

## TWO-PARAMETER DESCRIPTION OF CRACKS IN THE VICINITY OF INHOMOGENEITY

S. Seitl<sup>1</sup>, Z. Knésl<sup>2</sup>

**Summary:** *In case of two-parameter linear fracture mechanics a study of inhomogeneity influence on behaviour of short cracks is performed. The values of stress intensity factor ( $K_I$ ), T-stress and strain energy density (SED) are shown as a function of material constants of both components. The calculation of numerical values of mechanical parameters is accomplished by using finite element method ANSYS.*

### 1. Úvod

V literatuře se často uvádí, že krátké únavové trhliny vykazují ve srovnání s dlouhými únavovými trhlínami řadu anomálií a odlišností. Pod pojmem dlouhá trhlina rozumíme obvykle trhliny, jejichž délka je mnohem větší než charakteristický rozměr materiálu (např. velikost zrna) ve kterém se trhlina šíří. V takovém případě lze pak materiál považovat za spojitý a homogenní a pro popis sledované trhliny využít plně stávající aparát lomové mechaniky. Na druhé straně přestože má materiál z makroskopického hlediska homogenní strukturu, z mikroskopického hlediska může být nehomogenní. V případě krátkých trhlín, jejichž délka je srovnatelná s charakteristickým rozměrem materiálu, tj. v případě kdy nelze materiál považovat za homogenní kontinuum, je nutno postup klasické lomové mechaniky vycházející z mechaniky kontinua modifikovat (v lepším případě) případně odmítnout. Je zřejmé, že z tohoto hlediska nelze očekávat, že dlouhé a krátké únavové trhliny lze popsat stejným způsobem a pomocí stejných materiálových parametrů (vyskytujících se např. v Parisově rovnici pro popis rychlosti šíření únavových trhlín) a že výše zmíněné anomálie a odlišnosti v chování jsou dány odlišností obou objektů. Chování krátkých únavových trhlín (a

---

<sup>1</sup> Ing. Stanislav Seitl, Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žižkova 22, 616 62 Brno, e-mail: [seitl@ipm.cz](mailto:seitl@ipm.cz), tel. (+420) 532 290 351

<sup>2</sup> Prof. RNDr. Zdeněk Knésl CSc. Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žižkova 22, 616 62 Brno, [knesl@ipm.cz](mailto:knesl@ipm.cz), tel. (+420) 532 290 358

obecně trhlin při jejichž modelování nelze považovat materiál za spojitý a homogenní) závisí na řadě zejména strukturních faktorů, kterým se při popisu dlouhých trhlin vůbec neuvažují. Aplikace zejména experimentálních poznatků získaných při studiu dlouhých únavových trhlin na trhliny krátké musí tedy evidentně vést k rozporuplným závěrům.

Typickým příkladem krátkých únavových trhlin ilustrujících zmíněnou problematiku jsou krátké trhliny mikrostrukturálního typu, Suresh (1998), tj. trhliny jejichž velikost je srovnatelná s velikostí zrna materiálu. Pro chování takové trhliny může být rozhodující její interakce s nejbližším materiálovým zrnem. Navíc je nutno uvážit i skutečnost, že jednotlivá materiálová zrna jsou anizotropní a tedy vzhledem k různé vzájemné orientaci sousedních zrn se jedná o oblasti s různými materiálovými charakteristikami. V našem případě modelujeme tedy strukturu materiálu jako nehomogenní prostředí tvořené jednotlivými materiálovými zrny s odlišnými vlastnostmi oddělenými hranicí podél níž se materiálové parametry mění skokem. Hodnota elastických konstant jednotlivých materiálů závisí na jejich orientaci s ohledem na aplikované zatížení. Dvě sousední oblasti s rozdílnou orientací reprezentují v tomto modelu dva různé izotropní materiály, s hodnotami elastických konstant  $E_1$ ,  $E_2$  (modul pružnosti v tahu),  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  (Poissonova konstanta) pro oba materiály.

Problém, kterému je v rámci dvouparametrové mechaniky řešen v tomto příspěvku je lomově-mechanický popis krátké trhliny, jejichž chování je ovlivněno existencí blízké nehomogenity. Materiálová nehomogenita je zde modelována jako kruhová inkluze a složky vektoru posuvu jsou na rozhraní mezi dvěma materiály spojitě (tj. případ ideální adheze).

