

SIMPLIFIED MODEL OF SUBSOIL-STRUCTURE INTERACTION

P. Fajman¹

Summary: *During the past three decades a great deal of research work has been carried out on numerical modelling of soil-structure interaction. This paper starts from a review of governing equations describing creep in the upper-structure, consolidation taking place in the subsoil, and characterizing interactions between the two subdomains (Sec. 2). This general model is then simplified by admitting a two-parameter model of a foundation layer in which the liquid prevalingly flows in the vertical direction (cf. Sec.2.2). Simple examples illustrate the applicability and effectiveness of the model (Sec. 3).*

1. Úvod

Problému interakce konstrukce s podložím bylo věnováno nepřeborné množství prací. Vliv dotvarování vrchní stavby a konsolidace podloží na interakci obou subsystémů byl popsán např. v Bittnar, Z. & Šejnoha, J. (1996) a dále zobecněn v Krejčí a kol. (2001).

Časově závislé chování vrchní stavby je vyjádřeno přírůstkovým konstitutivním vztahem, který je založen na aproximaci funkce poddajnosti J pomocí Dirichletovy-Pronyho řady. O podloží se obvykle předpokládá, že v částečně nasycené zóně nevzniká odpor pro proudění plynné fáze. Soustava diskretizovaných rovnic pro „nasycené – nenasyčené“ proudění se výrazně zjednoduší v případě isotermální konsolidace, což je jednofázové proudění v plně nasyceném a deformujícím se mediu.

V odst. 2 jsou nejprve zrekapitulovány základní rovnice pro časově závislou interakci v 3D formulaci. Takové řešení je však po numerické stránce velmi náročné, a proto v odst. 2.2 je navržen jednodušší model, který podloží uvažuje jako vrstvu, v níž převažuje proudění ve směru její tloušťky. Jedná se o časově závislou formulaci pro dvouparametrický model, v němž materiálové vlastnosti porézního skeletu jsou vystiženy konstantami C_1 (Nm^{-3}) a C_2 (Nm^{-1}). V odst. 3 bude toto zjednodušené řešení ilustrováno názorným příkladem.

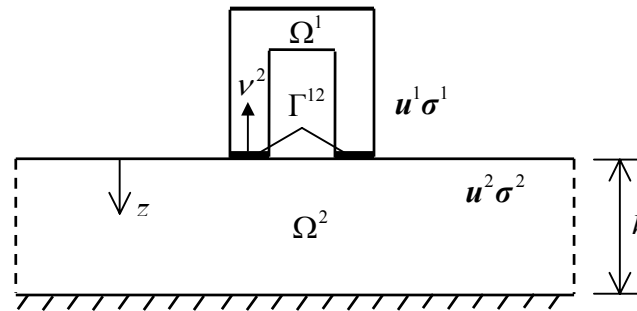
2. Základní vztahy pro časově závislou interakci konstrukce s podložím

Diskretizované rovnice, které popisují přetvárné procesy v konstrukci a podloží, se svou strukturou obvykle liší. V důsledku toho mohou být pole posunutí vrchní stavby \mathbf{u}^1 a podloží \mathbf{u}^2 nespojitá na kontaktu Γ^{12} mezi podoblastmi Ω^1 a Ω^2 (obr. 1). Tuto nesnáž lze účelně obejít aplikací modifikovaného principu virtuálních prací, v němž zahrneme požadavek spojitosti posunů v kontaktní rovině

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 = \mathbf{0} \quad (1)$$

¹⁾ Doc. Ing. Petr Fajman, CSc. – Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: fajman@fsv.cvut.cz

pomocí Lagrangeových multiplikátorů λ . Jejich praktický význam spočívá v tom, že představují kontaktní síly působící v rovině Γ^{12} .

