

## FRACTURE BEHAVIOUR OF THE SHORT CRACK NEAR THE STRESS CONCENTRATOR

P. Hutař<sup>1</sup>, Z. Knésl<sup>1</sup>

**Summary:** *A two-parameter fracture mechanics method is applied to small cracks near a stress concentrator. The small crack in the present contribution is considered as crack influenced by the stress concentrator. The sharp V-notch or V-notch with radius  $R$  are studied here. The effect of V-notch geometry on the small crack fracture parameters is analysed. The necessary calculations are performed by using a finite element method (system Ansys). Obtained results are discussed from point of view of the small crack behavior. The small fatigue crack growth is especially influenced by the constraint level. The results improve the quality of fatigue life estimation of structure with concentrators.*

### 1 Úvod

Lomová mechanika popisuje pole napětí v okolí kořene trhliny pomocí jednoho, nebo více lomových parametrů. Jestliže jsou tyto lomové parametry pro dvě trhliny stejné, potom předpokládáme, že trhliny se chovají identicky. V této práci je analyzováno chování malé trhliny ovlivněné V-vrubem v rámci dvouparametrové lineární elastické lomové mechaniky. Malou trhlinou rozumíme trhlinu ovlivněnou koncentrátorem napětí. Lomové parametry, které byly sledovány v tomto případě jsou: faktor intenzity napětí a velikost T-napětí. Pokud je rozdělení napětí v okolí kořene trhliny popsáno pomocí Williamsova rozvoje, potom první singulární člen tohoto rozvoje je určen faktorem intenzity napětí a druhý konstantní člen odpovídá T-napětí. Ze znalosti velikosti těchto dvou parametrů a na základě energetické rozvahy lze předpovědět dominantní směr šíření takovéto trhliny. V případě únavové trhliny lze vliv constraintu na její rychlost určit pomocí modifikovaného Parisova-Erdoganova vztahu [7]. Tento vztah popisuje šíření trhliny pomocí dvou parametrů, faktoru intenzity napětí a T-napětí. Je založen na úvaze, že určující veličinou pro šíření únavové trhliny je velikost plochy plastické zóny v okolí jejího kořene. Koncentrátor napětí je v této práci modelován pomocí V-vrubu a to jak ostrého, tak se zaoblením v kořeni. Poznamenejme, že ostrý V-vrub se chová jako singulární koncentrátor napětí s proměnou singularitou napětí  $1/r^p$  kde  $p$  je hodnota z intervalu  $< 0, 1/2 >$ . Naopak V-vrub od určitého poloměru zaoblení se chová jako nesingulární koncentrátor napětí. Výsledky této studie lze tedy do jisté míry zobecnit na libovolný koncentrátor napětí. Tato problematika je významná, protože většina trhlín se iniciuje v okolí podobných koncentrátů napětí a jejich chování je v počáteční fázi tímto koncentrátorem podstatně ovlivněno. Zpřesnění popisu těchto trhlín tak může významně přispět k zkvalitnění odhadu životnosti konstrukcí s trhlinou.

---

<sup>1</sup>Pavel Hutař, Zdeněk Knésl

Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žižkova 22, 616 62 Brno a  
 (tel.: 532 290 358, e-mail:hutar@ipm.cz)

## 2 Teoretické pozadí určení lomových parametrů

Jak je známo, tak samotná definice faktoru intenzity napětí a T-napětí vychází z Williamsova rozvoje [10] popisujícího rozdělení napětí v okolí kořene trhliny:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots, \quad (1)$$

kde  $r$  a  $\theta$  jsou polární souřadnice s počátkem v kořeni trhliny. Předpokládáme-li, že za chování trhliny je zodpovědná pouze malá oblast v okolí kořene, je možno zanedbat všechny členy řady, kde vystupuje souřadnice  $r$  v kladné mocnině, zůstanou nám tedy pouze dva členy a to první singulární se singularitou  $1/r^{1/2}$  reprezentovaný pomocí faktoru intenzity napětí  $K_I$  a druhý konstantní člen, který se popisuje pomocí T napětí.

