

CONCRETE AS A TWO-PHASE MATERIAL: STATISTICAL/SENSITIVITY MODELLING OF FAILURE

Z. Keršner*, L. Náhlík**, Z. Knésl***

Summary: *Concrete is represented as a two-phase material in this paper. Behaviour of a crack with its tip on the interface between two different materials – hardened cement paste (matrix) and aggregate (particle) – is modelled. Input variables of the model are considered as random variables using LHS method/FREET software. Then results of statistical/sensitivity analyses of output variable – the critical stress for the intersection of coarse aggregate particle – are presented.*

1. Úvod

Beton představuje důležitý a často užívaný stavební materiál. Vyrůstá význam studia chování při porušování, neboť např. lomové vlastnosti tohoto cementového kompozitu se ukazují být nepominutelnými při úvahách o životnosti či spolehlivosti betonových konstrukcí. K určování lomových vlastností se může použít zkouška tříbodovým ohybem vzorků (ze zatvrdlé cementové pasty, malty, betonu) s centrálním zářezem v tažených vláknech a jedním z výstupů bývá např. efektivní lomová houževnatost, kvantifikující právě odpor proti nestabilnímu šíření trhlin – šíří problematiky naznačí nahlédnutí do prací/učebnic Karihaloo (1995), Bazant & Planas (1998).

Lomová houževnatost kompozitu závisí mj. na vlastnostech jeho složek, tj. matrice (zatvrdlé cementové pasty) a částic (zrn kameniva). Výše zmíněná zkouška tříbodovým ohybem vzorků se zářezem a rozptyl výsledných lomových vlastností se staly motivací, aby byl autory kompozit modelován jako dvoufázové kontinuum a pozornost byla věnována interakci mezi trhlinou a zrnem kameniva (Knésl et al., 2001, Keršner et al., 2002a,b), resp. vlivu tvaru a velikosti zrna na odolnost proti šíření trhliny (Náhlík et al., 2003). Ukázalo se, že použitý model umožňuje odhad kritického napětí potřebného k porušení kameniva šířením magistrální trhliny, a že vliv tvaru i velikosti částice na výsledná kritická napětí je marginální ve srovnání s vlivem proměnlivosti materiálových vlastností matrice a částice. V předkládaném příspěvku se právě zohledňuje náhodná proměnlivost vstupních parametrů modelu dvoufázového kontinua.

* Ing. Zbyněk Keršner, CSc.: Ústav stavební mechaniky, FAST VUT v Brně; Veveří 95; 662 37 Brno; tel: +420.541 147 360; e-mail: kersner.z@fce.vutbr.cz

** Ing. Luboš Náhlík, PhD.: Equipe Mécanique et Matériaux, Ecole Centrale de Lille; Cité scientifique; BP 48; Villeneuve d'Ascq; e-mail: nahlik@ipm.cz

*** Prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.: Ústav fyziky materiálů, Akademie věd ČR; Žižkova 22; 616 62 Brno; tel: +420.532 290 358; e-mail: knesl@ipm.cz

Chování trhliny šířící se ve dvoufázovém prostředí matrice/částice je ovlivněno mnoha faktory souvisejícími jak s geometrickým uspořádáním a velikostí částic, tak také s materiálovými parametry popisujícími chování obou složek. Významnou úlohu může navíc hrát i kvalita spojení mezi matricí a částicemi. Jedním ze základních procesů určujících výsledné lomové chování dvoufázového prostředí je vzájemná interakce trhlina-částice. Základní mechanismy, které se podílejí na zhouževnatování betonu v souvislosti se vzájemnou interakcí trhlina-částice, jsou procesy související s vychylováním makrotrhliny z jejího původního směru, přemostování trhliny částicemi a zachycení trhliny na rozhraní matrice-částice (Keršner et al., 2002a). Konfigurace, kdy se vrchol trhliny nachází na rozhraní matrice-částice může výrazně ovlivnit hodnotu naměřené lomové houževnatosti, a to jak kladně, tak i záporně. V případě, kdy je vrchol trhliny uchycen na rozhraní matrice-částice, rozhodují o tom, zda se trhlina bude šířit přes částici (tj. zda se zrno kameniva rozlomí) nejen elastické konstanty obou složek, ale i lomově-mechanické vlastnosti částice. Výsledné napětí nutné k rozlomení zrna kameniva (a tím i ke skokové změně velikosti trhliny) může být větší nebo menší než je odpovídající napětí pro šíření makrotrhliny v matrici samotné.

