

SOME CONDITIONS FOR EXISTENCE OF R-WAVES IN AN ORTHOTROPIC ELASTIC HALF-PLANE

J. Červ¹

Summary: *In the paper are studied some conditions which are necessary for the existence of Rayleigh (edge) waves in an orthotropic elastic half-plane. A non-zero angle θ between body axes x,y and principal material axes 1,2 is supposed. Typical orthotropic materials are then considered as examples.*

1. Úvod

Máme-li tenký homogenní izotropní materiál ve stavu rovinné napjatosti, pak z vlnově-mechanického hlediska je situace poměrně jasná. V neohraničeném prostředí se mohou šířit dvě vlny, jedna dilatační (podélná) a jedna smyková (příčná). Tyto vlny se šíří prostředím každá svojí rychlostí nezávisle na směru šíření. Přibereme-li do svých úvah hranici těleso-volný povrch (okraj), pak podél takovéto hranice se mohou šířit také t.zv. Rayleighovy vlny (R-vlny). Je-li tato hranice přímá, potom rychlost R-vln nezávisí na vlnové délce.

Lamináty jsou kompozitní materiály složené ze dvou či více tenkých vrstev vyztužených vláken (t.zv. lamin). Vlastnosti laminátů jsou dány vlastnostmi jednotlivých lamin, jejich vzájemným natočením, jejich posloupností a počtem. Výsledkem takové skladby jsou anizotropní a nehomogenní materiálové vlastnosti laminátů. Z makromechanického hlediska můžeme často zanedbat nehomogenní strukturu materiálu. Anizotropní chování lze pak popsat ortotropním či příčně izotropním modelem. Tenké lamináty zatěžované „in plane“ lze pro dostatečně dlouhé vlnové délky často popsat ortotropním materiálovým modelem ve stavu rovinné napjatosti. V takovém modelu se v obecném směru šíří pouze jedna kvazipodélná (qL) a jedna kvazipříčná (qT) vlna přičemž jejich rychlost a polarizace se mění v závislosti na směru šíření. Při konečnoprvkové simulaci šíření vln podél volného okraje ortotropního tenkého pásu [1] se nepodařilo (na rozdíl od izotropního modelu) od sebe odseparovat vliv qT a případné R-vlny. Příspěvek si klade v prvním kroku za cíl prozkoumat některé podmínky za kterých může existovat R-vlna v elastické polovině s obecnou ortotropií.

¹ Ing. Jan Červ, CSc., Ústav Termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8,
e-mail: cerv@it.cas.cz

2. Formulace problému a řešení

Uvažujme elastickou polorovinu ve stavu rovinné napjatosti. Necht'volný okraj poloroviny je dán souřadnicí $y = 0$. Předpokládáme, že osy materiálové symetrie 1,2 svírají s příslušnými tělesovými osami x,y obecně nenulový úhel $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$. Pro $\theta = 0$ dostáváme případ speciální ortotropie, kdy osy 1,2 materiálové symetrie splývají s tělesovými osami x,y . Třetí osa z je totožná s materiálovou osou 3 (otáčení se děje kolem ní). Osy x,y,z tak tvoří pravotočivý kartézský systém souřadnic. V soustavě os materiálové symetrie platí následující vztah mezi složkami napětí a přetvořením

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} . \quad (1)$$

Přitom pro elastické koeficienty B_{ij} matice $[B]$ platí známé vztahy

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} , & B_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} , \\ B_{12} &= \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} , & B_{66} &= G_{12} . \end{aligned} \quad (2)$$

V systému souřadnic x,y platí

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} . \quad (3)$$

Členy matice $[Q]$, t.j. Q_{ij} , $i = 1,2,6$, jsou závislé na elastických koeficientech B_{ij} matice $[B]$ a na úhlu θ . Jejich poněkud složitější tvar lze najít např. v [2]. Pohybové rovnice bez uvažování objemových sil mají v obecném případě tvar

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \quad (4)$$

kde ρ je hustota materiálu, $i,j = x,y$. Rozepíšeme-li (4) do složek, dostaneme s ohledem na (3) a na vztah $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$ (symbolem u_i jsou označeny složky vektoru posunutí), pohybové rovnice vyjádřené v posunutích $u = u_x$ a $v = u_y$. Budeme tak mít