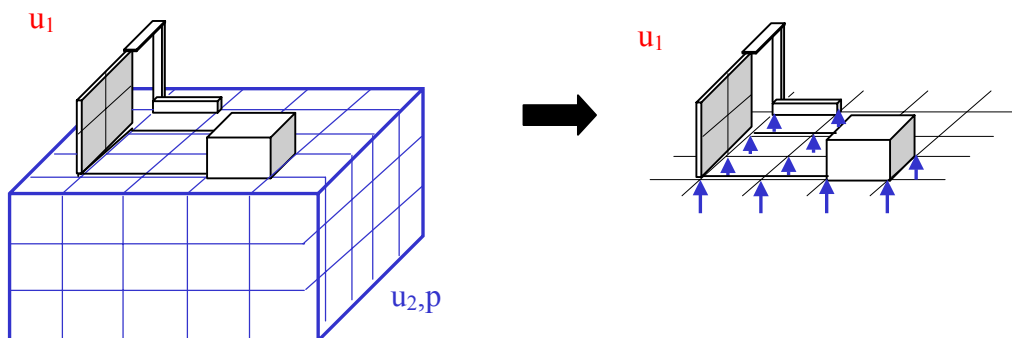


Obr. 1 Soustava složená ze dvou částí: konstrukce Ω^1 a podloží Ω^2 s hranicí Γ^{12}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + k\Gamma_{11}, & k\Gamma_{12} \\ k(\Gamma_{12})^T, & \mathbf{K}_2 + k\Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Popsaný postup klade velké nároky na řešení soustavy rovnic. U velkých konstrukcí, nám k mnoha stupňům volnosti v horní stavbě přibývá mnoho stupňů volnosti v podloží. Vzhledem k tomu, že se matice tuhosti mění v každém časovém kroku, je nutné soustavu opakovaně řešit. Z tohoto důvodu je žádoucí nějakým způsobem soustavu zredukovat.

S ohledem na to, že informace o vrchní stavbě jsou spolehlivější než o zemině je možné rozložení tuhosti podloží transformovat na základě PVP do náhradních tuhostí přiřazených k vrchní stavbě viz odstavec 2.2. V diskretizované podobě nám pak zbyde pouze neznámý vektor posunutí \mathbf{u}^1 (Fajman 2002).



Obr. 2 Zjednodušený model podloží

2.1 Diskretizované podmínky rovnováhy pro vrchní stavbu

Začneme s přírůstkovými konstitutivními vztahy pro dotvarující 3D konstrukci, které byly odvozeny podrobně v Krejčí a kol. (2001). Tam je ukázáno, že přírůstek napětí $\Delta \sigma$ dosažený v rámci časového intervalu $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ souvisí s přírůstkem deformace $\Delta \epsilon$ konstitutivní rovnicí

$$\Delta\sigma = \hat{E}\hat{D}(\Delta\varepsilon - \Delta\hat{\varepsilon} - \Delta\varepsilon_0). \quad (3)$$

Zde je $\hat{D} = \hat{C}^{-1}$ konstantní matice typu (6,6), která je svázána s maticí elastické tuhosti materiálu v čase τ vztahem

$$\hat{D} = D_e(\tau) / E(\tau). \quad (4)$$

Ve vztahu

$$\hat{E} = \left[\sum_{\mu=1}^M \frac{1}{\bar{D}_\mu} \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta y_\mu}}{\Delta y_\mu} \right) \right]^{-1} \quad (5)$$

jsou \bar{D}_μ tuhosti článků zobecněného Kelvinova modelu vyčíslené uprostřed intervalu $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$. Konečně $y_\mu = (t / \Theta_\mu)^q$ jsou pomocné proměnné, v nichž Θ_μ jsou retardační časy a $q \leq 1$ jsou zvolené konstanty.

Vliv dotvarování je v závorce vztahu (3) vyjádřen členem

$$\Delta\hat{\varepsilon} = \sum_{\mu=1}^M \gamma_\mu(t_{i-1})(1 - e^{-\Delta y_\mu}) \quad (6)$$

a poslední člen $\Delta\varepsilon_0$ vyjadřuje přírůstek deformací způsobených nesilovými účinky např. smršťování. Vektory vnitřních proměnných $\gamma_\mu, \mu = 1, 2, \dots, M$, jsou s přírůstkem napětí svázány soustavou evolučních rovnic

$$\gamma_\mu(t_i) = \gamma_\mu(t_{i-1})e^{-\Delta y_\mu} + \frac{\hat{C}}{\bar{D}_\mu} \frac{\Delta\sigma}{\Delta y_\mu} (1 - e^{-\Delta y_\mu}), \quad \mu = 1, 2, \dots, M. \quad (7)$$

