

DETERMINATION OF SEA COUPLING LOSS FACTORS USING FINITE ELEMENT METHOD

P. Švancara*

Summary: *Statistical Energy Analysis (SEA) is suitable method for analysis of sound and vibration in high-frequency range, but to build a reliable SEA model is necessary correctly determine individual SEA parameters. Especially for subsystems with complex geometry and material may be desirable to use experimental or numerical methods to identify their parameters. In this paper is Finite Element Method (FEM) in combination with Power injection method (PIM) used for evaluation of coupling loss factors. Methodology is illustrated on several examples of connected plates and beams. Statistical and sensitivity analysis of this methodology is also presented.*

1. Úvod

Při výpočtovém modelování vibroakustických systémů se setkáváme s tím, že se zvyšující se počítanou frekvencí se zkracuje vlnová délka, což představuje jeden z výrazných limitujících faktorů, pro použití klasických deterministických metod, jako je metoda konečných prvků (MKP) nebo metoda hraničních prvků (MHP). Pro tuto oblast vysokých frekvencí, charakterizovanou vysokou modální hustotou, se jako účinné ukázalo použít statistickou metodu – statickou energetickou analýzu (SEA). Tato metoda je v této oblasti dominantní a v současné době se standardně používá při vývoji mnoha strojních zařízení.

Při použití této metody je třeba do výpočtového modelu zadat parametry jednotlivých subsystémů a vazeb mezi nimi, jako jsou faktory ztrát vazeb (FZV), faktory tlumení (FT) a modální hustoty. V komerčních programových balících, určených pro metodu SEA (AutoSEA, SEADS), se tyto parametry počítají pomocí analytických vztahů, na základě typu subsystémů, geometrie a materiálových charakteristik. Nebo je možno zadat vlastní hodnoty. Především pro tvarově a materiálově komplikovanější subsystémy a vazby mezi nimi není možné použít pouze analytické vztahy a je třeba tyto parametry stanovit pomocí numerických metod (Švancara, 2002), nebo s využitím experimentu (Mišun & Švancara, 2002).

V příspěvku je analyzována možnost využití MKP pro určení faktorů ztrát vazeb mezi jednotlivými subsystémy. Postup je založen na numerické simulaci metody PIM (Power Injection Method -metoda vstřikování výkonu) na konečněprvkovém modelu. Postup je ilustrován na několika příkladech spojení desek a tyčí s tvarovými detaily v místě spojení, jako je zaoblení, výztuha apod. Dále je v příspěvku prezentována statistická a citlivostní analýza tohoto postupu založená na metodě Monte Carlo.

* Ing. Pavel Švancara: Centrum mechatroniky, společné pracoviště ÚT AV ČR a ÚMT FSI VUT Brno, Technická 2, Brno, 616 69, tel.: 0608/624 648, e-mail: pavel.svancara@email.cz

2. Principy statistické energetické analýzy (SEA)

Statistická energetická analýza je založena na rovnováze toku výkonů mezi jednotlivými subsystémy, na něž je rozdělen analyzovaný vibroakustický systém. Subsystémy jsou definovány jako skupiny stejných modů v základních tělesech (skořepiny, desky, pruty apod.), na které rozdělíme analyzovanou soustavu. Stejně mody jsou takové, které mají stejné tvary kmitů- ohybové, torzní apod. v daném frekvenčním pásmu. Dynamické vlastnosti jednotlivých subsystémů a vazeb mezi nimi jsou určeny statisticky na základě populace podobných subsystémů.

Předpoklady použití metody SEA jsou (Langley, 1989):

1. Buzení jednotlivých subsystémů má charakter „rain-on-the-roof“, tedy je prostorově rozložené a vzájemně nekorelované.
2. Energie jednotlivých subsystémů a toky výkonů mezi nimi jsou průměrované přes frekvenční pásma a budící síly jsou v těchto pásmech konstantní.
3. Každé frekvenční pásmo obsahuje dostatečný počet rezonančních modů.
4. Subsystémy jsou proporcionálně tlumené.
5. Vazby mezi jednotlivými subsystémy jsou konzervativní a slabé. Slabé znamená, že Greenova funkce $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, představující odezvu v bodě \mathbf{x} subsystému j na harmonické buzení o frekvenci ω působící v bodě \mathbf{y} subsystému j , je přibližně stejná pro vázaný a nevázaný subsystém [4].