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Q_{11} \cdot u_{,xx} + 2Q_{16} \cdot u_{,xy} + Q_{66} \cdot u_{,yy} + Q_{16} \cdot v_{,xx} + (Q_{12} + Q_{66}) \cdot v_{,xy} + Q_{26} \cdot v_{,yy} . \quad (5)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = Q_{66} \cdot v_{,xx} + 2Q_{26} \cdot v_{,xy} + Q_{22} \cdot v_{,yy} + Q_{16} \cdot u_{,xx} + (Q_{12} + Q_{66}) \cdot u_{,xy} + Q_{26} \cdot u_{,yy} . \quad (6)$$

Řešení pohybových rovnic (5) a (6) předpokládáme ve tvaru

$$u(x, y, t) = U(y) \cdot \sin[k(x - ct)], \quad v(x, y, t) = V(y) \cdot \cos[k(x - ct)]. \quad (7)$$

Dosadíme-li (7) do pohybových rovnic (5) a (6) a zavedeme-li pro stručnost veličiny

$$\beta_1^2 = \frac{Q_{66} - Q_{12}}{2\rho}, \quad (8)$$

$$\beta_2^2 = \frac{2Q_{11} - (Q_{12} + Q_{66}) \cdot \frac{Q_{16}}{Q_{26}}}{2\rho}, \quad (9)$$

$$\beta_3^2 = \frac{2Q_{22} - (Q_{12} + Q_{66}) \cdot \frac{Q_{26}}{Q_{16}}}{2\rho}, \quad (10)$$

dostaneme po delších úpravách obyčejné diferenciální rovnice pro amplitudy $U(y)$ a $V(y)$.

Budeme tak mít

$$\frac{\partial^2 U(y)}{\partial y^2} \cdot \beta_1^2 - U(y) \cdot k^2 \cdot \beta_2^2 \cdot \left[1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}\right] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} \cdot \beta_3^2 - V(y) \cdot k^2 \cdot \beta_1^2 \cdot \left[1 - \frac{c^2}{\beta_1^2}\right] = 0. \quad (12)$$

Pro amplitudy U , V požadujeme, aby splňovaly následující podmínky

$$\lim_{y \rightarrow \infty} U(y) = 0 \quad \& \quad \lim_{y \rightarrow \infty} V(y) = 0. \quad (13)$$

Ukazuje se, že pro většinu známých materiálů je $(\beta_1)^2 > 0$ (a tudíž i $\beta_1 > 0$). Pro $(\beta_2)^2$ a $(\beta_3)^2$ toto neplatí. Mohou nabývat nezáporných i záporných hodnot.

Označíme-li pro stručnost čitatele výrazu (9) jako Z_U a čitatele výrazu (10) jako Z_V pak místo (9) můžeme psát $(\beta_2)^2 = Z_U / 2\rho$ a místo výrazu (10) budeme mít $(\beta_3)^2 = Z_V / 2\rho$.

TABULKA 1

Property	Glass - Epoxy	Boron - Epoxy	Graphite - Epoxy
E_1 [GPa]	53.78	206.85	206.85
E_2 [GPa]	17.93	20.69	5.17
ν_{12}	0.25	0.3	0.25
G_{12} [GPa]	8.96	6.90	2.59
$Q_{66} - Q_{12}$ [GPa]	4.39	0.63	1.29

Podrobným rozбором zjistíme, že podmínice (13) vyhovujú v podstate dva prípady. Prvý prípad nastane pro $Z_V < 0$ & $Z_U > 0$ & $(\beta_1)^2 > 0$. Tomu odpovídají amplitudy

$$\begin{aligned} U(y) &= D_1 \cdot \exp\left(-k \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \left[1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot y\right) , \\ V(y) &= D_2 \cdot \exp\left(-k \frac{\beta_1}{\beta_3} \cdot \left[\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \cdot y\right) . \end{aligned} \quad (14)$$