Výsledné kritické napětí pro lom kameniva a tedy i pro další šíření makrotrhliny závisí v nejjednodušším případě na pěti materiálových parametrech. Čtyři z nich, tj. elastický modul matrice a částice a Poissonovo číslo matrice a částice určují efektivní napětí v matrici v okolí částice s trhlinou a pátý parametr, lomová houževnatost částice (kameniva) pak určuje, zda k vlastnímu rozlomení zrna kameniva při dané konfiguraci a zatížení dojde či nikoli.

Vzhledem ke struktuře studovaných materiálů (cementová pasta, kamenivo) nejsou však hodnoty těchto parametrů známy s dostatečnou přesností – pro hodnocení jejich vlivu na výsledné měřené veličiny je možno tyto veličiny modelovat jako náhodné. Pro posouzení vlivu možného statistického rozptylu v hodnotách těchto parametrů na výsledné kritické napětí potřebné pro rozlomení částice hraje klíčovou úlohu deterministický výpočtový model, který umožní pro danou geometrickou konfiguraci a zadané materiálové parametry výpočet kritického lomového napětí. Vzhledem k tomu, že uvedený deterministický model výpočtu kritického napětí pro makrotrhlinu s vrcholem na rozhraní matrice-částice byl detailně popsán v příspěvku Keršner et al. (2002a) presentovaném na konferenci Inženýrská mechanika 2002, uvedeme v dalším jen několik základních předpokladů nezbytných pro orientaci v problematice.

2. Deterministický výpočtový model

Připomeňme, že lineární elastická lomová mechanika (LELM) je formulována pro popis těles s trhlinou a jejím základním problémem je stanovit, zda a jak se za daných podmínek bude trhlina šířit. Základní pojmy a definice LELM vycházejí z předpokladu, že rozložení napětí v okolí vrcholu trhliny je s dostatečnou přesností charakterizováno výrazem typu

$$\sigma_{ij} = K_I / \sqrt{2\pi r} f_{ij}(\varphi) \quad (1)$$

kde (r, φ) jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, K_I je hodnota faktoru intenzity napětí (omezíme se na normálový mód) a f_{ij} je známá funkce polárního úhlu φ .

Podstatným rysem je singulární závislost napětí na vzdálenosti od vrcholu trhliny typu $1/\sqrt{r}$. Trhlinu můžeme tedy chápat jako singulární koncentrátor napětí s exponentem

singularity $-1/2$. Kritická hodnota faktoru intenzity napětí je lomová houževnatost K_{Ic} a nejjednodušší a také nejužívanější kritérium stability trhliny v LELM má tvar

$$K_I < K_{Ic}. \quad (2)$$

Faktor intenzity napětí, lomová houževnatost, hnací síla trhliny a tedy i uvedené kritérium stability trhliny jsou definovány právě pro tento případ singularity a pokud je exponent singularity odlišný od $1/2$ ztrácí svůj význam, případně je nelze definovat vůbec.

Typickým příkladem singulárního koncentrátoru napětí, kde je exponent singularity různý od $1/2$ je konfigurace trhliny s vrcholem na rozhraní dvou různých materiálů. V tomto případě je možno popsat rozložení napětí v okolí vrcholu singulárním členem typu (pro jednoduchost předpokládáme trhlínu kolmou na rozhraní)

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} F_{ij}(\alpha, \beta, \varphi) r^{-p}, \quad (3)$$

kde F_{ij} je známá funkce polárního úhlu a materiálových parametrů matrice a částice α , β , veličina H_I je zobecněný faktor intenzity napětí. Na rozdíl od trhliny v homogenním prostředí je v tomto případě singularita napětí typu r^{-p} , kde $0 < p < 1$ je exponent singularity, dochází tedy ke změně charakteru singularity. Hodnota exponentu singularity p závisí na materiálových konstantách obou materiálů, $p = p(\alpha, \beta)$, viz např. Keršner et al. (2002a) pro podrobnosti.

Podobně jako faktor intenzity napětí K_I je i hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí H_I funkcí materiálových parametrů, aplikovaného napětí, geometrie tělesa a okrajových podmínek a musí být určena numericky.