Hodnota faktoru intenzity napětí je stanovena v tomto příspěvku pomocí metody posunutých uzlových bodů [4],[6] což je metoda přímo implementovaná do výpočtového systému Ansys. Velikost T-napětí je určena pomocí dvou metod a to přímé metody a metody integrální. Stanovení hodnoty T-napětí pomocí integrální metody [8], [9] je založena na Bettiho recipročním teorému. Jestliže za stav A prohlásíme numerické řešení úlohy s trhlinou s neznámou hodnotou T-napětí a za stav B analytické řešení modelu stejné geometrie zatíženého libovolnou silou  $f$  v kořeni trhliny, potom vztah pro výpočet M-integrálu lze napsat takto:

$$M^{(A,B)} = \int_{\Gamma} (\sigma_{i,k}^A \epsilon_{i,k}^B \delta_{1j} - \sigma_{i,j}^A u_{i,1}^B - \sigma_{i,j}^B u_{i,1}^A) \eta_j d\Gamma, \quad (2)$$

Za předpokladu rovinné deformace je potom vztah mezi M-integrálem a T-napětím následující:

$$T = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{M^{(A,B)}}{f}, \quad (3)$$

kde  $\nu$  je Poissonovo číslo,  $E$  je modul pružnosti. Výpočet pomocí integrální metody je poměrně přesný a proto ho používáme ke studiu tohoto problému.

Další použitou metodou stanovení T-napětí v tomto příspěvku je stanovení T-napětí pomocí přímé metody [2], ta je velice jednoduchá, není ovšem příliš přesná a používáme ji spíše pro prvotní odhad hodnoty T-napětí. Vychází přímo z definice T-napětí z Williamsova rozvoje:

$$T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{\theta=0}. \quad (4)$$

Rychlost šíření únavové trhliny je popsána v této studii pomocí modifikovaného Parisova-Erdogano zákona [3],[7]:

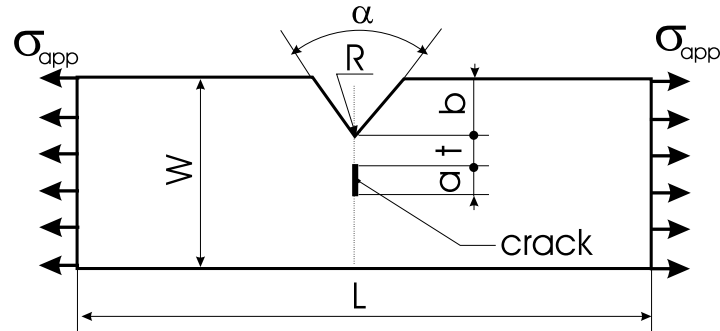
$$da/dN = C(\Delta K_{eff})^m \quad (5)$$

kde  $C$  a  $m$  jsou materiálové charakteristiky.  $K_{eff}$  je efektivní faktor intenzity napětí, který je funkcí faktoru intenzity napětí a T-napětí, jeho velikost je odvozena s porovnáním velikosti plastických zón. Podle [3],[7] ho lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$K_{eff} = K_I [1 - 0,305(\frac{T}{\sigma_0}) + 0,524(\frac{T}{\sigma_0})^2 - 0,851(\frac{T}{\sigma_0})^3], \quad (6)$$

### 3 Řešený problém

Problém malé trhliny ovlivněné koncentrátorem napětí je modelován pomocí taženého pásu s bočním V-vrubem jak je vidět na obrázku (1). Byly uvaženy jak případy ostrého V-vrubu, tak V-vrubu se s poloměrem zaoblění v kořeni  $R$ . Trhlina měla konstantní délku  $a = 1$  mm a měnila se vzdálenost od vrubu  $t$  a úhel otevření vrubu  $\alpha$ .

