

ADAPTIVE TECHNIQUE IN NONLINEAR PROBLEMS

L. Svoboda¹, D. Rypl², Z. Bittnar³

Summary: *In this paper we discuss the use of adaptive methodology in nonlinear analysis based on Finite Element Method. It is focused on static problems of elasto-plasticity. Because of the path dependence of the solution in analysis with material nonlinearity, the loading is applied in an incremental manner. It is convenient to compute in every increment a suitable norm of variables to monitor the accuracy of the solution in order to recognize the necessity of remeshing. We use energy norm of error based on recovered strains and stresses. The obtained norm is compared with required values which are not, however, constant all over the domain. The highest accuracy is required on boundary of plastic zones and on elements with stress closed to yield surface. The problem of updating the state variables after remeshing is discussed in some details too. Finally, we conclude our paper by some numerical examples.*

1. Úvod

Procedury pro odhad chyby a adaptivní návrh sítě konečných prvků založené na výpočtu zpřesněného napětí, deformace nebo jiných gradientních veličin v lineárních úlohách byly představeny v minulém příspěvku autorů. Tyto metody jsou v praxi již využívány. Jejich rozšíření na nelineární problémy se zdá na první pohled jednoduché, protože řešení je obvykle získáváno pomocí několika po sobě jdoucích lineárních kroků. Ve skutečnosti zde několik problémů je a budou v tomto příspěvku zmíněny. Pokud jde o typ nelineární úlohy, budeme se zabývat aplikací adaptivních metod na statické problémy plasticity.

V materiálově nelineární analýze je řešení závislé na historii zatížení, které je proto aplikováno přírůstkovým způsobem a rovnováhy v každém kroku je dosaženo použitím iterační metody arc-length. Tato iterace je obvykle ukončena ve chvíli, kdy se norma nevyrovnaných sil dostane pod předepsanou mez. V závislosti na velikosti předepsané hodnoty zůstává po ukončení arc-length malý nevyvážek sil \equiv chyba, která se přičítá k chybě způsobené diskretizací úlohy. Zde budeme předpokládat iterační proces dostatečně přesný a zabývat se budeme pouze chybou vzniklou diskretizací.

Velikost této chyby na počáteční síti prvků se během přitěžování mění a pro určení okamžiku, kdy se má vygenerovat nová síť, potřebujeme promyšlený odhad. Je třeba použít vhodnou

¹Ing. L. Svoboda, ČVUT FSV, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, ladislav.svoboda@fsv.cvut.cz

²Doc. Dr. Ing. D. Rypl, ČVUT FSV, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, drypl@fsv.cvut.cz

³Prof. Ing. Z. Bittnar, DrSc., ČVUT FSV, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, bittnar@fsv.cvut.cz

normu, která by nám dávala informaci o velikosti a rozložení chyby a přitom by zohledňovala rozvoj plastických oblastí.

Byly navrženy různé formy měření chyby. Většina výzkumníků používá L_2 normu posunutí nebo energetickou normu. Jiní používají lokální indikátory chyby, což je buď hodnota plastické deformace nebo gradient celkového posunutí. Tyto indikátory nás sice informují o rozložení chyby, ale nedávají nám návod o kolik stávající síť pozměnit. My budeme používat energetickou normu chyby založenou na výpočtu zpřesněného napětí, která se nám osvědčila v lineárních úlohách, jen ji trochu upravíme podle požadavků plasticitního výpočtu. Je zřejmé, že úspěšnost odhadu chyby řešení je závislá na přesnosti vylepšeného napětí, proto k jeho získání budeme používat metodu SPR (Superconvergent Patch Recovery), která se v lineárních úlohách ukázala jako nejlepší.