K vytvoření diskretizovaných podmínek rovnováhy aproximujeme posuny \mathbf{u}^i po prvcích pomocí báзовých funkcí

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{N}_u^i \mathbf{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Uplatněním přírůstkové rovnice (3) a aproximací (8) v principu virtuálních posunů obdržíme diskretizované podmínky rovnováhy vrchní stavby ve tvaru

$$\hat{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{d}_u^1 = \Delta\bar{\mathbf{f}}^1, \quad (9)$$

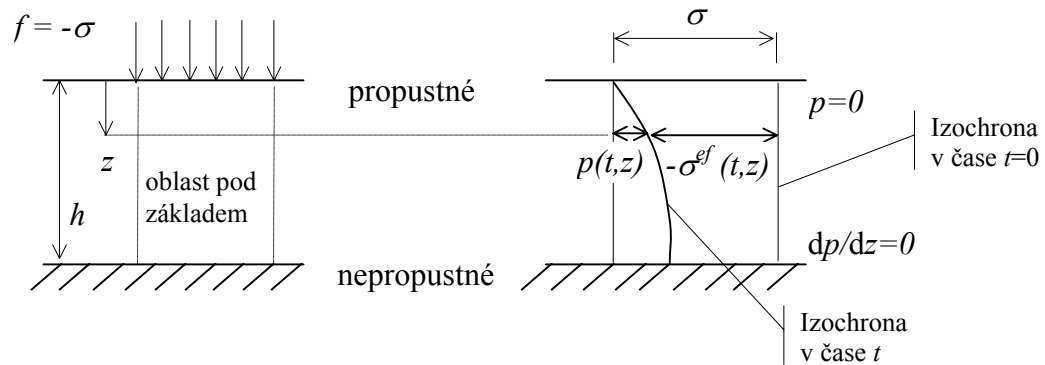
kde $\hat{\mathbf{K}}$ je matice aktuální (tečnové) tuhosti vrchní stavby, $\Delta\bar{\mathbf{f}}^1$ je přírůstek vnějších uzlových sil zahrnujících i účinek přírůstků počátečních napětí příslušných podle (2) k přírůstkům deformací $(\Delta\hat{\varepsilon} + \Delta\varepsilon_0)$

2.2 Popis chování podloží

Procesy zahrnující transport vlhkosti v deformovatelném a diskretizovaném porézním podloží jsou popsány maticovým vyjádřením rovnice kontinuity a podmínek rovnováhy. Oba typy rovnic jsou podrobně diskutovány v Bittnar, Z. & Šejnoha, J. (1996). Tam je ukázáno, že tvoří soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu v čase, kterou lze integrovat numericky. Zahrneme-li i v tomto případě do podmínek rovnováhy požadavek spojitosti posunů na hranici Γ^{12} , obdržíme nakonec soustavu algebraických rovnic pro neznámé vektory přírůstků

uzlových posunů Δd_u^2 a pórových tlaků Δd_p . Podrobná diskuse tohoto řešení přesahuje prostorové možnosti příspěvku.

Zjednodušený model pro popis přetváření podloží



Obr. 3 Předpoklady řešení a izochrony napětí

Předpokládáme, že podloží je tvořeno vrstvou tloušťky h (obr. 3) a že transport vody vytlačované z plně nasyceného podloží pod tíhou vrchní stavby probíhá převážně ve směru tloušťky vrstvy – drénovaná základová spára. V takovém případě se jedná o Terzaghiho úlohu

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (10)$$

kde

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w m_v} = \frac{k \cdot E_{\text{oed}}}{\gamma_w} \quad (11)$$

je součinitel konsolidace a k ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) je součinitel filtrace, který pro málo propustné zeminy nabývá hodnot v rozmezí 10^{-5} až $10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1$ až $10^{-3} \text{ m} \cdot \text{den}^{-1}$ (Vaníček 1996), γ_w je měrná tíha vody. Konečně

$$E_{\text{oed}} = G \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$$

je edometrický modul přetvárnosti.