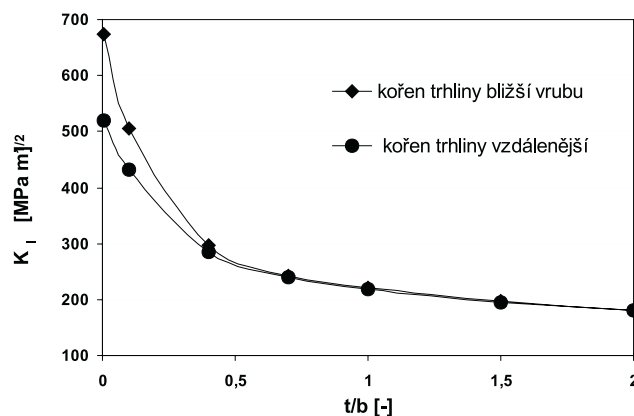


Obr. 1: Modelovaný vzorek s V-vrubem

Ostatní rozměry tělesa byly následující:  $L = 250$  mm,  $W = 50$  mm a  $b = 10$  mm. Materiálové charakteristiky odpovídají oceli  $E = 2.110^5$  MPa a  $\nu = 0.3$ . Aplikované namáhání  $\sigma_{app} = 140$  MPa. Model je vytvořen jako rovinný s podmínkou rovinné deformace a poloviční vzhledem k jeho symetrii. Síť konečných prvků je vytvořena tak, že velikost prvku se zmenšuje tam, kde napětí dosahuje největších gradientů tj. v kořeni V-vrubu a v obou kořenech trhliny.

### 4 Výsledky numerické analýzy

Na obrázku (2) je vidět závislost faktoru intenzity napětí  $K_I$  na vzdálenosti trhliny od vrubu  $t$ .



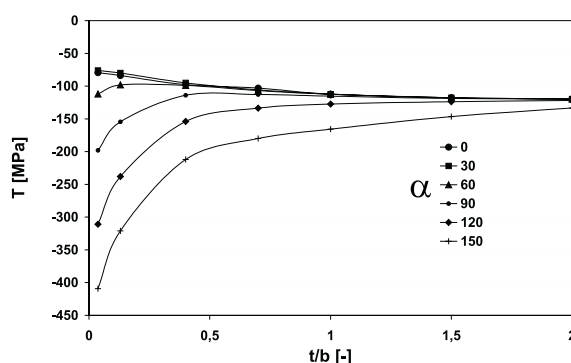
Obr. 2: Velikost faktoru intenzity napětí pro oba kořeny malé trhliny

Výpočty ukázaly, že tato závislost platí pro ostrý V-vrub i pro V-vrub s určitým poloměrem zaoblění. Geometrie koncentrátoru v tomto případě V-vrubu nemá na velikost faktoru intenzity napětí

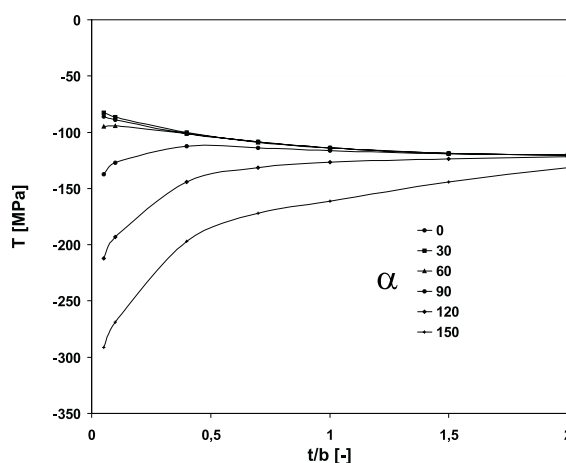
velký vliv. Dále se ukázalo, že faktor intenzity napětí se mění s geometrií vrubu jen pro  $t = 0,5 - 1$  mm, ani zde nepřesahuje velikost této změny 5%. Pro ostrý V-vrub s klesajícím exponentem singularity tj. s rostoucím úhlem otevření V-vrubu mírně klesá hodnota  $K_I$ , podobně je tomu i pro rostoucí poloměr zaoblení v kořeni trhliny. Ovšem vliv geometrie vrubu na faktor intenzity napětí je zanedbatelný vzhledem k vlivu na velikost T-napětí jak je ukázáno dále.