Předpokládáme, že jsou splněny předpoklady lineární elastické lomové mechaniky, tj. zejména chování obou materiálů je lineárně elastické a k případnému porušení dochází křehkým porušením. Jsou studovány dva případy okrajových podmínek v prvním případě se jedná o silové namáhání, ve druhém je pak jedná o deformační zatížení. Protože nejvýznamnější a pro další šíření trhliny nejkritičtější je tahový (normálový) mód zatížení, uvažujeme zatížení právě tímto módem.

Na základě uvedených úvah a předpokladů jsou formulovány cíle této práce následovně:

- (1) navrhnout a realizovat numerický model krátké trhliny situované v blízkosti nehomogenity, která modeluje materiálové zrno
- (2) pro studovanou konfiguraci vypočítat v rámci dvouparametrové lomové mechaniky odpovídající lomově-mechanické parametry (tj. součinitel intenzity napětí, T-napětí a hustotu deformační energie),
- (3) posoudit možný vliv constraintu (vyjádřeného pomocí T-napětí) na chování krátkých trhlin v okolí nehomogenity.

Příspěvek navazuje na práci Seitl & Knésl (2002) kde byla studována interakce krátké trhliny s polonekonečným rozhraním.

## 2. Základní vztahy

Rozložení pole napětí v okolí čela trhliny v rámci dvouparametrové lineární elastické lomové mechaniky pro normálový mód namáhání je dáno následujícím vztahem (Williams (1957), Anderson (1995)):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + T \delta_{i1} \delta_{1j}, \quad (1)$$

kde  $K_I$  je součinitel intenzity napětí pro normálový mód,  $(r, \theta)$  jsou polární souřadnice s vrcholem v kořeni trhliny,  $f_{ij}'(\theta)$  je známá funkce polárního úhlu  $\theta$  a  $T$  je konstantní člen jež představuje složku napětí  $\sigma_{xx}$  působící rovnoběžně s povrchem trhliny a označuje se jako T-napětí.

Šíření dlouhé únavové trhliny lze pak charakterizovat v rámci dvouparametrové lomové mechaniky modifikovanou Parisovou –Erdoganovou rovnicí (Bednář (1999)).

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (K_I^{ef})^m, \quad (2)$$

kde  $C$  a  $m$  jsou materiálové konstanty a  $K_I^{ef}$  efektivní součinitel intenzity napětí, jež je funkcí T-napětí (3).

Uvedená rovnice tedy vztahuje rychlost šíření únavové trhliny k hodnotě součinitele intenzity napětí a velikosti constraintu popsaného hodnotou T-napětí. V článku Knésl & Seitl & Hutař (2002) autoři uvádějí následující vztah pro výpočet efektivní hodnoty součinitele intenzity napětí  $K_I^{ef}$  jako funkci T-napětí;  $\sigma_0$  značí mez kluzu:

$$K_I^{ef} = K_I \left( 1 - 0.3 \left( \frac{T}{\sigma_0} \right) + 0.52 \left( \frac{T}{\sigma_0} \right)^2 - 0.85 \left( \frac{T}{\sigma_0} \right)^3 \right). \quad (3)$$

Druhý lomově mechanický parametr, jehož hodnota je v příspěvku sledována v závislosti na hodnotě T-napětí pro studovanou konfiguraci je hustota deformační energie ( $dW/dV$ ), např. (Sih, (1973))

$$dW / dV = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

kde  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  jsou složky pole napětí a deformací.

Redukcí vztahu (4) na rovinný problém výpočtu hustoty deformační energie pomocí složek napětí lze obdržet následující tvar:

$$dW / dV = \frac{1}{8\mu} \left[ \kappa_1 (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \right] \quad (5)$$

kde  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  modul ve smyku a

$\kappa_1 = 1 - 2\nu$  pro stav rovinné deformace

$\kappa_2 = (1 - \nu)/(1 + \nu)$  pro stav rovinné napjatosti.