Každý subsystém je popsán jedním stupněm volnosti -střední energetickou odezvu, odpovídající prostorově a časově průměrované střední efektivní hodnotě rychlosti vibrací u tuhofázového subsystému a střední efektivní hodnotě akustického tlaku u akustického subsystému. Energie vstupuje do jednotlivých subsystémů z externích zdrojů -pravá strana rovnice (1), je utlumována vnitřním tlumením jednotlivých subsystémů - první člen na levé straně rovnice (1) a přenáší se mezi nimi - druhý člen na levé straně rovnice (1). Rovnice výkonové bilance pro i -tý subsystém a počet vzájemně propojených subsystémů - m má potom tvar (Langley, 1989)

$$2\pi f \eta_{ii} E_i + \sum_{j=1, \neq i}^m 2\pi f (\eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j) = P_{i,vs} \quad (1)$$

a dále platí reciprocita

$$n_i \eta_{ij} = n_j \eta_{ji} \quad (2)$$

kde jsou f - střed uvažovaného frekvenčního pásma
 η_{ii} - faktor tlumení i -tého subsystému
 η_{ij}, η_{ji} - faktory ztráty vazby mezi i -tým a j -tým subsystémem
 E_i, E_j - střední energie i -tého, j -tého subsystému
 $P_{i,vs}$ - vstupní výkon do i -tého subsystému z vnějšího zdroje
 n_i, n_j - modální hustota i -tého, j -tého subsystému

Rovnice toku výkonů pak můžeme vyjádřit maticově ve tvaru

$$2\pi f \begin{bmatrix} \left(\eta_{11} + \sum_{i \neq 1}^m \eta_{1i} \right) n_1 & -\eta_{12} n_1 & \cdots & -\eta_{1m} n_1 \\ -\eta_{21} n_2 & \left(\eta_{22} + \sum_{i \neq 2}^m \eta_{2i} \right) n_2 & \cdots & -\eta_{2m} n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{m1} n_m & \cdots & \cdots & \left(\eta_{mm} + \sum_{i \neq m}^m \eta_{mi} \right) n_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 / n_1 \\ E_2 / n_2 \\ \vdots \\ E_m / n_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1,vs} \\ P_{2,vs} \\ \vdots \\ P_{m,vs} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Dále je vhodné přepsat vztah (3) do rovnic

$$2\pi f [\eta^0] \{E\} = \{P\} \quad \text{a} \quad n_i \eta_{ij} = n_j \eta_{ji} \quad (4)$$

kde

$$\eta_{ij}^0 = -\eta_{ji}, \quad \eta_{ii}^0 = \sum_{m=1}^n \eta_{im} \quad (5)$$

Jak je vidět ze vztahu (3), je třeba pro vytvoření věrohodného SEA modelu správně stanovit velikosti jednotlivých faktorů ztrát vazeb, faktorů tlumení a modálních hustot.

3. Stanovení faktorů ztrát vazeb pomocí MKP

Pro určení faktorů ztrát vazeb pomocí MKP můžeme použít numerické simulace metody PIM (Power Injection Method) na konečněprvkovém modelu. Tato metoda je založena na postupném buzení jednotlivých subsystémů známým (vypočteným) vstupním výkonem a výpočtu kinetické energie všech subsystémů tvořících model (DeLanghe, 1996). Zavedeme-li normalizovanou, frekvenčně a prostorově průměrovanou energii i -tého subsystému, při buzení pouze j -tého subsystému, danou vztahem

$$E_{ij}^n = \frac{\omega \cdot E_{ij}}{P_j} \quad (6)$$

potom můžeme psát na základě rovnic (4) psát

$$[I] = [\eta^0] [E^n] \quad (7)$$

kde $[I]$ je jednotková matice

Inverzí pak získáme matici celkových faktorů ztrát $[\eta^0]$.

$$[\eta^0] = [E^n]^{-1} = \begin{bmatrix} E_{11}^n & E_{12}^n & \dots & E_{1m}^n \\ E_{21}^n & E_{22}^n & \dots & E_{2m}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{m1}^n & E_{m2}^n & \dots & E_{mm}^n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \eta_{1i} & -\eta_{21} & \dots & -\eta_{m1} \\ -\eta_{12} & \sum_{i=1}^m \eta_{2i} & \dots & -\eta_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\eta_{1m} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \eta_{mi} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Jednotlivé FZV jsou pak dány vztahem

$$\eta_{ij} = -\eta_{ji}^0, \quad i \neq j \quad (9)$$

Při použití MKP mají pohybové rovnice tlumeného, buzeného subsystému tvar

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (10)$$

kde $[M]$ je matice hmotnosti, $[C]$ matice tlumení, $[K]$ matice tuhosti, $\{u\}$ vektor deformačních parametrů a $\{F\}$ vektor budících sil. Za předpokladu harmonického průběhu budících sil přejde vztah (10) do tvaru

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{u_{\max} e^{i\phi}\} e^{i\omega t} = \{F_{\max} e^{i\psi}\} e^{i\omega t} \quad (11)$$

kde u_{\max} , F_{\max} jsou amplitudy deformačních parametrů a budících sil, a ϕ, ψ jsou jim odpovídající fázové posuny. Řešením (11) získáme vektor deformačních parametrů.