Přitom zřejmě požadujeme aby $c \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$. Symbol k představuje vlnové číslo a

$$\hat{\beta}_3 > 0, \beta_3 = i \cdot \hat{\beta}_3 .$$

Druhý případ nastane pro $Z_V > 0$ & $Z_U > 0$ & $(\beta_1)^2 > 0$. Tomu odpovídají amplitudy

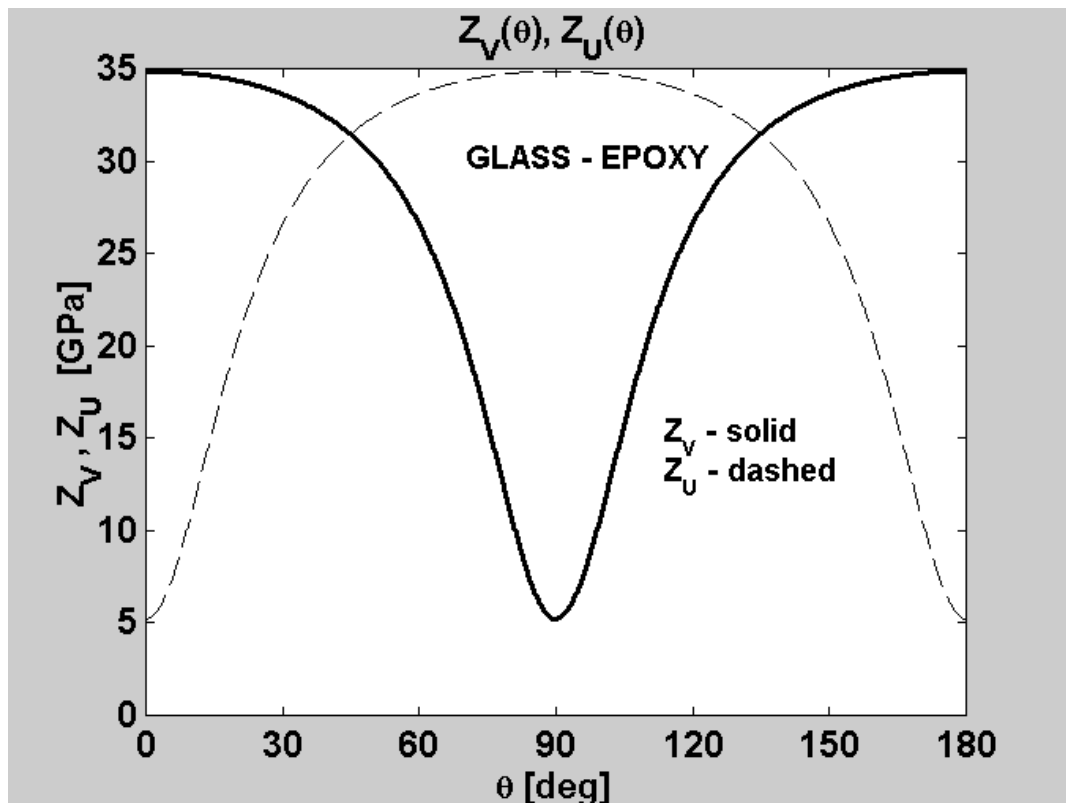
$$\begin{aligned} U(y) &= D_1 \cdot \exp\left(-k \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \left[1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot y\right) , \\ V(y) &= D_2 \cdot \exp\left(-k \frac{\beta_1}{\beta_3} \cdot \left[1 - \frac{c^2}{\beta_1^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot y\right) . \end{aligned} \quad (15)$$

Přitom předpokládáme, že $c < \beta_1$ & $c < \beta_2$. D_1 a D_2 vystupující ve (14) a (15) jsou dosud neurčené konstanty.