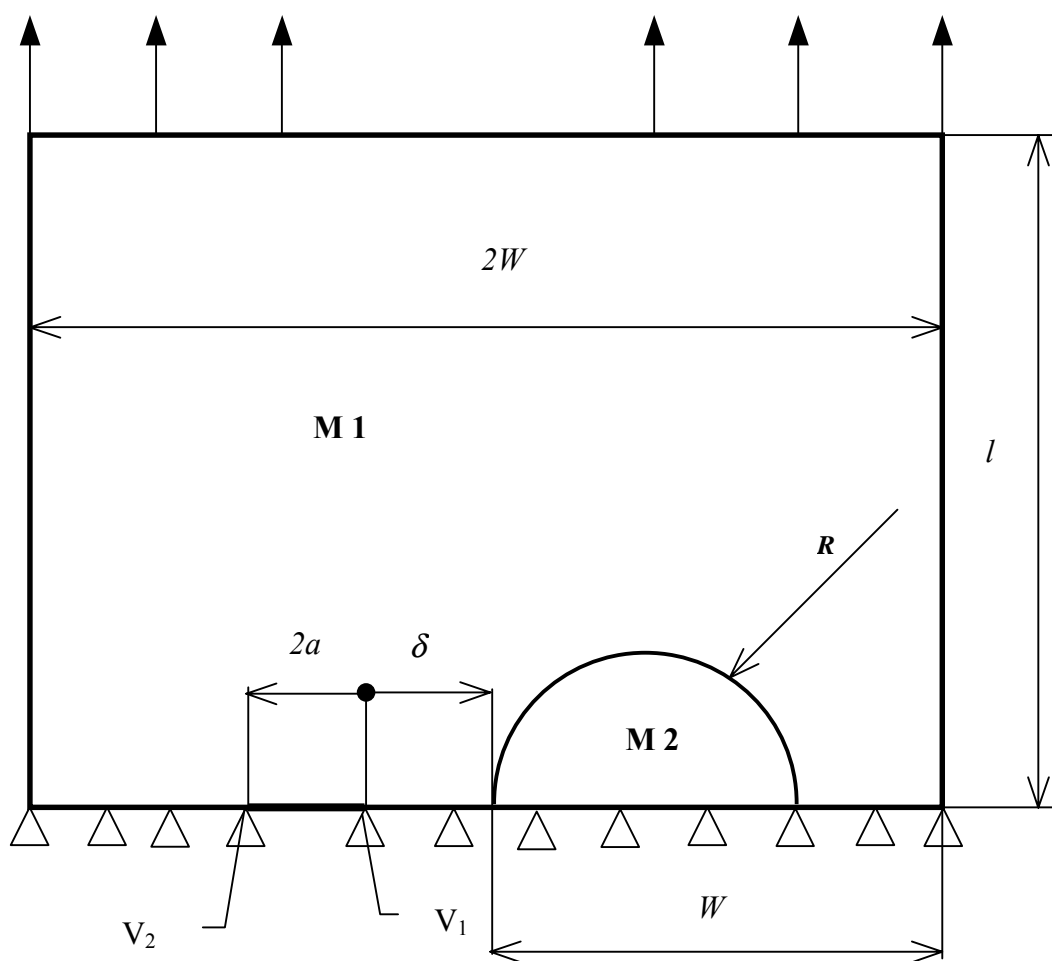
Hustotu deformační energie lze vyjádřit pomocí prvních dvou členů Williamsova rozvoje viz Sladek et al. (1997) (tzn. singulárního ( $K_I$ ) a konstantního (T-napětí)):

$$\frac{dW}{dV} = \frac{K_I^2}{16\mu\pi r} [(\eta - \cos\theta)(1 + \cos\theta)] + \frac{K_I T}{4\mu\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} [(\eta - 2) - \cos\theta + 2\cos^2\theta] + \frac{1+\eta}{16\mu} T^2 \quad (6)$$

kde

$\eta=3-4\nu$  pro stav rovinné deformace

$\eta=(3-\nu)/(1+\nu)$  pro stav rovinné napjatosti.



**obr.1. Model použitý k výpočtu parametrů charakterizující chování trhliny v blízkosti nehomogenity. Délka trhliny  $2a=1\text{mm}$ ,  $\delta=1\text{mm}$ ,  $W=50\text{mm}$  a  $l=100\text{mm}$ .**

## 2. Rozbor sledované problematiky

Rozboru studia vlivu již existující nehomogenity, nebo sousedního materiálového zrna na chování z jejich blízkosti se vyskytující krátké trhliny se věnuje tato část příspěvku.

Studium je provedeno na numerickém modelu viz obr. 1, kde M1 značí lineárně elastický materiál o vlastnostech:  $E_1=210000$  MPa a  $\nu_1=0.3$ . Parametry druhého materiálu M2 jsou označeny  $E_2$  a  $\nu_2$ . Z důvodu zjednodušení úlohy je vysloven předpoklad podle něhož je druhý materiál je charakterizován poměrem Youngových modulů  $E_1/E_2$  a navíc  $\nu_2=\nu_1$ . Bi-materiálové rozhraní je modelováno jako hranice mezi těmito různými elastickými materiály (M1, M2).

