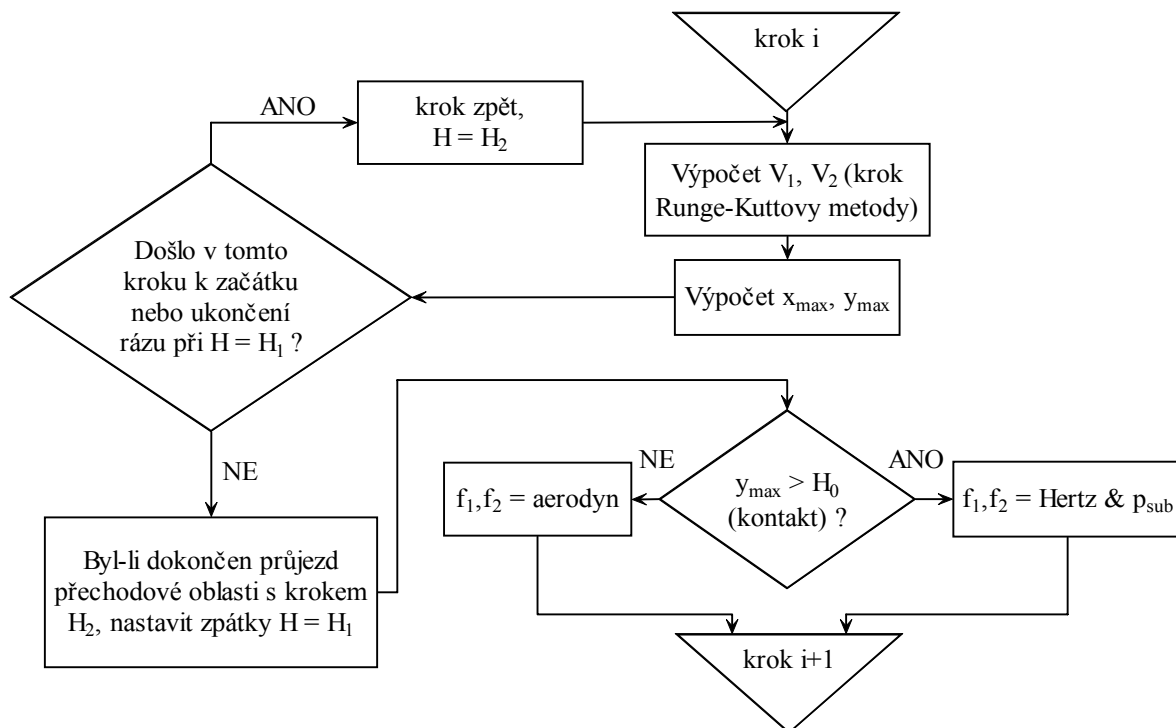
Pro numerické simulace byla použita Runge-Kuttova metoda 4. řádu. Při kontaktu hlasivek dochází k výměně pravé strany pohybové rovnice - od aerodynamických sil (14) přecházíme k Hertzovým silám kombinovaným s působením statického přetlaku (27). Pravá strana rovnice je tedy nespojitá a kvůli přesnějšímu zachycení těchto přechodových oblastí je nutné v okamžiku začátku a konce kontaktu hlasivek zjemnit krok metody.

Pohybová rovnice (2) není lineární, neboť aerodynamické síly (15), (16) obsahují kromě derivací výchylek $V_i(t)$ také jejich mocniny a vzájemné součiny a v Hertzových silách (25) je

implicitně zahrnuje vyhledávání maxima funkce. Aby bylo možné numericky řešit nelineární soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, musí být tyto rovnice řešitelné alespoň vzhledem k nejvyšším derivacím. Aerodynamický i Hertzův člen našťastí jsou lineární ve druhých derivacích a po substitucích $V_1'(t) = Z_1(t)$, $V_2'(t) = Z_2(t)$ lze převést soustavu rovnic do tvaru

$$\begin{aligned} Z_1' &= f_1(Z_1, Z_2, V_1, V_2) \\ Z_2' &= f_2(Z_1, Z_2, V_1, V_2) \\ V_1' &= Z_1, \quad V_2' = Z_2, \end{aligned} \quad (28)$$

kde funkce f_1, f_2 je nutné stanovit zvlášť pro případ bez kontaktu (aerodynamické síly) a s kontaktem (Hertzovy síly a statický přetlak). Označíme-li aktuální krok metody H , hrubý krok H_1 a jemný krok v rázu H_2 , můžeme numerické schéma znázornit v obr. 3.