Ve většině postupů jiných autorů je energetická norma počítána na celé oblasti, tedy i na zplastizované části. Proto se vždy musí vypočítat chyba odpovídající aktuálnímu přírůstku napětí a přičíst k chybě dosažené v předchozím kroku. Takto získané hodnoty jsou ukládány v integračních bodech a po vygenerování nové sítě jsou na ni přeneseny. V tomto příspěvku bude chyba počítána jen na elastické části, proto je možné ji vyčíslit v každém kroku znova a není třeba ji ukládat a na novou síť přenášet. Tato chyba je pak porovnávána s maximální přípustnou hodnotou, která však není konstantní na celé oblasti. Nejvyšší přesnost požadujeme na hranici plastických oblastí a na prvcích, na kterých se napětí blíží ploše plasticity.

V následujících kapitolách uvedeme krátký přehled vztahů z teorie plasticity a popíšeme způsob výpočtu energetické normy chyby a její porovnání s požadovanou hodnotou. Dále se zmíníme o přenosu dat ze staré sítě na novou a nakonec popsanou adaptivní analýzu vyzkoušíme na konkrétním příkladu.

2. Základní vztahy teorie plasticity

Pro krátký přehled hlavních vztahů teorie plasticity malých deformací začneme se základními předpoklady

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \sum \delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad , \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_p = \delta\lambda(\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma})\end{aligned}$$

kde \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ a \mathbf{D} označují vektor posunutí, celkové deformace, elastické deformace, plastické deformace a elastickou matici materiálové tuhosti. Dále f vyjadřuje plochu plasticity závislou na napětí a parametru zpevnění κ

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 . \quad (1)$$

V tomto příspěvku budeme předpokládat $\kappa = 0$.

Zatížení na konstrukci roste postupně a v každém přitěžovacím kroku kontrolujeme splnění konstitutivních vztahů plasticity a zároveň splnění rovnováhy vyjádřené rovnicí

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_n d\Omega - \mathbf{F}_n = 0 , \quad (2)$$

kde \mathbf{B} je geometrická matice, \mathbf{F} je vektor vnějších uzlových sil v n -tém kroku. V případě nesplnění rovnice je třeba dosáhnout rovnováhy vhodným iteračním procesem. My budeme používat metodu *arc-length*, pomocí které je řízena i velikost přírůstku zatížení.

3. Návrh nové sítě

V této části bude popsán proces návrhu nové sítě a přenosu dat mezi sítěmi. Naší snahou je v každém přítěžovacím kroku porovnat chybu výpočtu s předepsanou hodnotou a v případě překročení této hodnoty vytvořit novou síť, na které bychom získali přesnější výsledky.

3.1 Odhad chyby

Jak už bylo výše poznamenáno, odhad chyby bude počítán na základě zpřesněného napětí, které získáme metodou SPR (Superconvergent Patch Recovery) autorů Zienkiewicze a Zhua. Tato metoda je založená na předpokladu existence *superkonvergentních* bodů, v kterých jsou hodnoty napětí a deformací spočtené klasicky pomocí MKP o řád přesnější než v ostatních bodech prvku. Jejich poloha se většinou shoduje s polohou Gaussových integračních bodů. Kolem každého uzlu, který leží uvnitř zkoumané oblasti a zároveň ve vrcholu prvku, budeme uvažovat tzv. záplatu - patch, která se skládá z přilehlých prvků. Pokud vezmeme hodnoty napětí (deformací) v superkonvergentních bodech ležících uvnitř záplaty a těmito hodnotami proložíme pomocí metody nejmenších čtverců polynom, tak obdržíme průběh napětí

$$\boldsymbol{\sigma}_p^* = \mathbf{P}\mathbf{a} , \quad (3)$$

který lépe aproximuje skutečnost. Polynom \mathbf{P} je stejného stupně p jako matice interpolačních funkcí \mathbf{N} , která slouží k interpolaci uzlových posunů po prvku. Vektor \mathbf{a} obsahuje vypočtené koeficienty polynomu \mathbf{P} . Konkrétně pro lineární, respektive kvadratické, prvky je to

$$\mathbf{P} = [1, x, y] \quad , \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T \quad , \quad p = 1 \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = [1, x, x^2, y, y^2, xy] \quad , \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T \quad , \quad p = 2 . \quad (5)$$