V rámci studia budem sledovat změnu lomově mechanických parametrů  $K_I$  a  $T$  v obou vrcholech krátké trhliny.  $V_1$  je vrchol blíže materiálové nehomogenitě, jehož vzdálenost od rozhraní  $\delta$  je konstantní a rovna 1mm. Druhý vrchol,  $V_2$ , se pak nachází ve vzdálenosti  $\delta+2a$  od materiálového rozhraní. Poloměr nehomogenity  $R$  se během výpočtu měnil v rozmezí od 1 do 10 mm.

Zatížení bylo voleno tak, aby v homogenním případě byly pro silové i deformační zatížení hodnoty lomově mechanických parametrů  $K_I$  a  $T$  stejné. Hodnota posunutí  $u_{\text{appl}}=0.1$  mm odpovídá v tomto případě zatížení napětím  $\sigma_{\text{appl}}=231$  MPa.

### 3. Realizace systémem ANSYS

#### 3.1 Výpočtový model

Problém byl modelován jako rovinná úloha za podmínek rovinné deformace při použití prvků PLANE 82 (což jsou 8 nodové prvky se 4 středovými a 4 vrcholovými uzly). Souřadný systém je umístěn v kořeni  $V_1$ . Formulace symetrických okrajových podmínek je zřejmá z obr.1. Bi-materiálový hranice (materiálový přechod) je modelována tak, že při přechodu z jednoho materiálu do druhého jsou složky posunutí a odpovídající komponenty tenzoru napětí spojitě.

#### 3.2 Metodika výpočtu sledovaných parametrů

##### a) Součinitele intenzity napětí

Pro výpočet byla použita standardní procedura systému ANSYS nazvaná KCALC. Pro kontrolu přesnosti řešení byly hodnoty přepočítány s použitím J-integálu (Knésl & Hutař & Seitl (2002))

##### b) T-napětí

Pro výpočet byla užita diferenční metoda, která vychází ze vztahu (složky napětí jsou vypočteny pro  $\theta=0^\circ$ ) (Yang & Ravi-Chandar (1999))

$$T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$$

Pro kontrolu přesnosti výpočtu bylo navíc určeno na základě porovnání hodnot složky napětí  $\sigma_{xx}$  na líci trhliny, tj. pro  $\theta=\pi$ .