Skutečnost, že hodnota exponentu singularity $p \neq 1/2$ znamená, že pro studium takových trhlín nelze použít přístupy klasické lomové mechaniky a zejména pak kritérium stability musí být modifikováno.

V případě křehkého lomu lze podmínku stability pro trhlínu s exponentem singularity odlišným od $1/2$ formulovat pomocí střední hodnoty $\bar{\sigma}$ normálového napětí vypočteného v oblasti d před jejím vrcholem. Základním předpokladem tohoto postupu je tvrzení, podle něhož se trhlína bude šířit, pokud střední hodnota napětí $\bar{\sigma}$ bude větší než odpovídající střední hodnota napětí σ_{crit} vypočtená přes stejnou oblast v homogenním tělese (tj. pro singularitu typu $1/2$) pro aplikované napětí odpovídající podmínce $K_I = K_{Ic}$. V případě, kdy chceme stanovit podmínku pro rozlomení částice předpokládáme, že velikost d odpovídá průměru částice D .

Uvedená úvaha nám umožní formulovat podmínku stability pro trhlínu s vrcholem na rozhraní částice ve tvaru

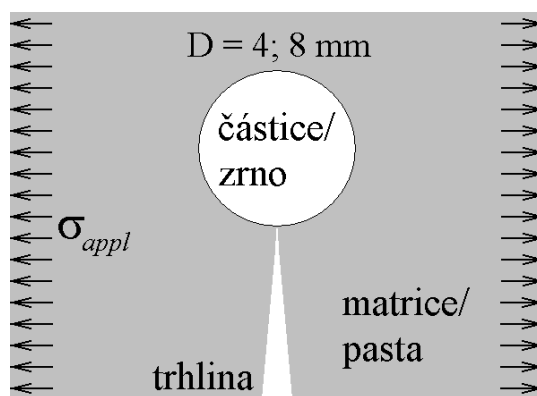
$$H_I \leq H_{Ic}(K_{Ic}) \quad (4)$$

kde H_{Ic} je kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí závislá na hodnotě lomové houževnatosti částice K_{Ic} .

Poznamenejme, že význam veličiny H_I (příp. H_{Ic}) je poněkud zatemněn nezvyklým rozměrem této veličiny ($\text{MPa}\cdot\text{m}^p$) a proto uvádíme v dalším pouze hodnoty kritického aplikovaného napětí $\sigma_{crit,D}$ nutného k tomu, aby se trhлина rozšířila přes částici (tj. aby došlo k lomu částice).

Postup při výpočtu tohoto kritického napětí je v detailech uveden v Keršner et al. (2002a), výsledné kritické napětí závisí na hodnotách elastických parametrů E_1 , ν_1 , E_2 , ν_2 matrice a částice a lomové houževnatosti částice K_{Ic} .

Jak bylo zmíněno, hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí $H_I(\sigma_{appl})$ pro vnější aplikované zatížení musí být určena numericky – zde pomocí MKP systému ANSYS. Při výpočtu je částice modelována jako kruhová inkluze o průměru D , viz Obrázek 1. Pro zjednodušení dále předpokládáme, že můžeme zanedbat interakci vrcholu trhliny s ostatními částicemi. Tento předpoklad je oprávněný, uvážíme-li singulární průběh napětí v okolí vrcholu trhliny a skutečnost, že hustota částic je dostatečně malá. Předpokládá se také ideální adheze částice/matrice.



Obrázek 1 Model částice kameniva v zatvrdlé cementové pastě.

Výsledkem aplikace tohoto postupu jsou pak deterministicky určené kritické hodnoty vnějšího aplikovaného napětí $\sigma_{crit,D}$, které závisí na materiálových parametrech obou složek (tj. zatvrdlé cementové pasty, resp. malty, a kameniva), na velikosti částic a na lomové houževnatosti materiálu, do kterého se bude trhлина dále šířit.

Poznamenejme, že z hlediska numerických výpočtů je kritickým bodem odhad veličiny zobecněného faktoru intenzity napětí H_I . Největším zdrojem nepřesností výsledných hodnot kritických napětí je rozptyl v hodnotách elastických konstant a hodnoty lomové houževnatosti u zatvrdlé cementové pasty a kameniva.