Velikost kinetické energie subsystému vystupující v (6) můžeme potom určit dle vztahu

$$E = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k u_k^2 \quad (12)$$

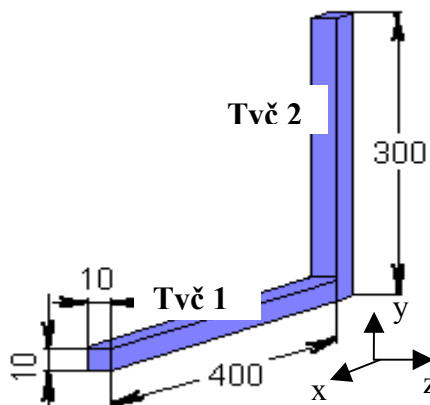
kde m_k je hmotnost a u_k výchylka k-tého uzlu sítě

a velikost vstupního výkonu dle vztahu

$$P = \omega \sum_{k=1}^M F_k u_k \quad (13)$$

kde F_1 je velikost budící síly v k-tém uzlu sítě

Uvedený postup byl nejdříve aplikován pro určení FZV mezi ohybovým subsystémem tyče 1 (ve směru y) a ohybovým subsystémem tyče 2 (ve směru x) soustavy dvou ocelových tyčí čtvercového průřezu spojených do L viz. obr. 1. Výpočet odezvy na harmonické buzení byl proveden v programovém systému ANSYS 5.7 a výsledky potom zpracovány v MATLABu. Jako prvek byl použit BEAM 4. Velikost prvku byla volena pro frekvenční rozsah řešení 10 mm. Celkový počet prvků obou tyčí byl 70. Tyče byly prostě podepřeny na svých okrajích. Použité materiálové charakteristiky: modul pružnosti v tahu $E=2,1e5$ MPa, součinitel příčné kontrakce $\mu=0,3$, hustota $\rho= 7850$ kg.m⁻³. U obou tyčí bylo zadáno tlumení ve formě konstantního součinitele tlumení o velikosti 0.02. Výpočet byl prováděn po 2 Hz ve frekvenčním rozsahu 50-250 Hz, po 5 Hz od 250 do 750 Hz a po 20 Hz od 750 do 5000 Hz. Pro simulaci buzení rain-on-the-roof, byl model buzen v deseti uzlech sítě, náhodně zvolených na příslušné tyči, silami o stejné amplitudě 10N s náhodnou fází v rozsahu $(-\pi, \pi)$, mající normální rozdělení. Pro vygenerování souboru náhodných fází byl použit generátor náhodných čísel s normálním rozdělením v MATLABu funkce *normrnd*.



Obr. 1 Tyče do L

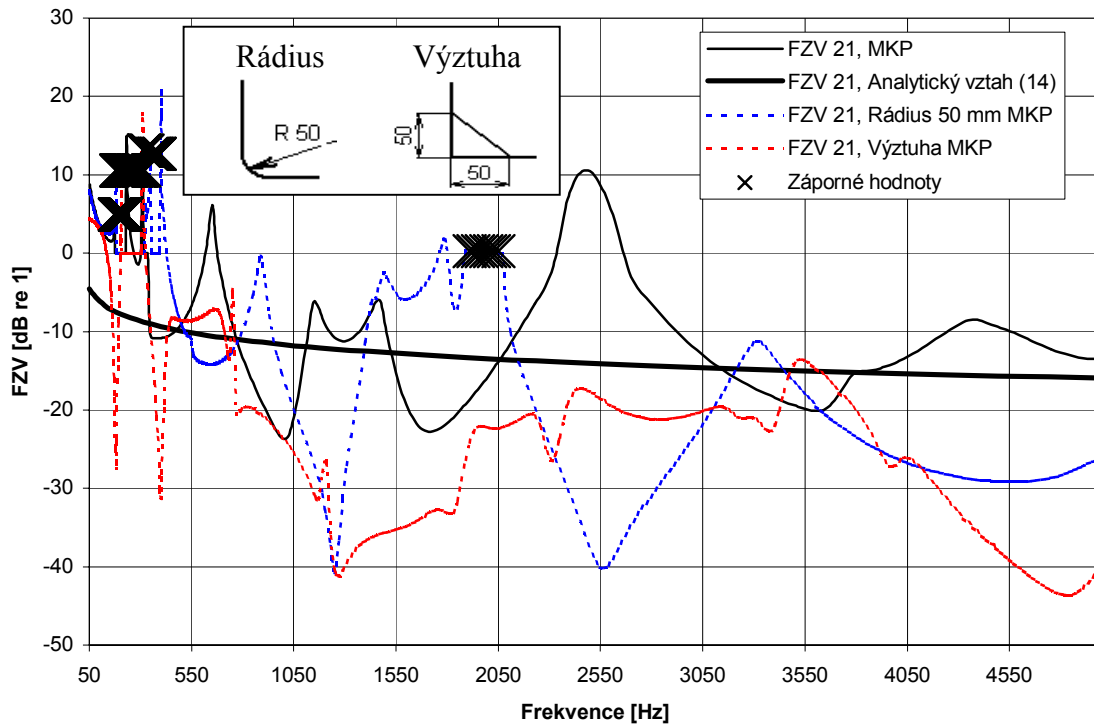
Vypočtené hodnoty FZV mezi ohybovými mody tyče 2 (ve směru x) a ohybovými mody tyče 1 (ve směru y) jsou zobrazeny v grafu 1. Pro srovnání je v grafu vyneseno také FZV vypočtený analyticky podle vztahu (Craik, 1996)