Obr.3 – Numerické schéma pro řešení kmitání hlasivky s rázem

Po zadání počátečních podmínek pro funkce V_i a jejich první derivace lze v softwaru *Mathematica* spustit numerickou simulaci kmitů, která umožňuje dva režimy. V prvním řešíme diferenciální rovnice na předem zadaném časovém intervalu a uchováujeme celá řešení $w_1(t)$, $w_2(t)$, z nichž lze dodatečně vypočítat další charakteristiky jako průběhy subglotického tlaku $p_{per}(t)$ nebo plochy v glottis $S(t)$. Tento režim je vhodný i pro analýzu přechodových dějů při rozkmitávání hlasivky.

Pro sledování vývoje kmitů v neomezeném čase byl v prostředí *Borland C++Builder* naprogramován software, který komunikuje s výpočetním jádrem *Mathematica*, přejímá od něj průběžně výsledky numerické simulace a tato data zobrazuje na časové ose a ve fázové rovině. Výpočet může běžet libovolnou dobu, přičemž je možné měnit za běhu některé parametry, např. náběžnou rychlost U_0 . Za komunikační protokol lze zvolit protokol TCP/IP.

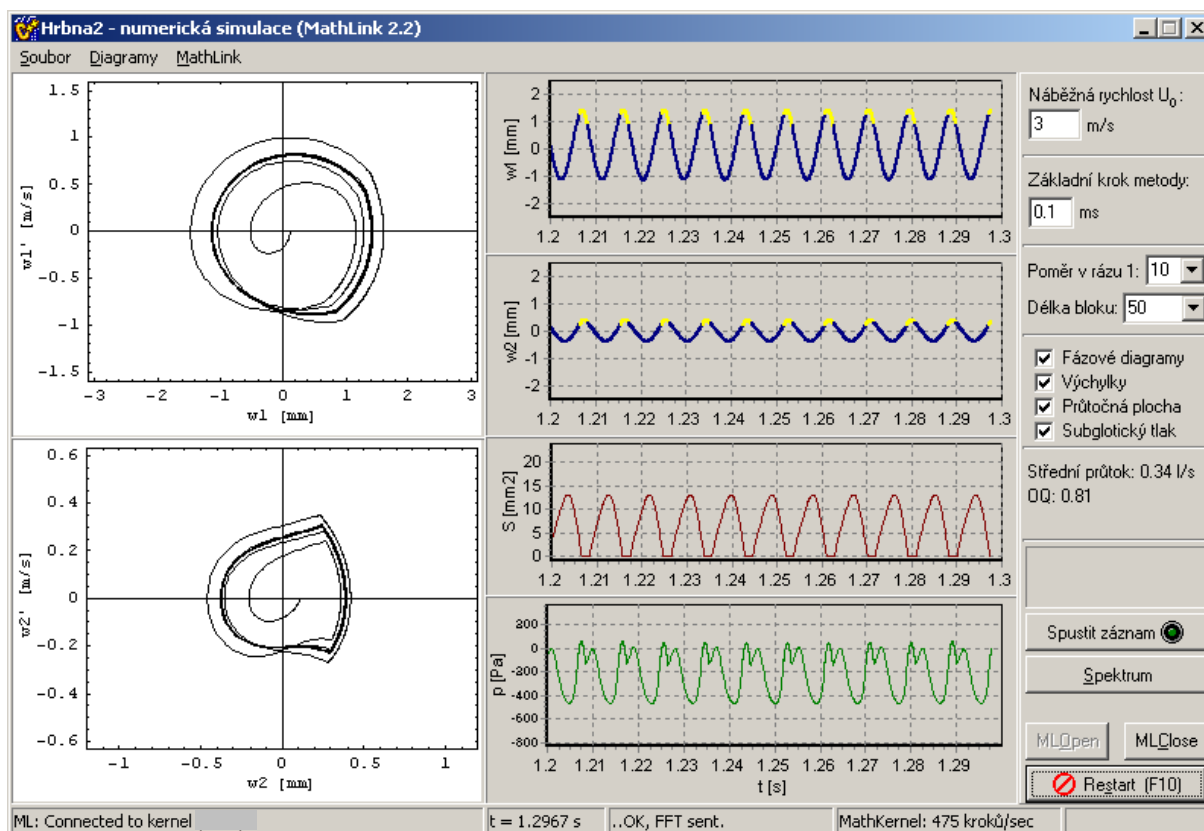
Díky tomu je možné z libovolného stroje připojeného k Internetu, na němž chceme sledovat výsledky, využívat výpočetní jádro *Mathematica* spuštěné na vzdáleném výkonném počítači.