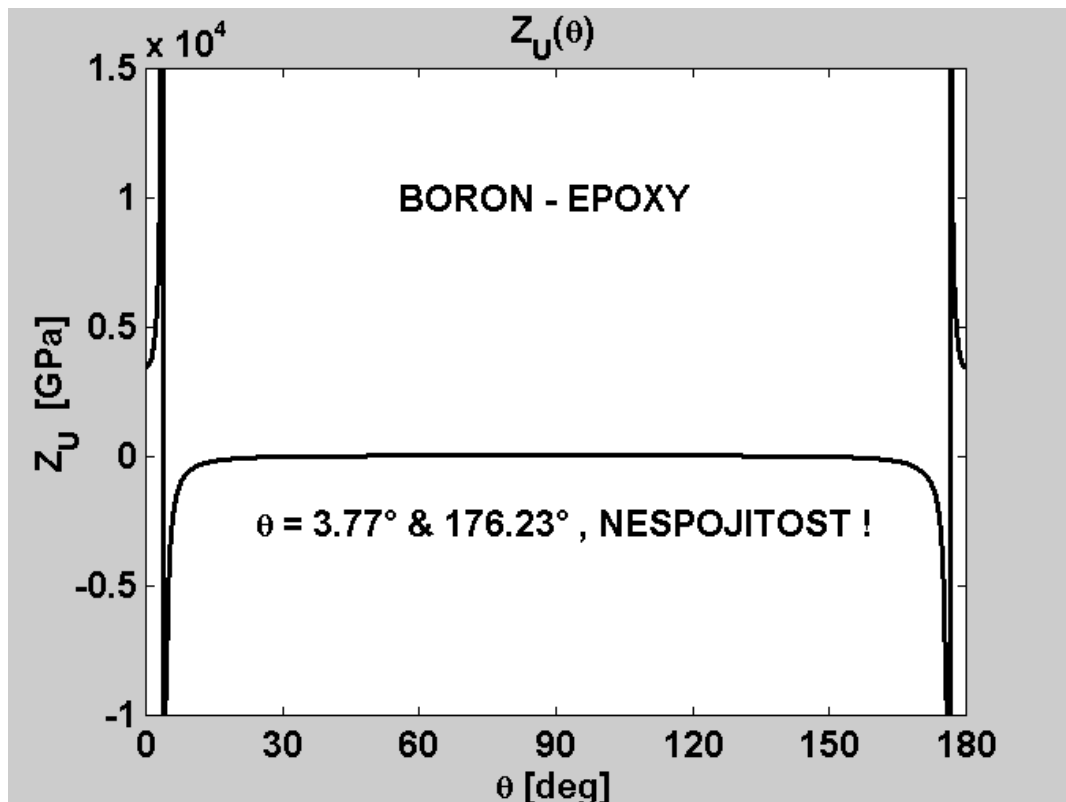
Na obr.1 vidíme průběh veličin Z_V a Z_U v závislosti na úhlu natočení materiálových os θ . Daný graf je vyneseno pro materiál SKLO – EPOXY, jehož elastické konstanty jsou uvedeny v tabulce 1 (převzato z [2]). Vidíme, že tento materiál odpovídá případu $Z_V > 0$ & $Z_U > 0$ a příslušné amplitudy jsou dány vztahy (15).

Vezmeme-li jiný materiál z tabulky 1, např. BÓR – EPOXY, nastává trochu složitější situace nežli v předchozím případě. Veličina Z_U je vynesena na obrázcích 2, 2a. Rozdíly mezi těmito dvěma obrázky jsou pouze v měřítku na svislé ose y . Vidíme, že průběh je nespojitý v bodech $\theta \cong 3.77^\circ$ & 176.23° . V těchto bodech je totiž člen $Q_{26} = 0$. Další změna znaménka Z_U nastává v bodech $\theta \cong 30.90^\circ$ & 149.10° , kde $Z_U = 0$. Z uvedených obrázků 2 až 3a je patrné, že obory $\theta \in \langle 3.77^\circ, 30.90^\circ \rangle \cup \langle 149.10^\circ, 176.23^\circ \rangle$ nejsou slučitelné z podmínkami (13).