Hodnoty vektoru \mathbf{a} budou pro každou složku napětí jiné a dostaneme je z rovnice

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\mathbf{P}(x_i, y_i) \quad , \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) , \quad (7)$$

kde suma se počítá přes všechny příslušné superkonvergentní body o souřadnicích (x_i, y_i) a $\boldsymbol{\sigma}_h$ je napětí spočtené pomocí MKP v těže bodech. Pokud hodnoty napětí $\boldsymbol{\sigma}_p^*$ v uzlech záplaty označíme jako r_{σ_i} (i je číslo uzlu na doméně) a tento postup zopakujeme pro všechny záplaty, tak dostaneme vektor uzlových napětí \mathbf{r}_σ .

Nyní tedy máme *zpřesněné* napětí $\boldsymbol{\sigma}^*$ spojitě po celé oblasti, které na prvku interpolujeme stejně jako posuny. Na jednom prvku platí

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\mathbf{r}_\sigma . \quad (8)$$

Jak už bylo řečeno, pro vyjádření chyby budeme používat integrální měřítko - *energetickou normu*

$$\|e\| = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_\sigma d\Omega} , \quad \text{kde} \quad \mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h . \quad (9)$$

Energetickou normu chyby na jednom prvku budeme značit $\|e\|_i$. Čtverec normy pro celou oblast lze spočítat sumací příspěvků z jednotlivých prvků

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{ne} \|e\|_i^2 . \quad (10)$$

Pro snadnější zacházení se dává přednost relativní procentuální chybě

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100, \quad \|u\| = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega}. \quad (11)$$

3.2 Modifikace sítě prvků

Při adaptivním výpočtu se obvykle požaduje, aby na každém prvku byla splněna nerovnost $\eta < \bar{\eta}$, kde $\bar{\eta}$ je předepsaná procentuální chyba v energetické normě. Podle předepsané chyby je řešená oblast rozdělena na tři podoblasti:

1. podoblast: je tvořena prvky, na kterých je plastická deformace nulová a napětí se příliš neblíží ploše plasticity, což je vyjádřeno nerovností

$$\phi < \frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{f(\mathbf{0}, \kappa)}, \quad (12)$$

kde f je funkce plasticity, $\mathbf{0}$ je nulový vektor, $\kappa = 0$, $\boldsymbol{\sigma}$ je napětí na prvku a $\phi \in (0; 1)$ je mezní přiblížení ploše plasticity, které si volíme (např. 0.1). Zde budeme postupovat jako v lineární adaptivitě, kde jsme předpokládali rovnoměrné rozložení chyby η po celé oblasti. Potom lze stanovit mez pro normu chyby na i -tém prvku

$$\|e\|_i \leq \bar{\eta}_e \sqrt{\|u\|^2 / ne} = \bar{e}_m, \quad (13)$$

kde $\bar{\eta}_e$ je předepsaná procentuální chyba pro nezplastizované prvky a ne je počet prvků v podoblasti. Hodnota ξ_i nám poskytne informaci o tom, jak prvek zmenšit (zvětšit)

$$\xi_i = \frac{\|e\|_i}{\bar{e}_m}. \quad (14)$$

2. podoblast: je tvořena prvky, na kterých je plastická deformace nulová a napětí se blíží ploše plasticity, což je vyjádřeno nerovností

$$\phi > \frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{f(\mathbf{0}, \kappa)} = \beta, \quad (15)$$

Zde už rovnoměrné rozložení chyby předpokládat nebudeme a mez pro normu chyby stanovíme

$$\|e\|_i \leq (\bar{\eta}_p + (\bar{\eta}_p - \bar{\eta}_e)\beta/\phi) \|u_i\| = \bar{e}_m, \quad \xi_i = \frac{\|e\|_i}{\bar{e}_m}, \quad (16)$$

kde $\bar{\eta}_p$ je předepsaná procentuální chyba pro zplastizované prvky.