Na výstupech programu (viz obr. 4, 6, 8) můžeme ve fázové rovině určit charakter pohybu (periodický, kvaziperiodický, popř. chaotický). Na časových závislostech výchylek $w_1(t)$, $w_2(t)$ jsou barevně odlišeny úseky, kde je hlasivka v rázu. Z grafu $S(t)$ průtočné plochy v glottis program automaticky vypisuje poměr doby uzavření a otevření hlasivky. Poslední graf je časová závislost subglotického tlaku $\tilde{p}(0,t)$, z kterého je možné vypočítat spektrum.

Pro numerické výpočty byla použita shodná data jako v předchozích publikacích (Horáček & Švec, 2002b, Horáček & Šidlof, 2002). Tvar hlasivky byl aproximován parabolickou funkcí

$$a(x) = -159.861(x - 5.812 \cdot 10^{-3})^2 + 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \quad (29)$$

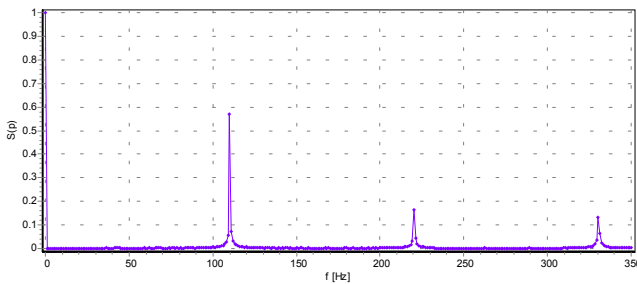
a dále byla zvolena délka $L = 6.8$ mm, šířka $h = 10$ mm a hustota $\rho = 1.2$ kg/m³. Z těchto dat byla vypočítána excentricita $e = 0.771061$ mm, hmotnost $m = 0.26731$ g a moment setrvačnosti $I = 1.306 \cdot 10^{-9}$ kg m².



Obr.4 – Numerická simulace samobuzených kmitů hlasivek pro $g = 0.3$ mm, $U_0 = 3$ m s⁻¹

Pro poměr $l/L = 0.34425$ byly naladěním na vlastní frekvence $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 130$ Hz získány tuhosti $c_1 = 35$ N m⁻¹, $c_2 = 118$ N m⁻¹ a Hertzův koeficient byl na základě odst.2.2 zvolen $k_H = 730$ N m^{-2/3}. Rychlost proudění U_0 byla odhadnuta na základě glotální objemové rychlosti $Q = U_0 2H_0 h$, která je u dospělého muže $Q \approx 0-0.6$ l/s (Pelorson et. al 1995). Analýza hranic stability linearizovaného systému ve frekvenční oblasti ukazuje, že pro tyto parametry a pro $g = 0.3$ mm dochází při rychlosti $U_{0,krit} \approx 2.115$ m/s k nestabilitě typu flutter, pro $g = 0.5$ mm

vychází kritická rychlost pro flutter $U_{0,krit} \approx 4.135$ m/s. Počáteční podmínky pro nelineární simulaci byly v obou případech zvoleny: $w_1(0) = w_2(0) = 0.1$ mm, $w_1'(0) = w_2'(0) = 0$.