Jestliže se podíváme na velikosti faktoru intenzity napětí pro oba kořeny trhliny na obrázku (2), lze odvodit z kterého kořene se bude trhlina snadněji šířit. Velikost faktoru intenzity napětí souvisí s hnací silou trhliny tedy se změnou energie. Trhlina se tedy bude šířit k vrubu (obecně ke koncentrátoru napětí) to platí pro hodnoty  $t$  menší než 10 mm. S rostoucí vzdáleností  $t$ , koncentrátor napětí přestává mít na trhlinu vliv a ve vzdálenosti srovnatelné s délkou vrubu a začíná se projevovat vliv druhého volného povrchu.

Nyní uvažme vliv geometrie V-vrubu na závislost T-napětí versus normovaná vzdálenost  $t/b$ , viz obr.(3,4)



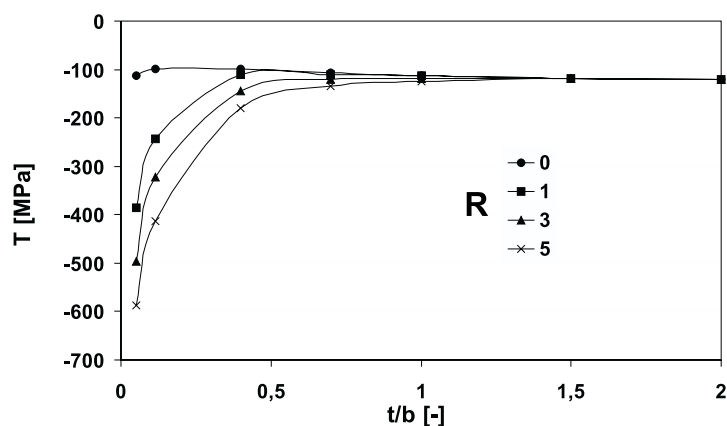
Obr. 3: Vliv úhlu otevření V-vrubu na velikost T-napětí pro kořen trhliny bližší vrubu



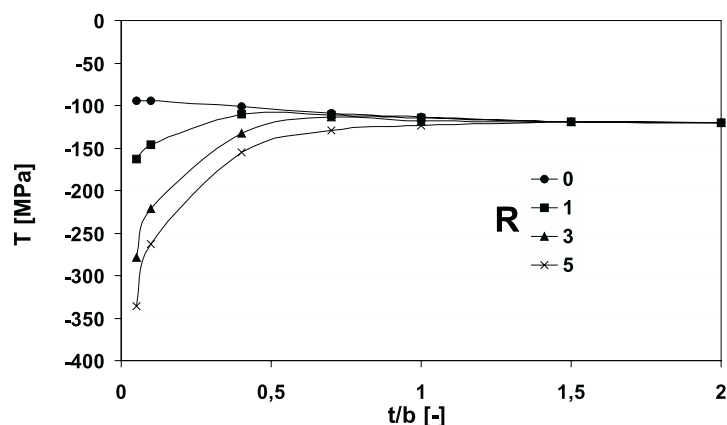
Obr. 4: Vliv úhlu otevření V-vrubu na velikost T-napětí pro kořen trhliny vzdálenější vrubu