3. podoblast: je tvořena prvky, na kterých je plastická deformace nenulová. Neboť tyto prvky už určitě prošly druhou oblastí, mají proto požadovanou velikost a na každém z nich můžeme přiřadit $\xi_i = 1$.

Nyní máme ξ_i pro každý prvek a můžeme spočítat nové charakteristické velikosti prvků

$$h_{new} = h_{old} / \xi_i^{\frac{1}{p}}, \quad (17)$$

kde h_{old} je současný rozměr prvku a p je stupeň polynomické aproximace. Na základě h_{old} můžeme vygenerovat novou síť.

3.3 Přenos dat na novou síť

Abychom nemuseli při přechodu na novou síť začínat s výpočtem zase od začátku, je třeba mezi sítěmi přenést dosažené hodnoty, které jsou závislé na historii zatěžování. Jedná se o dvě skupiny hodnot.

První jsou skladovány v uzlech (např. posuny). Tyto hodnoty jsou přenášeny z uzlů staré sítě na uzly nové sítě pomocí interpolačních funkcí používaných pro interpolaci posunů po prvku.

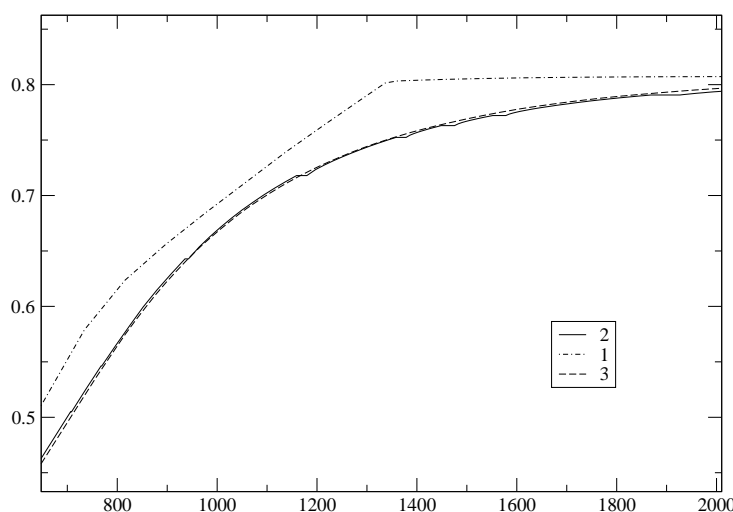
Do druhé skupiny patří hodnoty skladované v integračních bodech (např. plastická deformace). Tyto hodnoty nejdříve pomocí metody SPR zprůměrujeme do uzlů a odtud je do integračních bodů nové sítě přeneseme opět pomocí interpolačních funkcí.