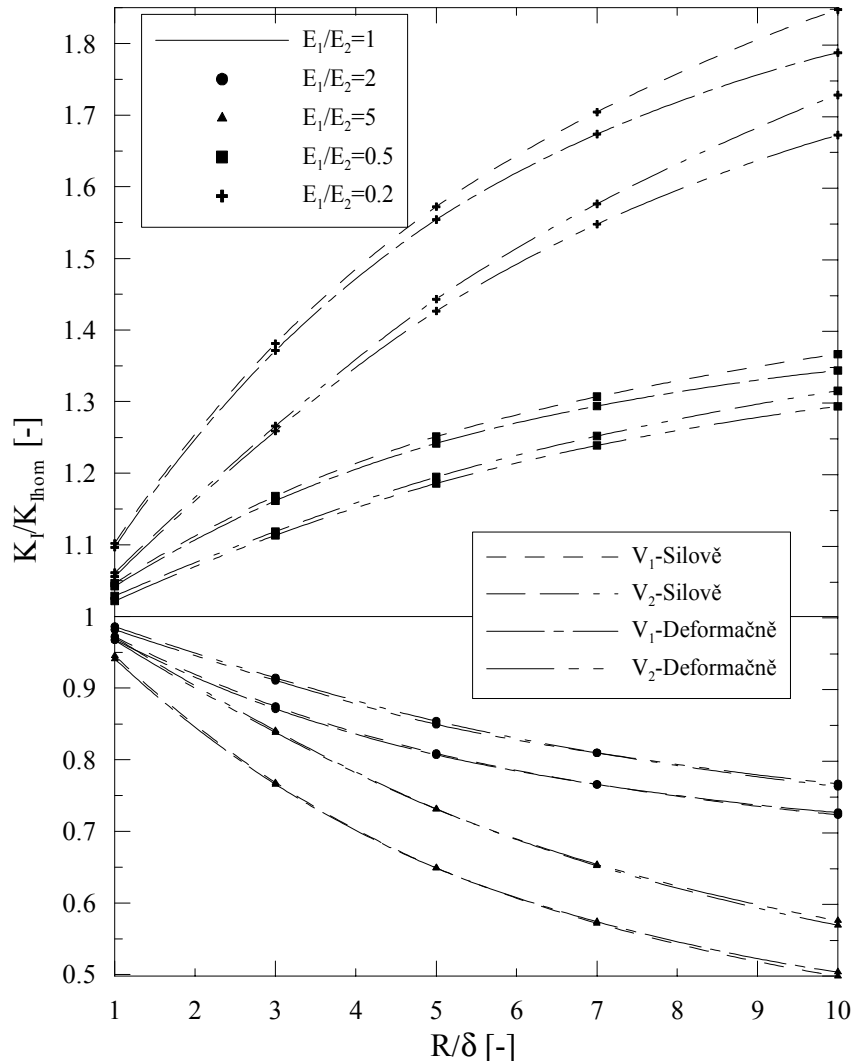
$$T = \sigma_{xx}$$

Hodnota T-napětí byla získaná v obou uvedených případech extrapolací lineární části závislosti T-r pro  $r \rightarrow 0$ .

c) Hustota deformační energie ( $dW/dV$ )

Pro výpočet byl použit odpočet napětí  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  ve vzdálenosti  $r$  pro směr šířící se trhliny, což je v tomto případě  $\theta=0^\circ$ . K výpočtu hodnot SED byly pak hodnoty napětí dosazeny do vztahu (5).

Srovnávací hodnoty  $dW/dV$  byly získány dosazením známých vypočtených hodnot  $K_I$ ,  $T$  do vztahu (6).



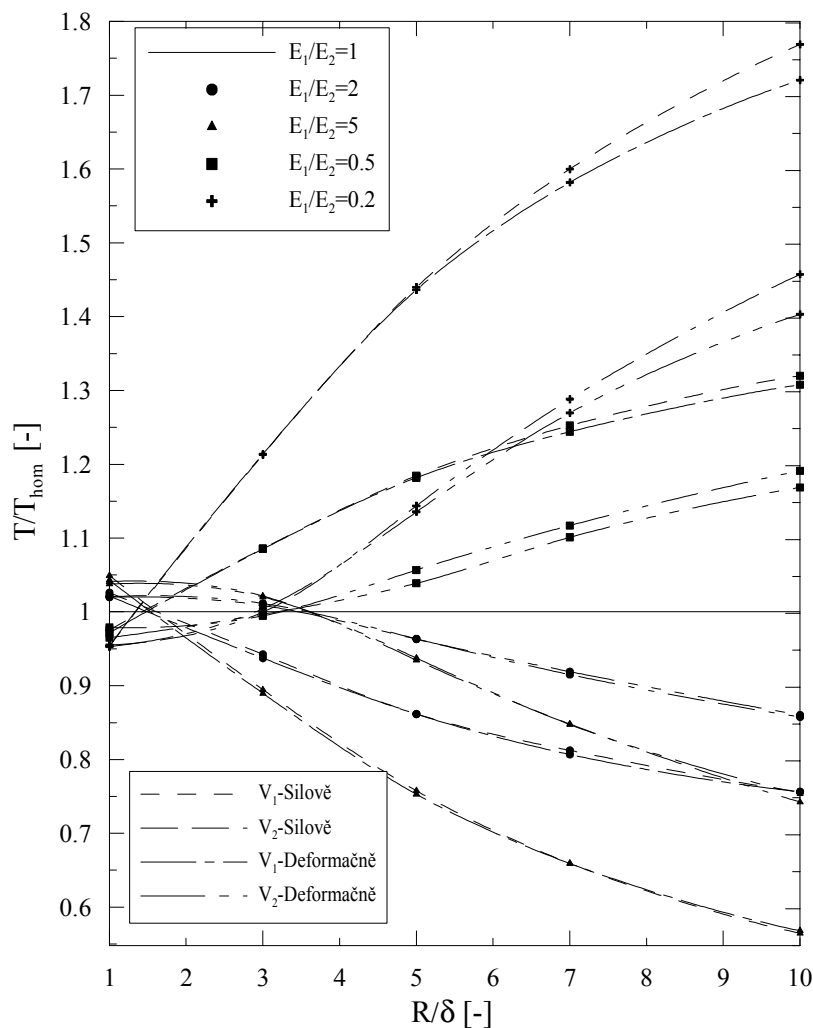
**obr.2. Normalizované hodnoty součinitele intenzity napětí v závislosti na vzdálenosti a velikosti nehomogenity zatížené silově a deformačně.**  
Hodnota  $K_I/K_{Ihom}=1$  odpovídá homogennímu případu.