Na grafech je vidět vliv úhlu otevření V-vrubu na velikost T-napětí pro oba kořeny malé trhliny. Obě závislosti jsou podobné. S rostoucím úhlem otevření V-vrubu tj. s klesajícím exponentem sin-

gularity  $p$  velikost T-napětí výrazně klesá. V intervalu  $\alpha = 0^\circ - 60^\circ$  se velikost T-napětí příliš nemění. To je způsobeno poměrně malou změnou exponentu singularity. Pro větší úhly otevření je tako změna markantní a může přesahovat až 100%, pokud bereme jako referenční hodnotu  $\alpha = 0^\circ$  (tj. trhlina). S rostoucím úhlem otevření V-vrubu sice dochází k malému poklesu faktoru intenzity napětí, ale zároveň ke značné ztrátě constraintu, což vede k růstu velikosti plastické zóny v kořeni trhliny. Předpokládáme-li, že právě velikost plochy plastické zóny je řídicí veličinou rychlosti růstu únavové trhliny, potom taková trhlina roste rychleji než předpovídá jednoparametrový popis.



Obr. 5: Vliv velikosti zaoblení v kořeni V-vrubu na velikost T-napětí pro kořen trhliny bližší vrubu



Obr. 6: Vliv velikosti zaoblení v kořeni V-vrubu na velikost T-napětí pro kořen trhliny vzdálenější vrubu

Naprostoj stejný trend je vidět i na obr.(5,6) popisujících závislost zaoblení v kořeni vrubu na velikost T-napětí pro oba kořeny trhliny. Tyto grafy jsou sestaveny pro V-vrub o úhlu otevření  $\alpha = 60^\circ$  a pro poloměry zaoblení v kořeni vrubu  $R = 0 - 5$  mm. Pokud dojde k zeslabení koncentrátoru napětí pomocí zvětšení poloměru zaoblení v jeho kořeni, mírně poklesne hodnota faktoru intenzity napětí a zároveň dojde k velké ztrátě constraintu. Důsledky jsou potom stejné jako v předchozím případě-

zrychlení růstu únavové trhliny vlivem constraintu. Tento jev může mít poměrně velký vliv na odhad životnosti konstrukcí které takové koncentrátoře obsahují.

Abychom mohli vliv constraintu na rychlost šíření únavové trhliny kvantifikovat, vypočetli jsme rychlosti šíření únavové trhliny ve sledovaných konfiguracích pomocí klasického Parisova-Erdoganova vztahu:

$$da/dN = C(\Delta K)^m \quad (7)$$

který zohledňuje pouze vliv faktoru intenzity napětí tedy uvažuje nulovou hodnotu constraintu a pomocí modifikovaného Parisova-Erdoganova vztahu (5), který vliv constraintu zohledňuje právě přes velikost plastické zóny v kořeni trhliny.

Pro výpočet rychlosti šíření únavové trhliny je nutná znalost materiálových charakteristik  $C, m$ . Proto jsme zvolili tak, aby pokrývaly běžně používané konstrukční materiály. Je to ocel na odlitky 422961.6, která je poměrně málo odolná proti šíření únavových trhlín. Její materiálové charakteristiky jsou  $\sigma_0 = 668 \text{ MPa}$ ,  $C = 3.68 \cdot 10^{-9}$ ,  $m = 3.94$ . Druhý materiál je ocel na výrobu hlavní, velice odolná proti šíření únavových trhlín, jejíž materiálové charakteristiky jsou:  $\sigma_0 = 668 \text{ MPa}$ ,  $C = 4,62 \cdot 10^{-9}$ ,  $m = 2.31$ . V tabulce (7), je potom vidět rozdíl mezi jednoparametrovým a dvouparametrovým popisem pro materiál ocel na odlitky. První sloupec v tabulce je vždy rychlost spočtená pouze pomocí faktoru intenzity napětí, v druhém sloupci je výpočet proveden pomocí modifikovaného Parisova-Erdoganova vztahu.