3. Náhodné vstupní veličiny modelu

Přiblížení výsledků výpočtů proměnlivosti reality lze dosáhnout různými postupy – skrze náhodné veličiny, náhodná pole, stochastické konečné prvky apod. V předkládaném příspěvku je pro tyto účely využito software FREET (Program Documentation, 2002), koncipovaný jako otevřený systém, který umožňuje pracovat se vstupními veličinami jakéhokoli algoritimizovatelného problému (modelu) jako s veličinami náhodnými a vyhodnotit výstupní veličiny modelu statistickou a citlivostní analýzou. Počítá se s řešením spíše rozsáhlejších modelů, čemuž odpovídá propracování generace vstupních veličin

metodou Latin Hypercube Sampling – viz např. Novák et al. (1997), pomocí které lze velmi podstatně snížit nutný počet opakovaných realizací/výpočtů modelu pro uspokojivý odhad prvních statistických momentů sledovaných výstupních veličin. Pozornost je věnována také zavedení požadované/odhadované vzájemné korelace mezi vstupními náhodnými veličinami, kterážto optimalizační úloha je řešena genetickými algoritmy – simulovaným žiháním (Novák et al., 2002, Vořechovský & Novák, 2002).

Vedle výstupů ve formě statistické analýzy výstupních veličin jsou kvantifikovány také vlivy proměnlivosti vstupních veličin na proměnlivost sledovaných výstupů – tzv. citlivostní analýza.

V Tabulce 1 jsou uvedeny veličiny, které se uvažují ve výše uvedeném modelu jako náhodné. Jedná se o elastické konstanty E , ν v matrice a částice a o lomovou houževnatost materiálu částice. Každou ze zmíněných veličin zastupuje vedle střední hodnoty také směrodatná odchylka a typ pravděpodobnostního rozdělení. Zadání těchto vstupních informací v softwaru FREET ilustruje Obrázek 2.