$$\eta_{ij} = \frac{c_{gi}}{4\pi fL_i} \tau_{ij} \quad (14)$$

kde c_{gi} je grupová rychlost vln i -tého subsystému, L_i délka i -té tyče a τ_{ij} je přenosový součinitel. Je-li pravděpodobnost dopadu vln na vazbu ze všech směrů stejná (difúzní pole) $\tau_{ij}=0,33$ (Craik, 1996).

Z výsledků v grafu 1. je vidět, že nad frekvencí přibližně 1000 Hz odpovídá FZV, vypočtený pomocí poměrně dobře analytickým hodnotám. Při nižších frekvencích můžeme vidět výrazné oddělené vrcholy, způsobené jednotlivými rezonančními frekvencemi desek. Záporné hodnoty FZV při nízkých frekvencích byly způsobeny špatnou podmíněností matice normalizovaných energií ve vztahu (7), tedy její velkou citlivostí na malé odchylky jednotlivých prvků (DeLanghe, 1996).

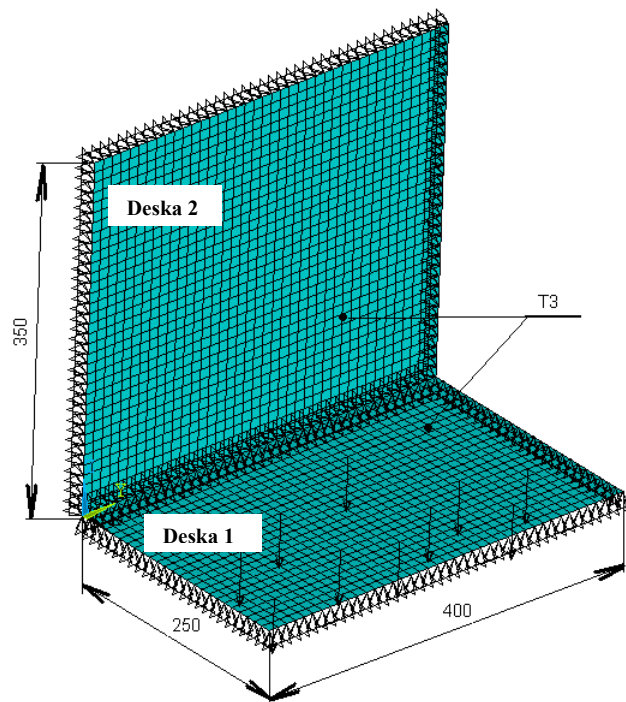
Dále byl analyzován vliv přítomnosti tvarového prvku –zaoblení a výztuhy v místě spojení tyčí. V místě přechodu byl modelován rádius o poloměru 50 mm a výztuha tvořená tyčí stejného průřezu jako jsou obě spojené tyče, umístěná ve vzdálenosti 50 mm od místa spojení. Ostatní parametry modelu a buzení zůstaly stejné. Vypočtené hodnoty FZV takto upravených modelů jsou taktéž zobrazeny v grafu 1. Z výsledků je vidět, že zaoblení přechodu a výztuha způsobily snížení FZV při frekvencích nad přibližně 1000 Hz, kdy se délka ohybových vln začíná blížit charakteristickému rozměru tvarového prvku. Tento příklad ilustruje velkou výhodu využití MKP pro určení FZV, a to, že umožňuje stanovení FZV pro tvarově a popř. materiálově komplikovanější spojení subsystémů.