#### 4. Numerické výsledky

Výsledky rozsáhlých numerických výpočtů, které byly získány v rámci řešení presentované problematiky tvoří výpočty lomové mechanické parametry  $K_I$ ,  $T$  a  $dW/dV$  pro krátkou trhlinu v blízkosti nehomogenity zatíženou silově ( $\sigma_{appl}$ ) a deformačně ( $u_{appl}$ ). Hodnoty  $K_I$ ,  $T$  a  $dW/dV$  jsou určeny v závislosti na velikosti nehomogenity a poměru Youngových modulů  $E_1/E_2$ .

Výpočty hodnot součinitele intenzity napětí jsou zobrazeny v závislosti na velikosti nehomogenity pro oba vrcholy trhliny ( $V_1, V_2$ ) uvedeny na obr. 2. Z výsledků je vidět pokles či nárůst hodnot v závislosti zda nehomogenita je z materiálu s nižší či vyšší hodnotou Youngova modulu. Rozdíl v zatěžování je vidět lépe u vyšších hodnot poměru  $E_1/E_2$  modulů a pro nejvyšší sledované hodnoty poměru  $R/\delta$ , kde je patrné, že silové zatěžování nabývá vyšších hodnot než deformační a lze jej tedy v tomto případě považovat za nebezpečnější. Výsledky lze tedy použít v případě formulací kritérií stability deformačního i napět'ového typu. V dalším jsou uvedeny výsledky pouze pro silové zatížení.

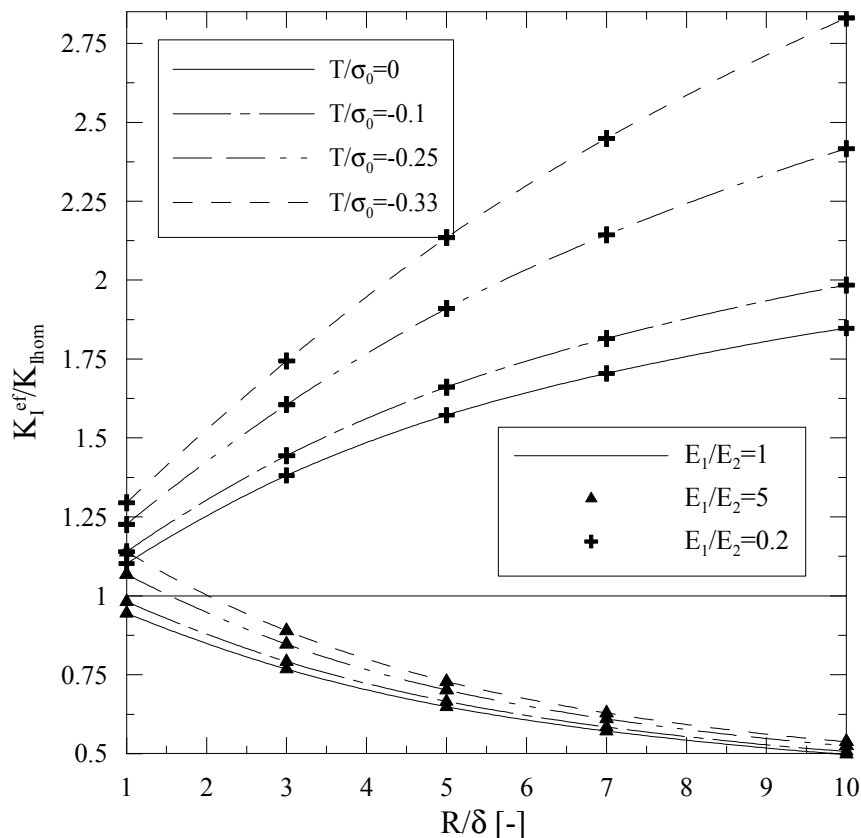
Na obr.3. kde jsou znázorněny průběhy hodnoty druhého parametru lomové mechaniky T-napětí v závislosti na  $R/\delta$ . Pro malý poměr nehomogenity  $R$  a vzdálenosti  $\delta$  dochází k nepatrnému ovlivnění hodnot T-napětí a to řádově do 10% s rostoucí velikostí nehomogenity narůstá i velikost hodnot T-napětí. Vliv rozdílného způsobu zatěžování má viditelný efekt až pro velké poměry  $R/\delta$  nehomogenit.