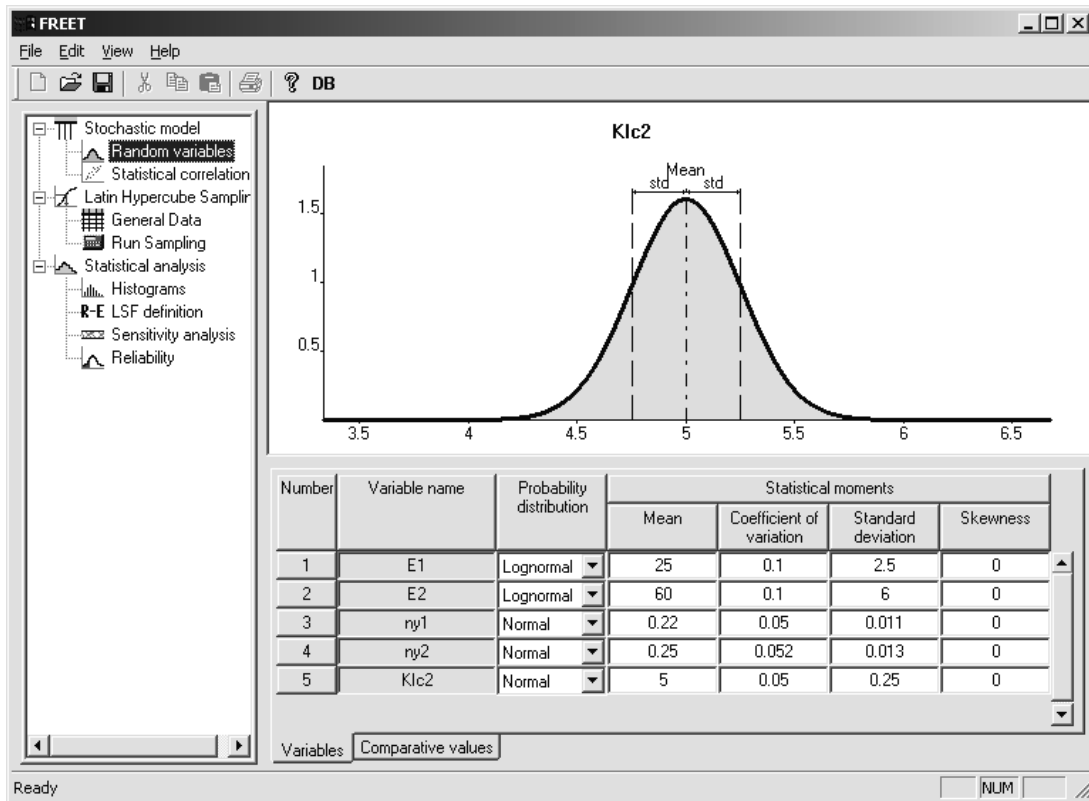
Tabulka 1 Náhodné vstupní veličiny

Veličina	Symb.	Jednotka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Pravděpodob. rozdělení
Modul pružnosti matrice	E_1	GPa	25	2,5	log-normální
Modul pružnosti částice	E_2	GPa	60	6	log-normální
Poissonovo číslo matrice	ν_1	–	0,22	0,011	normální
Poissonovo číslo částice	ν_2	–	0,25	0,013	normální
Lomová houževnatost částice	K_{lc2}	MPa.m ^{1/2}	5	0,25	normální

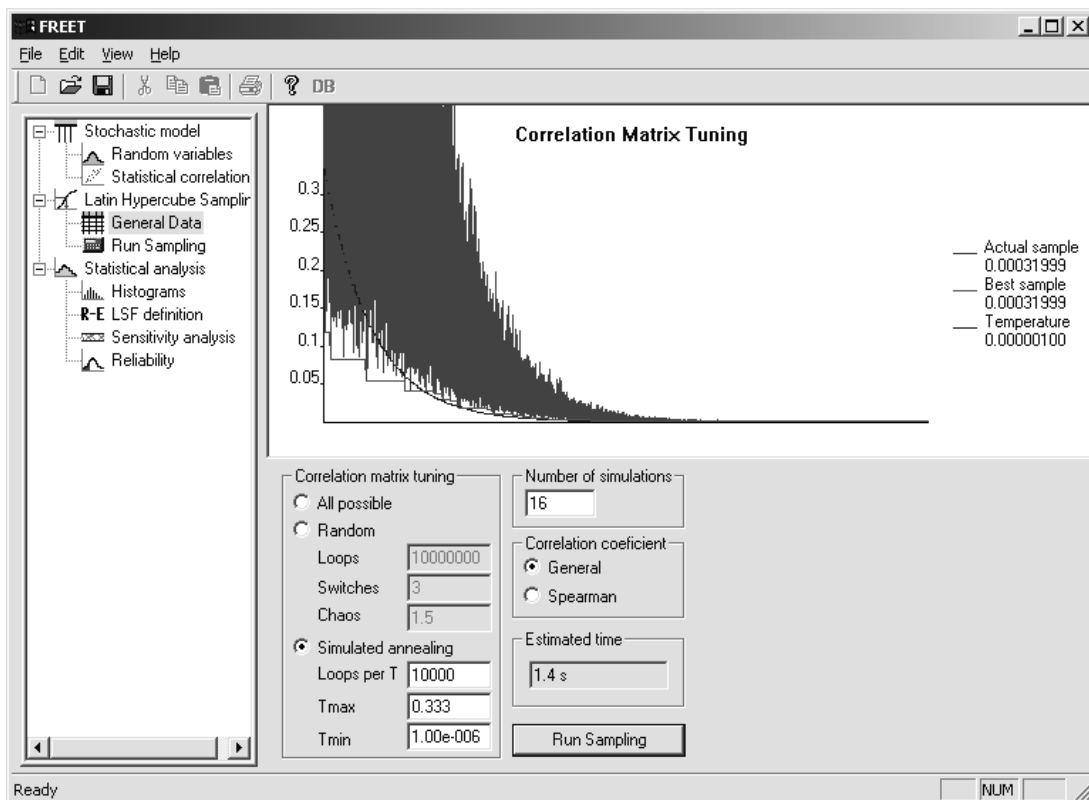
Vzájemnou korelaci uvažovaných vstupních náhodných veličin shrnuje Tabulka 2. Horní trojúhelníková část matice představuje požadovanou korelační ne/závislost všech vstupních veličin, dolní trojúhelníková matice ukazuje (nepatrně odlišné) korelační koeficienty, kterých bylo dosaženo aplikací výše zmíněného postupu simulovaného žihání pro uvedených 5 vstupních veličin a vygenerovaných 16 realizací – ilustruje účinnost metody. Panel softwaru FREET s ukázkou postupu hledání optimální korelační matice pomocí simulovaného žihání je na Obrázku 3.