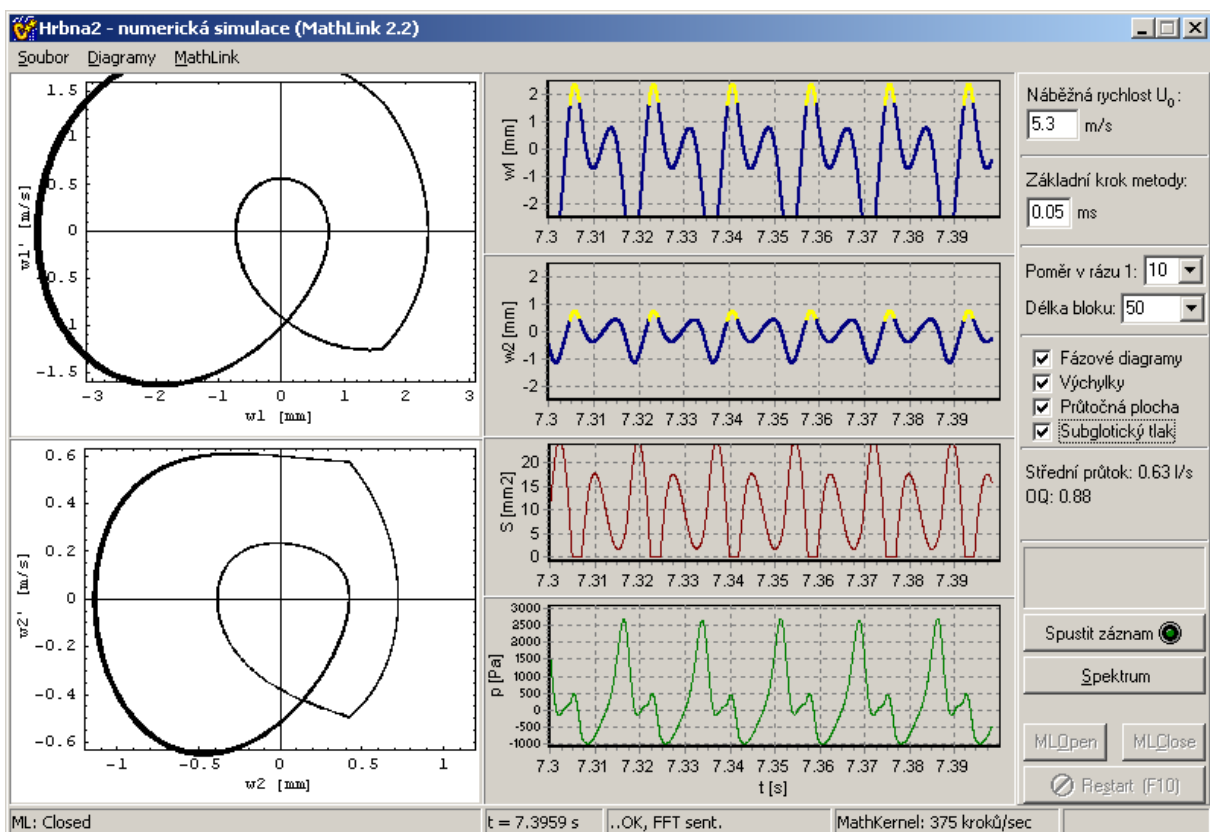


Obr.5 – Spektrum poruchového tlaku k obr.4

Výsledky numerické simulace pro $g = 0.3$ mm a rychlost $U_0 = 3$ m s⁻¹ jsou na obr. 4. Z fázových diagramů je patrné, že systém zde z počáteční výchylky rychle přechází do ustáleného periodického kmitání. Hlasivka naráží v blízkosti pravé pružiny, rázy jsou tedy patrnější na druhém diagramu. Střední průtok Q [l/s], koeficient otevření hlasivky:

$$OQ = \frac{\text{doba otevření hlasivky}}{\text{délka periody}}, \quad (30)$$

i časový průběh průtočné plochy $S(t)$ rámcově souhlasí s klinickými údaji. Ze spektra poruchového tlaku na obr. 5 lze odečíst dominantní frekvenci $f_0 \approx 110$ Hz a vyšší harmonické.