Graf 1 Faktor ztráty vazby mezi ohybovým subsystémem tyče 2 a ohybovým subsystémem tyče 1

Dále byl postup aplikován na soustavu dvou hliníkových desek spojených do L. U desek byly uvažovány pouze ohybové módy. MKP model viz. obr. 2. U obou desek byl použit prvek SHELL 63. Velikost prvku byla volena pro frekvenční rozsah řešení 10 mm. Celkový počet prvků obou desek je 2400. Všechny okraje desek byly prostě podepřeny. Použité materiálové charakteristiky: modul pružnosti v tahu $E=68\,600\text{ MPa}$, součinitel příčné kontrakce $\mu=0.33$, hustota $\rho=2700\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, konstantní součinitel tlumení 0.02. Výpočet byl prováděn po 2 Hz ve frekvenčním rozsahu 50-250 Hz, po 5 Hz od 250 do 750 Hz a po 20 Hz od 750 do 2750 Hz. Desky byly opět buzeny soustavou deseti sil s konst. amplitudou a náhodnou fází v náhodně zvolených uzlech sít příslušné desky. Výpočet byl opakován dvacetkrát pro různé délky desek, mající normální rozdělení se střední hodnotou odpovídající nominálnímu rozměru desky a směrodatnou odchylkou 10 mm.

Na vypočteném souboru faktorů ztrát vazeb byla testována hypotéza, že mají



Obr. 2 MKP model desek do L

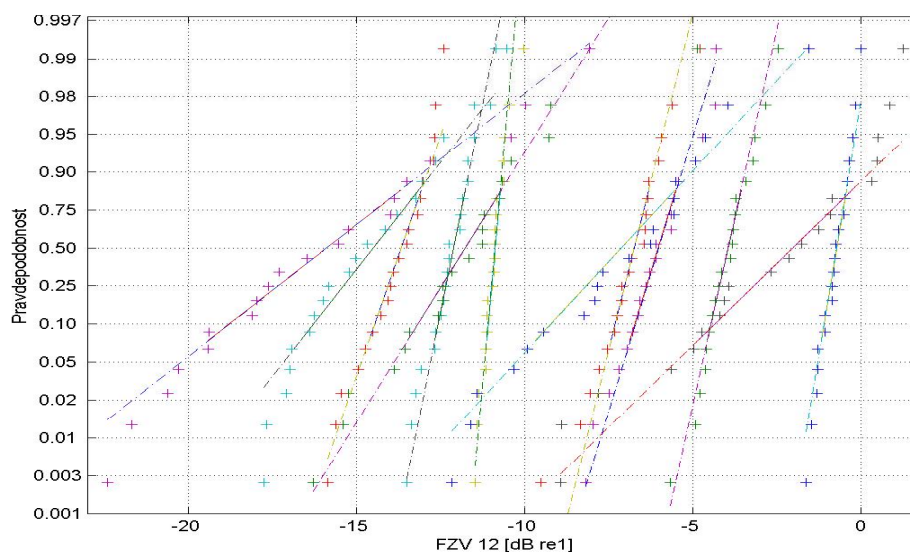
lognormální rozdělení. Byla k tomu využita grafická metoda, kdy jsou empirické distribuční funkce statistického souboru vynášeny do grafu, v němž je měřítko osy y voleno tak, aby je-li statistický soubor realizací náhodného výběru ze základního souboru s daným rozdělením, příslušné body ležely přibližně na přímce. Příklady průběhů dvanácti těchto empirických distribučních funkcí pro vybrané frekvence jsou zobrazeny v grafu 2. Pro usnadnění rozhodnutí o linearitě jsou navíc v grafu 2 zobrazeny i přímky spojující první a třetí kvartil daného souboru. Test prokázal, že mají-li rozměry desek normální rozdělení, pak FZV mezi ohybovými systémy těchto desek mají rozdělení lognormální.

V grafu 3 je zobrazeno dvacet vypočtených hodnot FZV spolu s vypočtenými středními hodnotami a směrodatnými odchylkami pro konfidenční interval 95% a zjištěné lognormální rozdělení. Pro srovnání je v grafu 3 vynesena také FZV vypočtený analyticky podle vztahu (Craik, 1996)