Tabulka 2 Vzájemná korelace vstupních náhodných veličin

	E_1	E_2	ν_1	ν_2	K_{lc2}
E_1	1	0	0	0	0
E_2	-0.001	1	0	0	0
ν_1	0.003	0.004	1	0	0
ν_2	0.006	-0.002	-0.004	1	0
K_{lc2}	-0.001	0.001	0.004	0.001	1



Obrázek 2 FREET – panel zadávání vstupních náhodných veličin.



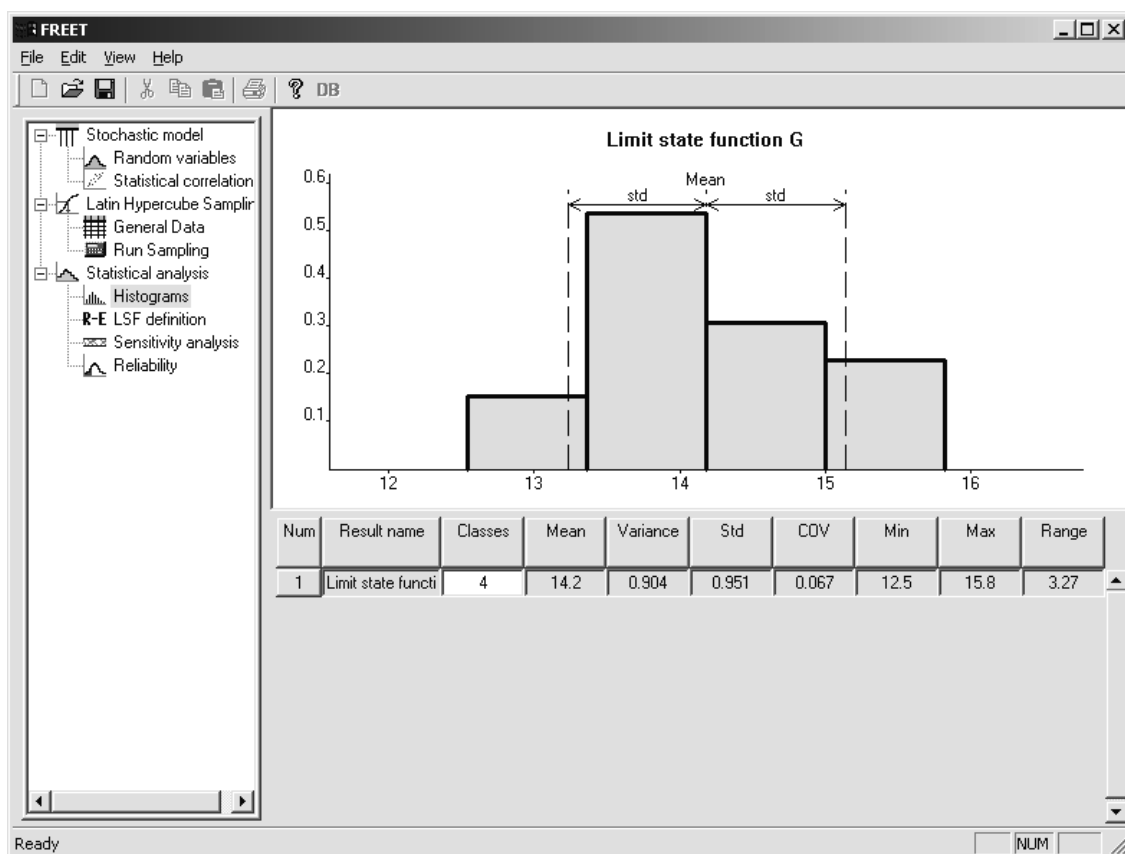
Obrázek 3 FREET – ilustrace postupu simulovaného žíhání při „ladění“ korelační matice.

4. Výsledky statistické a citlivostní analýzy

Mezi sledovanými výstupními veličinami modelu byla kritická napětí, potřebná pro rozlomení částice/zrna kameniva – uvažováno pro průměr $D = 4$ a 8 mm –, a exponent singularity napětí. Výsledné hodnoty statistické analýzy jsou shrnuty v Tabulce 3 – pro každou výstupní veličinu lze nalézt odhady střední hodnoty, směrodatné odchylky, resp. variačního koeficientu. Na Obrázku 4 je uveden panel výsledků statistické analýzy kritického napětí pro zrno $D = 4$ mm.