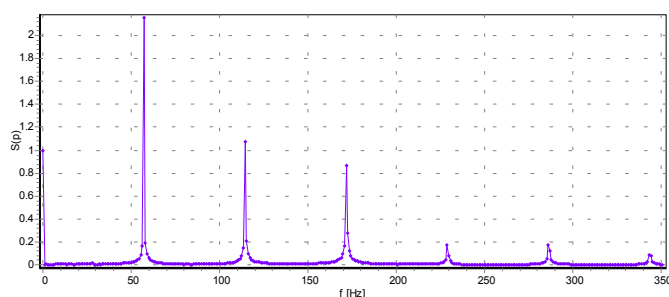


Obr.6 – Numerická simulace samobuzených kmitů hlasivek pro $g = 0.5$ mm, $U_0 = 5.3$ m s⁻¹

Zvětšíme-li velikost poloviny mezihlasivkové štěrbiny na $g = 0.5$ mm, dostáváme pro náběžnou rychlost $U_0 = 5.3$ m s⁻¹ na obr. 6 složitější periodické kmity, kdy k rázu dochází při každém druhém kmitu. Střední průtok Q je už zde na hranici obvyklých fyziologických

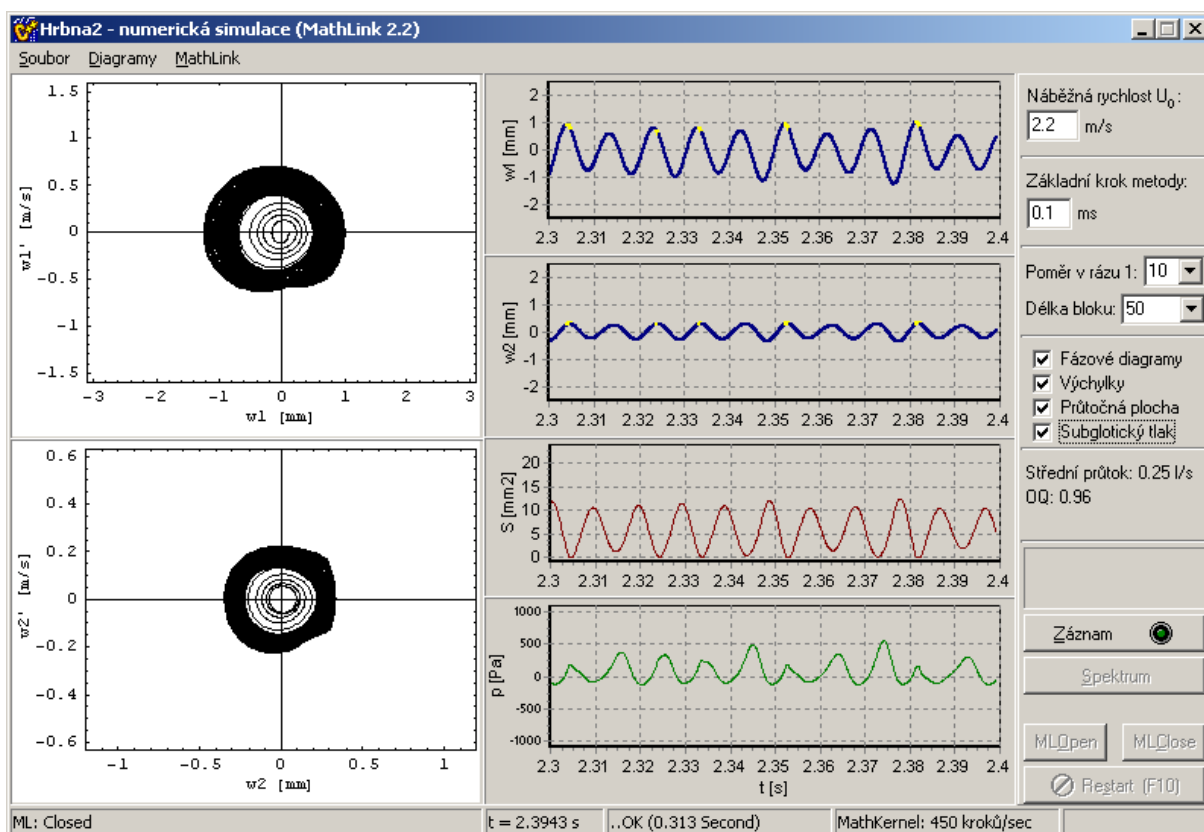
hodnot. Ve spektru na obr. 7 je vidět dominantní subharmonická frekvence $f_{1/2} \approx 56$ Hz, základní frekvence $f_0 \approx 114$ Hz a vyšší harmonické.