**obr.3. Normalizované hodnoty T napětí v závislosti na vzdálenosti a velikosti nehomogenity zatížené silově a deformačně.**  
Hodnota  $T/T_{\text{hom}}=1$  odpovídá homogennímu případu.

Protože se zabýváme dvouparametrovým popisem je třeba prokázat vliv nehomogenity jako celkový v rámci dvouparametrové lomové mechaniky proto jsou na obr.4. vyneseny hodnoty normované efektivní hodnoty součinitele intenzity napětí (viz. rovnice(3)) pro případ silového namáhání ve vrcholu  $V_1$ , které v sobě zahrnují vliv současně obou parametrů ( $K_I$ ,  $T$ ). Z uvedeného grafu lze přibližně odhadnout jaký vliv má velikost poměru  $T/\sigma_0$  na rychlost šíření únavové trhliny. Dochází vždy v důsledku záporné hodnoty  $T$ -napětí k nárůstu hodnoty  $K_I^{ef}$  řádově v desítkách procent.

Na obr.5 je uveden vliv rozhraní na hodnoty hustoty deformační energie. Jsou zde presentovány tři různé přístupy k výpočtu hodnot hustoty deformační energie  $dW/dV$ : za prvé z definice viz rovnice (5) (čili pomocí v dané vzdálenosti odečtených hodnot napětí), což apriorně zahrnuje všechny členy Wiliamsova rozvoje. Dále s uvážením prvních dvou členů (singulárního  $K_I$  a konstantního  $T$ ) uvedeného rozvoje viz rovnice (6) označené  $dW/dV(T)$  a poslední výpočet bez uvážení konstantního členu  $T$ -napětí (čili pro hodnotu  $T=0$ ) označené  $dW/dV(T=0)$ . Z grafu je patrné že užitím dvouparametrové lomové mechaniky namísto jednoparametrové dosáhnem výrazného upřesnění hodnot a to ve všech sledovaných případech. Trendy křivek jsou obdobné jako pro součinitele intenzity napětí čili pro nehomogenity s větší hodnotou Youngova modulu než má základní těleso dochází k nárůstu hodnoty hustoty deformační energie a opačně.



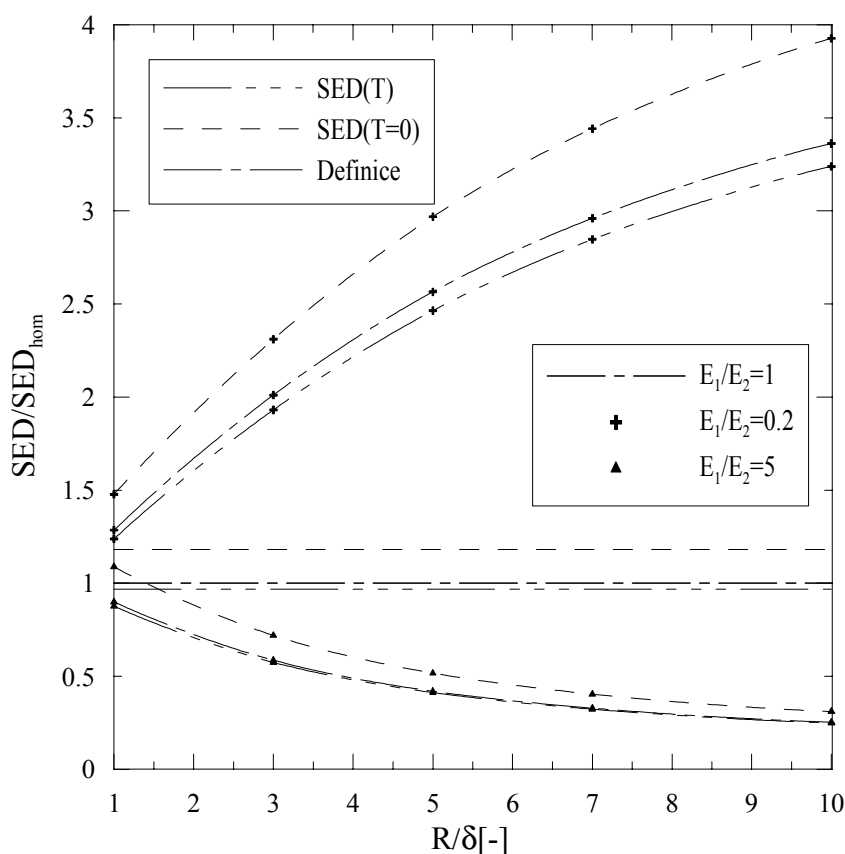
obr.4. Normalizované hodnoty efektivního součinitele intenzity napětí v závislosti na vzdálenosti a velikosti nehomogenity s vlivem  $T$ -napětí. Jedná se silové namáhání ve  $V_1$ . Hodnota  $K_I^{ef}/K_{Ithom}=1$  odpovídá homogennímu případu pro  $T=0$ .