Tabulka 3 Výsledky statistické analýzy

Veličina	Symb.	Jednotka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Variační koef. v %
Kritické napětí – zrno $D = 4$ mm	$\sigma_{crit.,4}$	MPa	14,2	0,95	6,7
Kritické napětí – zrno $D = 8$ mm	$\sigma_{crit.,8}$	MPa	16,2	1,01	6,2
Exponent singularity napětí	p	–	0,405	0,0142	3,5

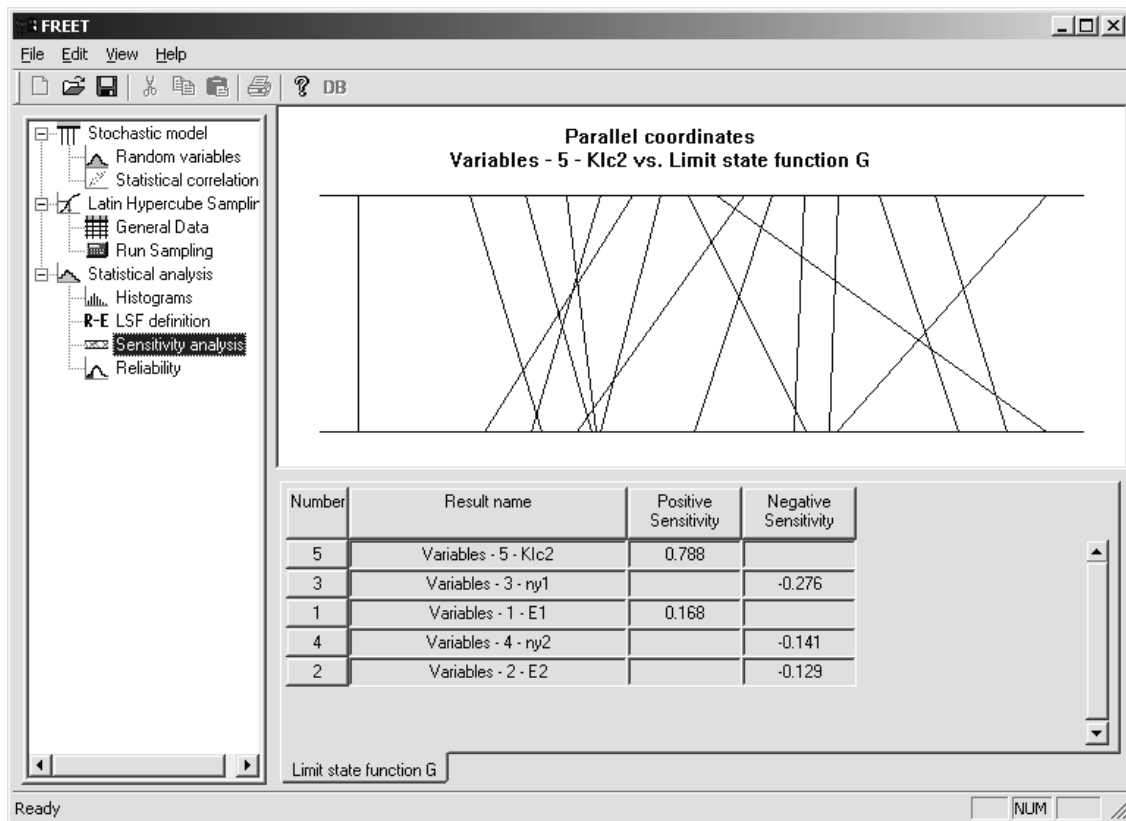


Obrázek 4 FREET – panel výsledků statistické analýzy.

Představu o vlivu proměnlivosti vstupních náhodných veličin na proměnlivost sledované veličiny výstupní si lze udělat z výsledků citlivostní analýzy. V Tabulce 4 se tyto výsledky uvádějí ve formě koeficientů párové korelace – výsledná hodnota tedy leží mezi +1 (funkční závislost vstupní a výstupní veličiny) a -1 (negativní závislost). Na Obrázku 5 ilustruje použití tzv. paralelních souřadnic citlivost proměnlivosti lomové houževnatosti částice na proměnlivost kritického napětí v případě $D = 4$ mm.