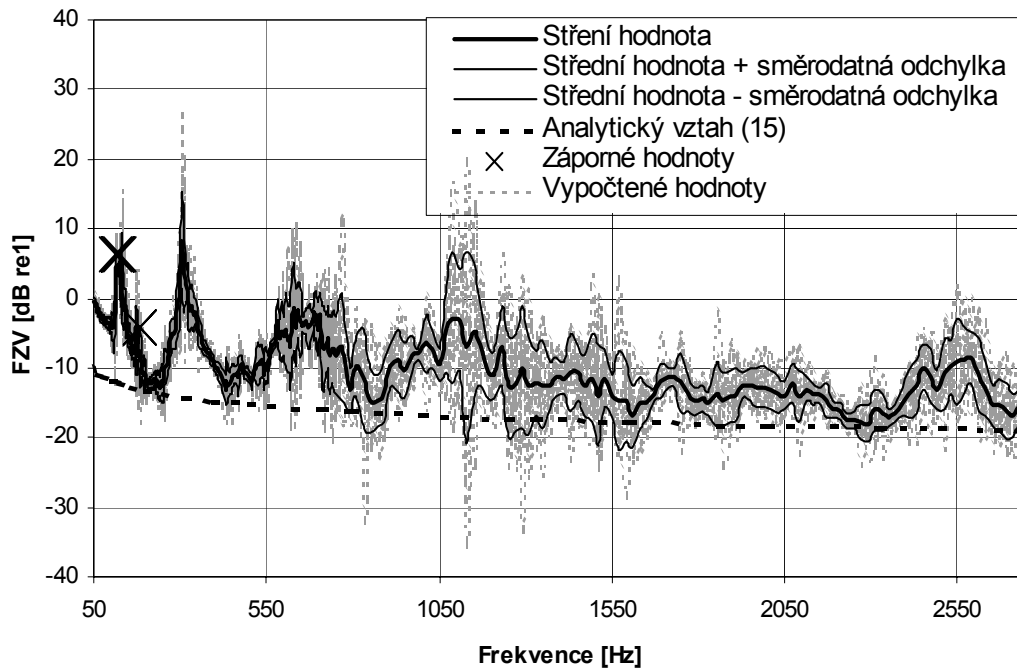
$$\eta_{ij} = \frac{c_{gi} L}{2\pi^2 f S_i} \tau_{ij} \quad (15)$$

kde c_{gi} je grupová rychlost vln i -tého subsystému, L délka vazby, S_i plocha i -tého subsystému a τ_{ij} je přenosový součinitel. Je-li pravděpodobnost dopadu vln na vazbu ze všech směrů stejná (difúzní pole) $\tau_{ij}=0.3$ (Craik, 1996).

Z výsledků v grafu 3 je vidět, že nad frekvencí přibližně 750 Hz odpovídá FZV, vypočtený pomocí MKP poměrně dobře analytickým hodnotám. Při nižších frekvencích můžeme vidět výrazné oddělené vrcholy, způsobené jednotlivými rezonančními frekvencemi desek. Při těchto frekvencích je porušena podmínka dostatečného překrytí jednotlivých modů, za níž je odvozen analytický vztah (15) a hodnoty vypočtené pomocí MKP tak spíše odpovídají skutečnému chování systému. Využití takto vypočtených hodnot FZV může zpřesnit výsledky SEA modelu při nižších frekvencích. Získané statistické parametry (střední hodnoty a směrodatné odchylky) mohou být následně použity v SEA modelu, pro určení rozptylu počítaných hladin vibrací a akustického tlaku.

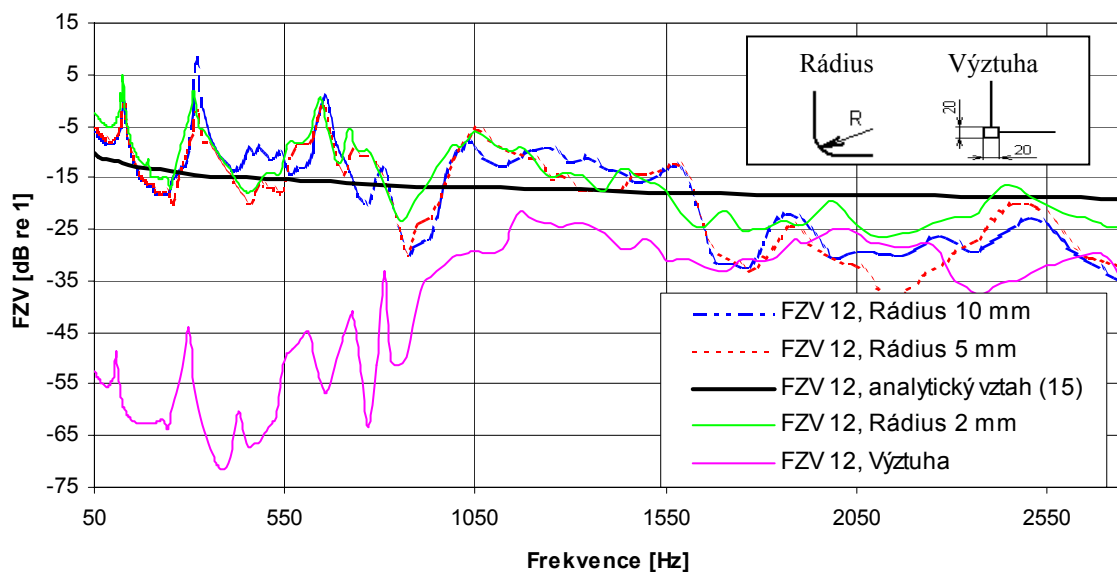


Graf 2 Empirické distribuční funkce pro vybrané frekvence (54, 100, 160, 210, 365, 515, 690, 1030, 1690, 2150, 2390, 2690 Hz)