## 5. Závěr

V rámci předpokladů dvouparametrové lineární elastické lomové mechaniky jsou v příspěvku prezentovány výsledky výpočtů lomové mechanických parametrů (součinitel intenzity napětí, T-napětí a hustota deformační energie) pro případ krátké trhliny šířící se v blízkosti nehomogenity. Použitý numerický model lze aplikovat na studium interakce krátkých únavových trhlin s hranicí zrna. Výpočet byl provede metodou konečných prvků (systém ANSYS) pro deformační a silové namáhání.

Z výsledků vyplývá, že v obou případech dochází v důsledku existence nehomogenity k podstatné změně hodnoty lomové mechanických parametrů v obou sledovaných kořenech trhliny. Uvedené výsledné hodnoty lze využít pro popis chování krátkých únavových trhlin mikrostrukturálního charakteru. Jejich srovnání s odpovídajícími veličinami určenými pro homogenní případ zřetelně ukazují na rozhodující vliv struktur materiálu na chování krátkých únavových trhlin.



**obr.4. Normalizované hodnoty hustoty deformační energie v závislosti na vzdálenosti a velikosti nehomogenity. Jedná se silové namáhání ve vrcholu  $V_1$ . Hodnota  $SED/SED_{hom}=1$  odpovídá homogennímu případu určené z definice.**

## 6. Poděkování

Tato práce byla vypracována v rámci řešení grantu Grantové Agentury ČR č. 106/01/0381. „Šíření únavových trhlin přes rozhraní dvou materiálů“

**7. Literatura**

- Anderson, T., L. (1995) *Fracture Mechanics*, CRC Press, Boca Raton
- Bednář, K. (1999) *Dvoupárametrová lomová mechanika: výpočet parametrů a jejich význam při popisu chování únavových trhlin*, Disertační práce, ÚFM AV ČR, Brno
- Knésl Z., Hutař P., Seitl S.(2002) Výpočet faktoru intenzity napětí metodou konečných prvků, *Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků 2002*, Praha, pp. 69-80
- Knésl, Z., Bednář, K. ( 1998) *Dvoupárametrová lomová mechanika: Výpočet parametrů a jejich hodnoty*, Ústav fyziky materiálů AV ČR, Brno
- Knésl, Z., Seitl, S., Hutař, P.(2002) Accounting for effects of constraint on propagation of a fatigue crack, *Damage & Fracture Mechanics VII, Computer Aided Assessment and Control*, Editor: C. A. Brebbia, ISBN: 1-85312-926-7, pp: 245-253
- Seitl, S., Knésl, Z. (2002) Analýza šíření trhliny v okolí rozhraní dvou materiálů z hlediska dvoupárametrové lomové mechaniky, *Konference s mezinárodní účastí „Engineering Mechanics 2002“*, Svratka, na CD
- Sih, G., C. (1973) *Mechanics of Fracture I- Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Ed. G. S. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands
- Sladek, J., Sladek, V., Fedelinski, P. (1997) Cotour Integrals for Mixed-Mode Crack Analysis: Effect of Nonsingular Terms, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 27, pp. 115-127
- Suresh, S.(1998) *Fatigue of Materials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge
- Williams, M., L. (1957) On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, *Journal of Appl. Mech.* 24, pp. 109-114
- Yang B., Ravi-Chandar K.(1999) Evaluation of elastic T- stress by the stress difference method, *Engineering Fracture Mechanics* 64, pp. 589-605

## DVOUPARAMETROVÝ POPIS TRHLIN V BLÍZKOSTI NEHOMOGENITY

**Abstrakt:**

*V rámci dvoupárametrové lineární elastické lomové mechaniky je provedena studie vlivu existující nehomogenity (nebo materiálového zrna) na chování krátké trhliny. Jsou uvedeny výpočty hodnot součinitelů intenzity napětí  $K_I$ , T-napětí a hustoty deformační energie  $dW/dV$  v závislosti na poměru materiálových parametrů obou složek. Výpočet numerických hodnot lomově mechanických parametrů je proveden v systému konečných prvků ANSYS*

**Klíčová slova:**

T-napětí, bimateriálové rozhraní, šíření trhlin