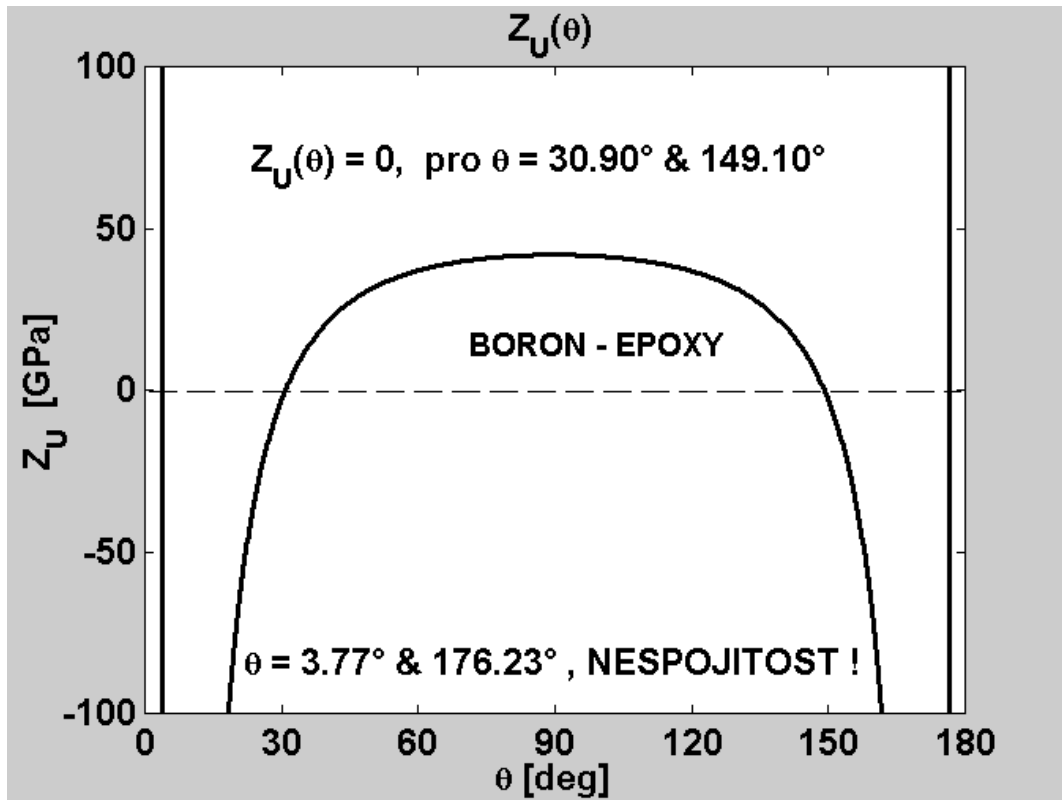
Na obr.4 jsou zobrazeny veličiny Z_V a Z_U v závislosti na úhlu natočení materiálových os θ pro materiál GRAFIT – EPOXY jehož elastické konstanty jsou uvedeny v tabulce 1. Vidíme, že zatímco případ speciální ortotropie pro $\theta = 0^\circ$ resp. 180° není slučitelný s podmínkami (13), případ $\theta = 90^\circ$ naopak slučitelný s těmito podmínkami je.