Graf 3 Faktor ztráty vazby mezi ohybovým subsystémem desky 1 a ohybovým subsystémem desky 2

Jako další krok byl u soustavy desek analyzován vliv tvarového prvku v místě spojení. V místě přechodu byl modelován rádius o poloměrech 2, 5, 10 mm a výztuha tyčí čtvercového průřezu 20x20 mm. Ostatní parametry modelu a buzení zůstaly stejné. Vypočtené hodnoty FZV mezi ohybovým subsystémem desky 1 a desky 2 jsou zobrazeny v grafu 4. Z výsledků je vidět, že zaoblení přechodu způsobilo snížení FZV při frekvencích nad 1500 Hz, kdy se délka ohybových vln začíná blížit charakteristickému rozměru zaoblení. Výztuha tyčí způsobila výrazné snížení FZV ve frekvenční oblasti do 1500 Hz. Nad frekvencí přibližně 1500 Hz je vliv vyztužení spoje tyčí na FZV stejný jako zaoblení přechodu.

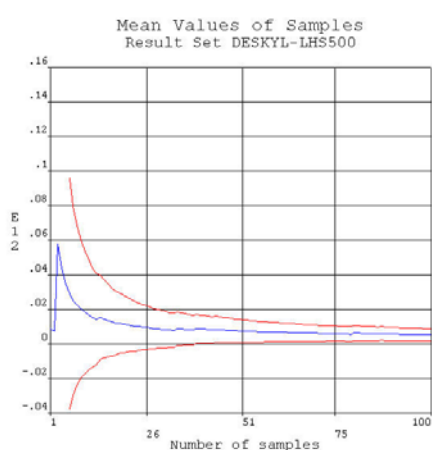


Graf 4 Faktor ztráty vazby mezi ohybovým subsystémem desky 1 a ohybovým subsystémem desky 2 pro zaoblený a vyztužený přechod

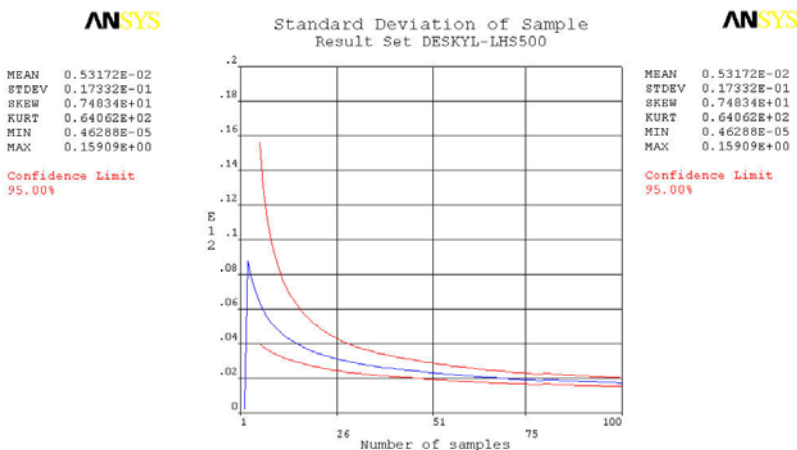
4. Statistická a citlivostní analýza FZV

Pro statistickou a citlivostní analýzu vypočtených FZV byla použita metoda Monte Carlo, která je implementována v programovém systému ANSYS. Výpočet odezvy na harmonické buzení pro určitou frekvenci byl opakován mnohokrát pro různé hodnoty parametrů MKP modelu. Získáme tak střední hodnoty a směrodatné odchylky energií a vstupních výkonů, které můžeme následně použít pro výpočet středních hodnot a rozptylů faktorů ztrát vazeb. Ze získaného statistického souboru umožňuje ANSYS také vypočítat statistickou citlivost výstupních veličin (v našem případě energie subsystémů a vstupní výkony) na vstupních veličinách (parametry MKP modelu jako jsou geometrické rozměry a materiálové vlastnosti). Tyto citlivosti mohou dále sloužit pro optimalizaci spoje z hlediska přenosu vibrační energie.