Tabulka 4 Výsledky citlivostní analýzy

Veličina výstupní / vstupní	E_1	E_2	ν_1	ν_2	K_{Ic2}
Kritické napětí – zrno $D = 4$ mm	-0,43	0,42	-0,18	0,12	0,79
Kritické napětí – zrno $D = 8$ mm	-0,39	0,37	-0,16	0,10	0,82
Exponent singularity napětí	0,68	-0,68	0,20	-0,18	-0,02



Obrázek 5 FREET – ukázka možností výsledků citlivostní analýzy.

5. Závěr

Z výsledků statistické analýzy lze usuzovat, že reálně odhadnutý rozptyl vstupních parametrů modelu (modul pružnosti, Poissonovo číslo matrice a částice, lomová houževnatost částice) nevede k dramatickým změnám v hodnotách výsledného kritického napětí potřebného k přelomu částice kameniva a velmi málo ovlivňuje rozptyl exponentu singularity napětí.

Z výsledků citlivostní analýzy vyplývá možnost používat v dalších výpočtech stejné hodnoty Poissonova čísla a rozhodující pro výpočet kritického napětí (i exponentu singularity napětí) je poměr modulů pružnosti obou komponent. Tento závěr je zřejmě důsledkem použití 2D výpočtového modelu.

Klíčovou veličinou pro rozlomení částice kameniva se jeví hodnota její lomové houževnatosti.

6. Poděkování

Práce na tomto příspěvku byly podporovány z prostředků projektů GA ČR 103/03/1350, GA AV K2076106 a výzkumného záměru CEZ: J22/98: 261100009.

7. Literatura

- ANSYS, Users Manual (2001) Version 5.7, Swanson Analysis System, Inc., Houston, Pennsylvania.
- Bažant, Z. P. & Planas, J. (1998) Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials, CRC Press, Boca Raton, Florida.
- FREET, Program Documentation (2002) Revision 09, Novák, D. & kol., Ústav stavební mechaniky FAST VUT v Brně, Brno.
- Karihaloo, B. L. (1995) Fracture mechanics of concrete. Longman Scientific & Technical, New York.
- Keršner, Z., Náhlík, L. & Knésl, Z. (2002a) Lomová procesní zóna betonu: interakce trhliny – kamenivo. *CD sborník Inženýrská mechanika 2002*, Svratka, 10.
- Keršner, Z., Náhlík, L. & Knésl, Z. (2002b) Analýza interakce kamenivo-trhliny z hlediska lomových charakteristik betonu. *Beton*, 5, 40-43.
- Knésl Z., Knápek A. & Bednář K. (1998) Evaluation of the critical stress in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. *Proc. Int. Conf. Surface Modification Technologies XI*. (T. S. Sudarshan, M. Jeandin & K. A. Khor eds), The Institute of Metals, London, 153-159.
- Knésl, Z., Náhlík, L. & Keršner, Z. (2001) Calculation of the critical stress in two-phase materials. *Proc. Int. Conf. Structural Engineering, Mechanics and Computation SEMC 2001*, Cape Town, 737-744.
- Lipetzky P. & Knésl Z. (1995) Crack-particle interaction in a two-phase composite. Part II: crack deflection. *International Journal of Fracture*, 73:1, 81-92.
- Merchant, I. J., Macphee, D. E., Chandler, H. W., Henderson R. J. (2001) Toughening cement-based materials through the control of interfacial bonding. *Cement and Concrete Research*, 31, 1873-1880.
- Náhlík, L., Keršner, Z. & Knésl, Z. (2003) Modelování dvoufázového prostředí: vliv tvaru a velikosti částic. *Sborník Modelování v mechanice 2003* (J. Brožovský & I. Kološ eds), Fakulta stavební VŠB-TUO, Ostrava, 112-117.
- Novák, D., Pukl, R., Rusina, R., Vořechovský, M. & Červenka, V. (2002) Statistical, Sensitivity and Reliability Assessment of Computationally Intensive Problems: Nonlinear Fracture Mechanics Analysis. *Proc. Int. Conf. Reliability and Diagnostics of Transport Structures and Means 2002*, Pardubice, 252-260.
- Novák, D., Teplý, B. & Keršner, Z. (1997) The role of Latin Hypercube Sampling method in reliability engineering. *Proc. Int. Conf. ICOSSAR '97*, Kyoto, 403-406.
- Vořechovský, V. & Novák, D. (2002) Correlated Random Variables in Probabilistic Simulation. *Proc. 4th Symp. Civil Engineering*, Munich.