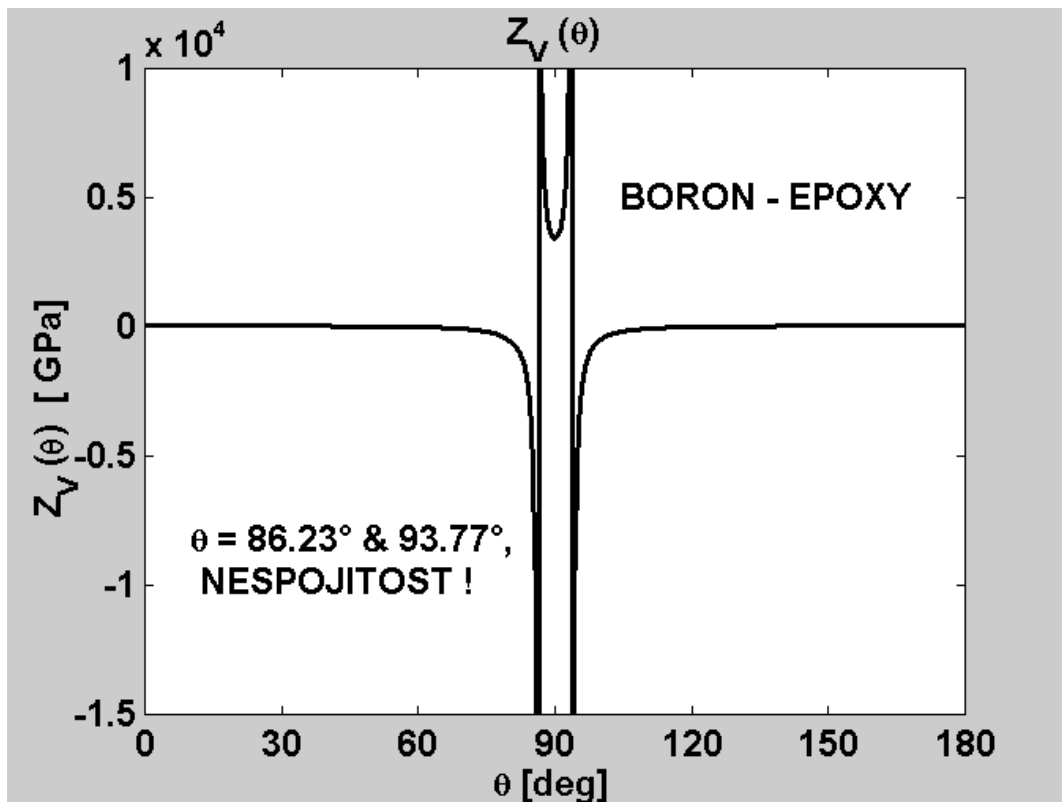
obr.1



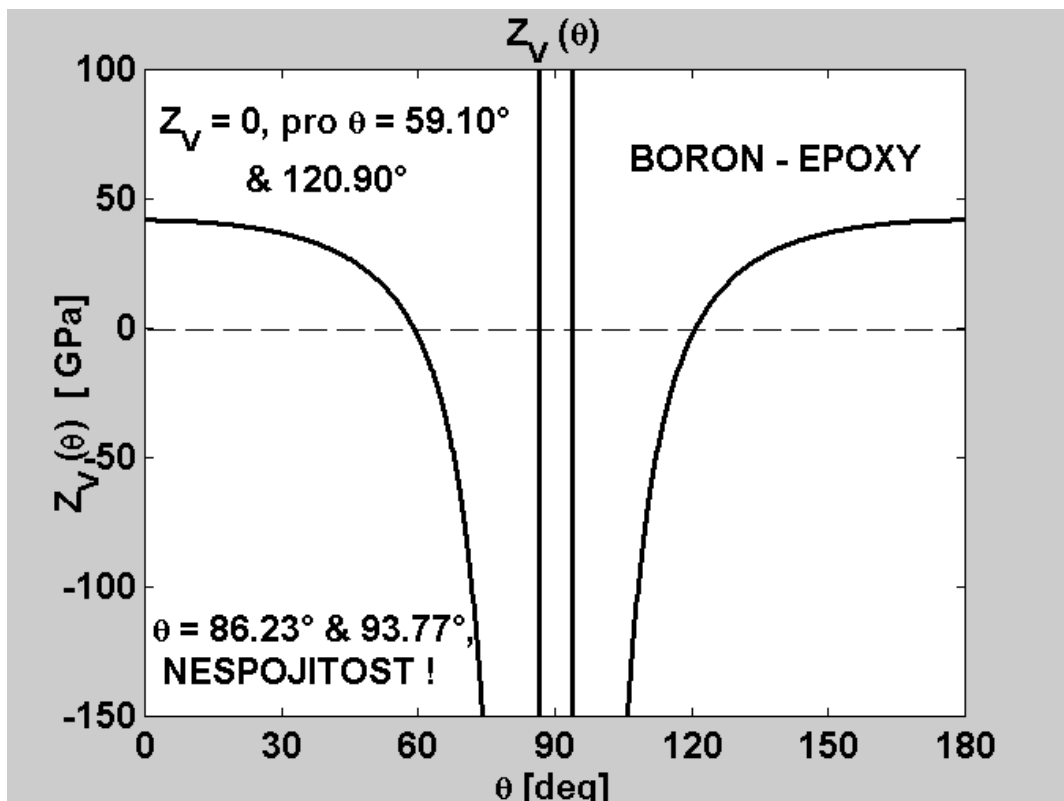
obr.2



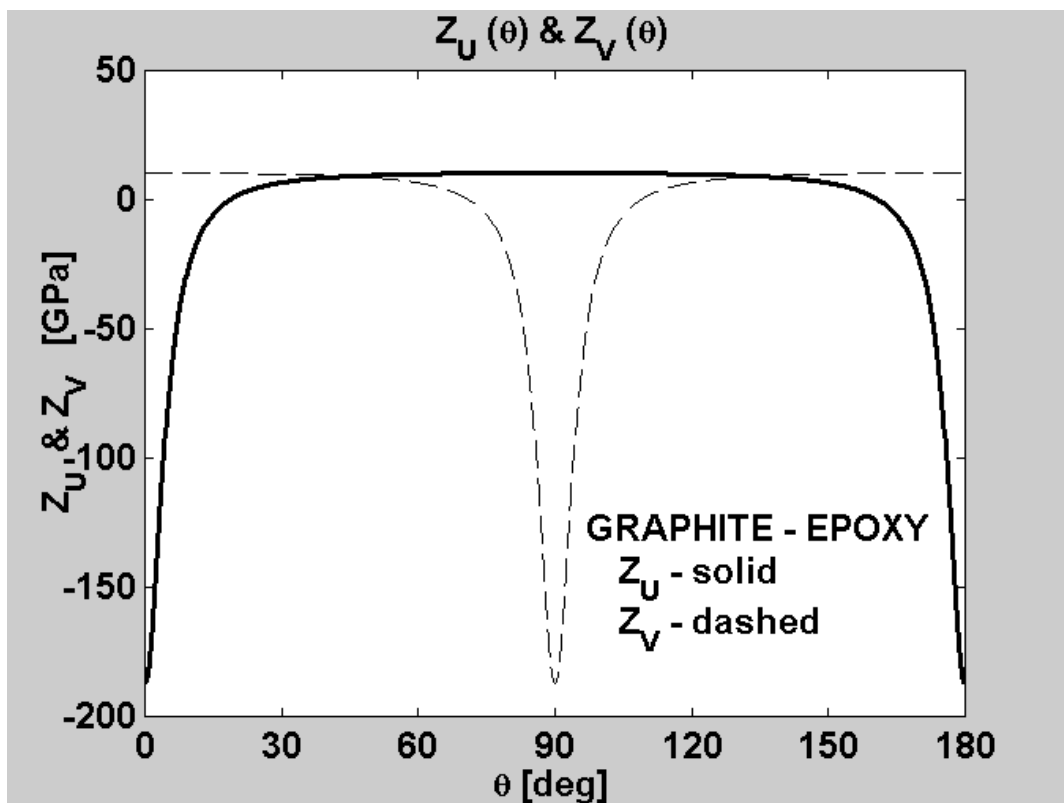
obr.2a



obr.3



obr.3a



obr.4

3. Závěr

V příspěvku jsou studovány některé podmínky, které je nutno splnit, aby v elastické ortotropní polorovině mohly existovat Rayleighovy vlny s vlastnostmi, které známe z izotropního prostředí. Uvažuje se přitom obecná ortotropie, t.j. předpokládá se natočení os materiálové symetrie oproti tělesovým osám o obecně nenulový úhel θ . Prozatím se ukazuje, že pokud takové vlny vůbec existují, pak tato existence bude silně materiálově závislá.

4. Poděkování

Tato práce vznikla v rámci grantového projektu **A2076001** podporovaném GA AV ČR.

5. Literatura

[1] Červ J. , Landa M. , Převorovský Z. : Acoustic Emission and Propagation of Transient Waves in Isotropic and Orthotropic Tensile Test Specimens. In : *31st Conference on Acoustics (Proceedings of the International Conference)*, Czech Technical University , Prague , May 31 to June 2 1994, 123 - 127

[2] Jones R.M. : *Mechanics of Composite Materials*. Scripta Book Company. Washington, D.C. 1975