V případě desek spojených do L byly měněny délky stran desek, tloušťka desek, modul pružnosti v tahu, součinitel příčné kontrakce a hustota. Pro vytvoření statistického souboru byla zvolena metoda Latin hypercube sampling s počtem vzorků 100. U všech parametrů bylo předpokládáno normální rozdělení se střední hodnotou odpovídající nominální hodnotě a směrodatnou odchylkou o velikosti 10% nominální hodnoty. Příklady vypočtených středních hodnot a směrodatných odchylek energie desky 1 při buzení desky 2 – E_{12} pro jednotlivé vzorky při frekvenci 500 Hz s konfidenčním intervalem 95% jsou znázorněny v grafech 5 a 6.

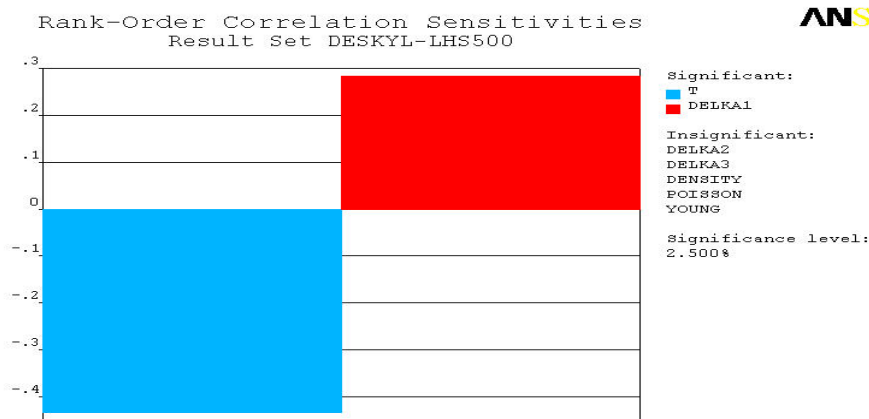


Graf 5 Vypočtené střední hodnoty energie E_{12} při frekvenci 500Hz



Graf 6 Vypočtené směrodatné odchylky energie E_{12} při frekvenci 500Hz

V grafu 7 je potom znázorněn příklad vypočtených statistických citlivostí energie E_{12} pro frekvenci 500 Hz na jednotlivé vstupní parametry při hladině významnosti 2.5%. ANSYS nejdříve rozdělí vstupní parametry na základě testu statistické hypotézy, že citlivost vstupního parametru je rovna nule do dvou skupin – parametry, na něž je výstupní veličina citlivá a parametry, na něž výstupní veličina citlivá není. Z výsledků je vidět, že energie E_{12} při frekvenci 500 Hz je nejvíce citlivá na změnu tloušťky desek (záporná hodnota znamená, že při rostoucí tloušťce energie E_{12} klesá) a dále je pak citlivá na změnu délku desky 1 kolmo ke spojení. Na ostatní parametry není tato energie při dané frekvenci příliš citlivá. Při optimalizaci přenosu vibrační energie přes tento spoj je tedy nejúčinnější měnit tloušťku desek a délku desky 1.



Graf 7 Vypočtené statistické citlivosti energie E_{12} při frekvenci 500Hz na jednotlivé parametry MKP modelu

5. Závěr

V příspěvku byla analyzována možnost využití MKP pro určení faktorů ztrát vazeb mezi jednotlivými subsystemy SEA modelu. Je možno říct, že použití MKP pro stanovení těchto parametrů může přispět k vytvoření přesnějšího SEA modelu, který lépe popisuje vibroakustické chování reálné soustavy. Použití tohoto postupu je vhodné především pro tvarově a materiálově komplikovanější subsystemy a vazby mezi nimi, pro něž neexistují analytické vztahy. Tento postup je také vhodný pro získání statistických parametrů FZV, určení citlivostí na jednotlivé konstrukční a materiálové parametry a pro zpřesnění SEA modelu v oblasti nižších frekvencí.

6. Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory grantu GAČR č. 101/00/0069.

7. Literatura

- Craik, J.M. (1996) *Sound transmission through buildings using SEA*. Gower, Hampshire England.
- Delanghe, K. (1996) *High frequency vibrations: Contribution to experimental and computational SEA parameters identification techniques*. Ph.D. Dissertation, Department PMA, Catholic University Leuven.
- Langley, R.S. (1989) A general derivation of the statistical energy analysis equations for coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 135, 3, pp. 499-508.
- Mišun, V. & Švancara, P. (2002) Experiences with experimental identification of single parameter of SEA model. in: *Proc. 9th Int. Cong. on Sound & Vibration*, Orlando, USA.
- Švancara, P. (2002) Využití metody konečných prvků pro určování faktorů ztrát vazeb u modelů SEA, in: *Proc. Conf. Noise and vibration in practice*, Kočovce, Slovensko, pp. 49-54.