Především při větších velikostech mezihlasivkové štěrby g model vykazuje hysterezní chování – při jinak stejných velikostech vstupních parametrů dostáváme různé výsledky v případech, kdy se do stavu dostaneme zvyšováním náběžné rychlosti U_0 a jiné výsledky, dosáhneme-li tohoto stavu snižováním U_0 .



Na posledním příkladu (obr.8) vidíme, že model při určitých vstupních parametrech předpovídá i chaotické chování systému. Křivky ve fázových diagramech zde zaplní část fázové roviny, k rázům dochází nepravidelně, pohyb není periodický – jedná se o deterministický chaos způsobený nelinearitami.

Obr.7 – Spektrum poruchového tlaku k obr.6



Obr. 8 – Numerická simulace chaotických kmitů hlasivek pro $g = 0.3$ mm, $U_0 = 2.2$ m s⁻¹

4. Závěr

Nově vytvořený matematický model umožňuje modelovat samobuzené oscilace hlasivek vyvolané aeroelastickou vazbou mezi vzduchem proudícím z plic člověka a kmitající elastickou tkání. Vstupní i výstupní parametry modelu zhruba odpovídají známým fyziologickým i klinickým údajům. Předností modelu je, že je zcela založen na fyzikální podstatě a jeho parametry mají reálný základ v rozměrech, tvaru a hmotnosti skutečných hlasivek, v geometrii glottis i v aerodynamických charakteristikách jako jsou průtočné množství vzduchu nebo subglotický tlak. Modelu lze tak mimo jiné využít nejen k simulaci vrozených vad a pooperačních stavů, ale i k návrhu umělých hlasivkových náhrad. Předtím je však bezpodmínečně nutné detailně a systematicky zmapovat jeho dynamické vlastnosti v široké oblasti vstupních parametrů a kriticky zhodnotit jejich soulad se známými údaji z foniatrické praxe i literatury.

5. Literatura

- BREPTA, R (1977) *Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech*, skripta FJFI ČVUT, Praha, Vydavatelství ČVUT.
- BERRY, D. A., TITZE, I. R. (1996) Normal modes in a continuum model of vocal fold tissues, *Journal Acoust. Soc. Am.* **100** (5), pp 3345-3354.
- DE VRIES, M. P., SCHUTTE, H. K., VERKERKE, G. J. (1999) Determination of parameters for lumped parameter models of the vocal folds using a finite-element method approach, *Journal Acoust. Soc. Am.* **106** (6), pp. 3620-3628.
- HORÁČEK, J. & ŠVEC, J.G. (2002a) Aeroelastic model of vocal-fold-shaped vibrating element for studying the phonation. *Journal of Fluids and Structures* **16** (7), 931-955.
- HORÁČEK, J. & ŠVEC, J.G. (2002b) Instability boundaries of a vocal fold modelled as a flexibly supported rigid body vibrating in a channel conveying fluid, In: Proc. of the 5th Int. Symp. on FSI, ASME Int. Mech. Eng. Congress, 17-22 Nov. 2002, New Orleans, USA, [ISBN 0-7918-1693-1], paper No 32199, 12 p.
- HORÁČEK, J., ŠIDLOF, P. (2002) Numerické simulace kmitání lidských hlasivek při počátku fonace vlivem aeroelastické nestability, In: Interakce a zpětné vazby'2002 (Ed.: Zolotarev I.), Ústav termomechaniky AV ČR, Praha, Nov. 26-27, 2002, pp. 27-36.
- PELORSON, X., HIRSCHBERG, A., WIJNANDS, A.P.J. & BAILET, H. (1995) Description of the flow through the vocal cords during phonation, *Acta Acustica* **3**, pp. 191-202.
- PŮST, L. (1999) Models of weak stops - application to 2DOF system, In: Pro. of 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Oulu, Finland, June 20-24, 1999, pp. 1607-1612.
- PŮST, L. & PETERKA F. (2003) Impact oscillator with Hertz's model of contact, *Meccanica* **38**, pp. 99-114.
- WOLFRAM, S: *The Mathematica Book*. Cambridge University Press 2000.

Práce vznikla v rámci grantového projektu GA ČR č. 106/98/K019 "Matematicko-fyzikální modelování vibroakustických systémů v biomechanice hlasu a sluchu se zaměřením na vývoj náhradních materiálů a protéz".