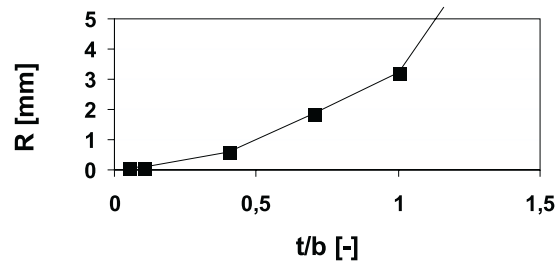
| $da/dN \cdot 10^{-4}$ |     | t/b   |        |       |       |       |       |       |       |
|-----------------------|-----|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                       |     | 0,05  | 0,05   | 0,10  | 0,10  | 0,40  | 0,40  | 0,70  | 0,70  |
| úhel V-vrubu          | 0   | 6,819 | 8,066  | 2,285 | 2,731 | 0,270 | 0,335 | 0,128 | 0,160 |
|                       | 30  | 6,836 | 8,016  | 2,286 | 2,707 | 0,270 | 0,328 | 0,128 | 0,163 |
|                       | 60  | 6,796 | 8,780  | 2,274 | 2,824 | 0,267 | 0,333 | 0,127 | 0,162 |
|                       | 90  | 6,638 | 11,847 | 2,256 | 3,337 | 0,274 | 0,356 | 0,127 | 0,164 |
|                       | 120 | 6,606 | 22,424 | 2,240 | 4,868 | 0,267 | 0,392 | 0,126 | 0,175 |
|                       | 150 | 3,938 | 21,881 | 1,966 | 6,274 | 0,271 | 0,513 | 0,129 | 0,213 |

Obr. 7: Rychlosti šíření únavové trhliny pro trhlínu v blízkosti ostrého V-vrubu

K podobným hodnotám dojdeme i pro V-vrubby otupené různou velikostí poloměru zaoblení. Je tedy vidět, že pro tento materiál dosahují rozdíly mezi jedno a dvouparametrovým popisem řádově desítek procent. Podobně je tomu i pro druhý materiál, který je velice odolný vůči šíření únavových trhlín, přesto se zde vliv constraintu na rychlost šíření takové trhliny pohybuje okolo 30% pro trhlínu s blížící se vrubu. Závěrem je tedy třeba konstatovat, že vliv constraintu při řešení podobných úloh je rozhodující, a zanedbání jeho vlivu může vést ke značnému přecenění životnosti konstrukcí obsahující koncentrátoře napětí.

Poslední sledovanou veličinou byla velikost poloměru v kořeni V-vrubu, při kterém se V-vrub chová jako ostrý. Byly sledovány velikosti lomových veličin pro V-vrubby s různým poloměrem zaoblení a sledována jejich změna vůči parametrům vypočteným pro ostrý V-vrub. Tento hraniční poloměr roste tím, jak se trhlína vzdaluje od V-vrubu a klesá jeho vliv na trhlínu. Závislost hraničního poloměru v kořeni V-vrubu na vzdálenosti mezi vrubem a trhlínou je vidět na obrázku (8).

Tento graf odpovídá úhlu otevření vrubu  $60^\circ$ . Pokud se poloměr v kořeni V-vrubu pohybuje pod hranicí 0.1mm potom toto zaoblení již nemá vliv na žádné lomové parametry a ovlivnění trhliny takovým V-vrubem je stejné jako u ostrého vrubu. Hranice kdy považujeme lomové charakteristiky za stejné byla stanovena na 5%. Z grafu také plyne, již zmiňovaná známá skutečnost, že pokud je trhlína od vrubu ve větší vzdálenosti než je velikost vrubu, již nemá geometrie koncentrátoře na trhlínu žádný vliv.