4. Numerické ověření účinnosti metody

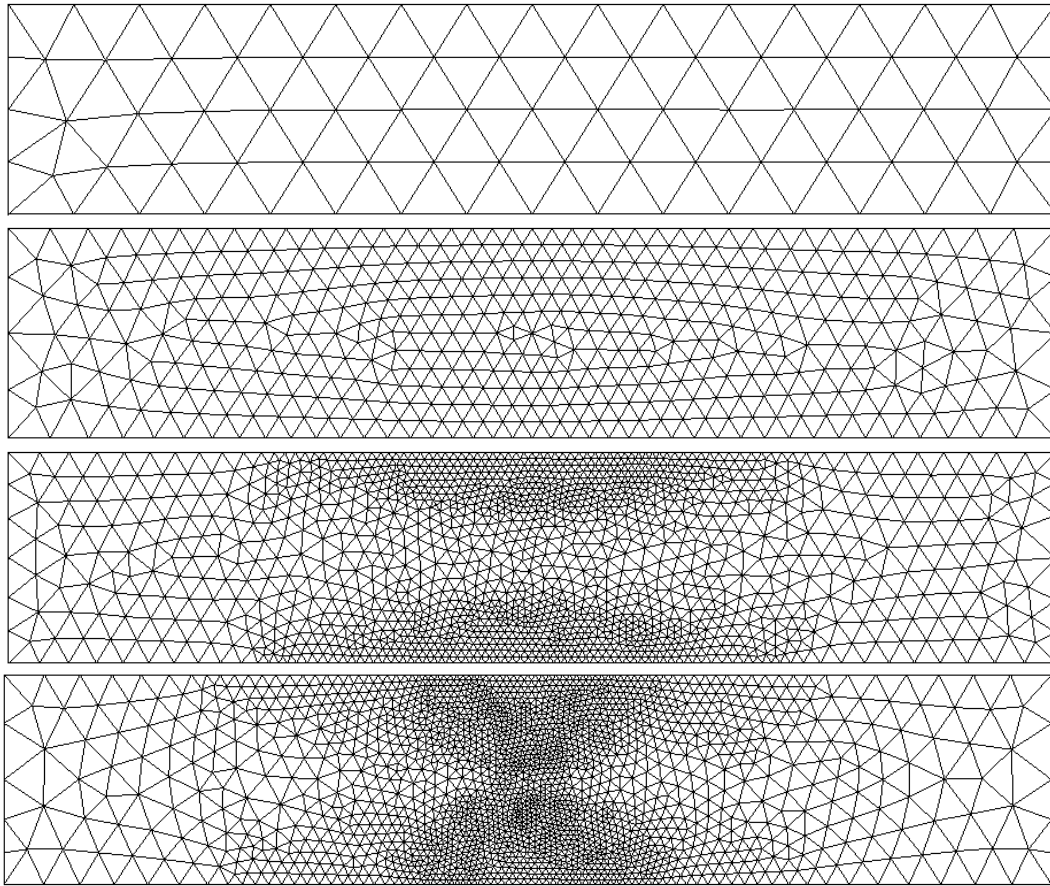
V této kapitole je na jednoduchém příkladě ověřena účinnost adaptivního výpočtu. Jako testovací konstrukce byl vybrán stěnový nosník rovnoměrně zatížený objemovým zatížením. Na svislých hranách byl podepřen posuvnými klouby zabraňujícími svislé posunutí, jeden z kloubů je neposuvný. Zvětšováním zatížení bylo dosaženo plastického kloubu ve středu nosníku. Při výpočtu došlo k několika modifikacím sítě, čtyři vybrané jsou ukázány na obrázku 2.

Na obrázku 1 je závislost maximálního průhybu na velikosti přetížení. U křivky odpovídající adaptivnímu výpočtu dochází v místech změny sítě k vybočení a postupnému návratu na optimální trasu. Tento návrat však není úplný a křivka adaptivního výpočtu proto klesá pod křivku “velmi přesného výpočtu”.

Vybočení je způsobeno nepřesným přenosem dat mezi sítěmi.



Obr.1: vodorovná osa - průhyb, svislá osa - zátěž
1-výpočet na hrubé síti, 2-adaptivní výpočet, 3-výpočet na velmi jemné síti



Obr.2: vybrané sítě konečných prvků adaptivního výpočtu

5. Závěr

Navržená adaptivní technika se ukazuje jako účinná, neboť zahušťuje síť na očekávaných místech. Do budoucna bude třeba implementovat přesnější přenos dat mezi sítěmi.

6. Poděkování

Tato práce byla podporována Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy, výzkumným zá-
měrem MSM 210000003.

7. Literatura

Zienkiewicz, O. C. a Zhu, J. Z. *Adaptivity and mesh generation*. Int. J. Numer. Methods Eng., 32, 783-810 (1991).

Boroomand, B. a Zienkiewicz, O. C. *Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 176, 127-146 (1999).

Bittnar, Z. a Šejnoha, J. *Numerické metody mechaniky 1*. ASCE Press, (1992).

Bittnar, Z. a Šejnoha, J. *Numerické metody mechaniky 2*. ASCE Press, (1992).