Obr. 8: Změna hraniční velikosti poloměru v kořeni V-vrubu

## 5 Závěr

Byl studován problém malé trhliny ovlivněné existencí V-vrubu v její blízkosti. Byly uváženy V-vruby ostré, které reprezentují singulární koncentrátor napětí, tak V-vruby s určitým poloměrem zaoblení reprezentující nesingulární koncentrátor. Výsledky ukazují, že pokud poloměr zaoblení v kořeni V-vrubu je menší než 0.1mm, potom jsou pro sledované případy lomové parametry charakterizující trhlinu v jeho blízkosti identické (platí pro úhel otevření vrubu menší než 90°). Lze tedy konstatovat, že V-vrub s tak malým poloměrem zaoblení se chová pro tento případ jako ostrý V-vrub. Pokud je vzdálenost trhliny od vrubu větší než hloubka vrubu, trhlina není vrubem ovlivňována.

Jestliže se trhlina nachází v oblasti kde vrub významně ovlivňuje rozložení napětí, potom hodnota faktoru intenzity napětí pro malou trhlinu je pro jednotlivé konfigurace vrubu přibližně konstantní. Naopak velikost T-napětí se dramaticky mění a to tak, že T-napětí klesá do záporných hodnot s rostoucím úhlem otevření V-vrubu. V případech V-vrubu s velkým úhlem otevření, kde klesá hodnota exponentu singularity, dochází ke ztrátě constraintu (hodnota T-napětí se posouvá do záporných hodnot). Stejně tomu je i pro zvětšující se poloměry zaoblení v kořeni trhliny.

Tyto příklady demonstrují nezbytnost použití dvouparametrového popisu. Sledované problémy se vyznačují poměrně dramatickou ztrátou constraintu, na základě toho se zvětšuje velikost plastické zóny v kořeni trhliny. Považujeme-li tuto veličinu za určující pro výpočet rychlosti šíření trhliny, potom dochází ke zrychlení únavového šíření trhliny. Na základě jednoparametrového popisu tedy dochází ke značnému přecenění únavové životnosti konstrukce s vrubem. Proto je třeba vliv constraintu zohlednit a jednou z nejjednodušších cest jak to udělat je již zmiňovaná modifikace Parisova-Erdoganova zákona.

## Poděkování

Tento článek byl vytvořen za pomoci grantu Grantové Agentury AV ČR K2076106

## Literatura

- [1] Anderson, T. L., *Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications*, CRC Press Inc., 1995
- [2] Ayatollahi, M. R., Pavier M. J., Smith, D. J., *Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading*, Int.Journ.of Fracture, Vol. **91**, pp. 283–298, 1998
- [3] Bednář, K., *Dvouparametrová lomová mechanika - výpočet parametrů a jejich význam při popisu chování únavových trhlin*, Disertační práce, Brno, 1999
- [4] Henschell, R. D., Shaw, K. G., *Crack tip elements are unnecessary*, Inter.Journal Num. Meth. Engng, Vol. **9**, pp. 495–509, 1975
- [5] Hutař, P., *The two-parameter description of short cracks near the stress concentrators*, Applied Mechanics 2003, Jaworzynka, 2003
- [6] Ingraffea, A. R., Manu, C., *Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements*, Inter. Journal of Numerical methods, Vol. **15**, pp. 1427–1445, 1980
- [7] Knésl, Z., Seitzl, S. S., Hutař P., *Accounting for effects of constraint on propagation of a fatigue crack*, Damage and Fracture mechanics VII, pp. 245–253, 2002
- [8] Sládek, J., Sládek, V., Fedelinski, P., *Integral formulation for elastodynamic T-stress*, Int. Journal of Fracture., Vol. **84**, pp. 103–116, 1997
- [9] Sládek, J., Sládek, V., *Evaluation of T-stress and stress intensity factors in stationary thermoelasticity by the conservation integral method*, Int. Journal of Fracture., Vol. **86**, pp. 199–219, 1997
- [10] Williams, M. L., *On the Stress Distribution at the Base of Stationary Crack*, Journal of Applied Mechanics, Vol. **24**, pp. 109–114, 1957