Řešení je hledáno ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \frac{w(t)}{h} = \frac{1}{E_{\text{oed}}} \left[U(t-t_0) f(t_0) + \int_{t_0}^t U(t-\tau) df(\tau) \right], \quad (12)$$

kde f je zatížení povrchu. Funkce $U(t, \tau)$ může být formálně vyjádřena pomocí Dirichletovy-Pronyho řady, jak ji známe z teorie dotvarování betonových konstrukcí, tj.

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_{\text{oed}}} U(t, \tau) = \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{D_{\mu}} \left\{ 1 - \exp[y_{\mu}(\tau) - y_{\mu}(t)] \right\}, \quad (13)$$

kde v tomto speciálním případě

$$D_{\mu} = E_{\text{oad}} \frac{\pi^2 \mu^2}{8}, \quad y_{\mu} = \left(\frac{\pi \mu}{2h} \right)^2 c_v \cdot t, \quad \mu = 1, 3, 5 \dots \quad (14)$$

Popsané řešení dobře vystihuje skutečnost při založení konstrukce na základové desce. Při založení na pásech se uplatní dva jevy. Jedná se o vliv smykové tuhosti zeminy mimo základový pás, která se projevuje vznikem smykové kotliny (obr. 4), a o možnost zvýšené konsolidace v důsledku proudění vody do stran mimo základ. Tento efekt lze postihnout 2D analýzou příčného řezu na obr. 4 s využitím druhé a třetí rovnice soustavy (10). Do zjednodušeného modelu (viz (14)) pak zavedeme modifikovanou hodnotu součinitele konsolidace c_v . S výhodou lze využít i výsledků měření sedání.

Při uvážení dvou složek deformace ε_z , γ_{yz} a příslušných napětí σ_z , τ_{yz} obdržíme formálně stejný přírůstkový konstitutivní vztah jako (3), v němž

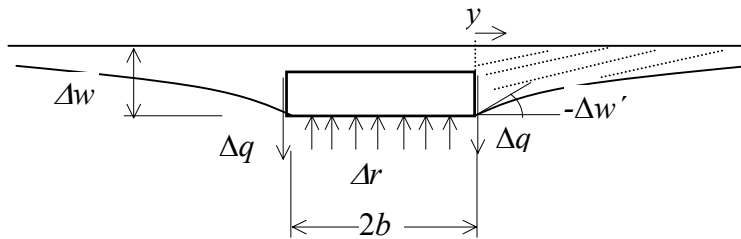
$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G/E_{\text{oad}} \end{bmatrix}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

S touto úpravou zůstávají v platnosti i vztahy (5), (6) a evoluční rovnice (7).

Při studiu konsolidace podloží popsaného dvouparametrickým Winkler-Pasternakovým modelem podloží vyjdeme z těchto úvah (Kuklík 1984):

- zemina je homogenní a izotropní prostředí;
- lze zanedbat vodorovné posuny u, v oproti svislému posunu w ;
- svislý posun obecného bodu v hloubce z lze vyjádřit v závislosti na posunu horního povrchu ($z = 0$). Rozložení posunu po výšce stlačitelné vrstvy $\psi(z)$ považujeme za známé.

Pro jednoduchost uvažujme přetvoření v rovině y, z za těchto předpokladů (obr. 4)



Obr. 4 smyková kotlina

$$w(y, z) = w(y, 0) \cdot \psi(z), \quad v(y, z) = 0, \quad (16)$$

odkud

$$\varepsilon_z(y, z) = w(y, 0) \cdot \frac{\psi(z)}{dz}, \quad \gamma_{yz}(y, z) = \frac{dw}{dy}(y, 0) \cdot \psi(z), \quad (17)$$

kde ψ je známá funkce posunutí v tloušťce vrstvy.

V analogii se vztahy (16) vyjádříme i vektor vnitřních proměnných

$$\gamma_{\mu}(z, t) = \left\{ {}^1\Gamma_{\mu}(t) \frac{\psi(z)}{dz}, {}^2\Gamma_{\mu}(t) \psi(z) \right\}^T. \quad (18)$$

Aplikací principu virtuálních posunutí se vektor přírůstku napětí transformuje na vektor přírůstku vnitřních sil $\{\Delta r, \Delta q\}^T$ a vektor přírůstku deformace na vektor $\{\Delta w, \Delta w'\}^T$. Význam jednotlivých složek těchto vektorů je patrný z obr. 4.

Přírůstková rovnice (3) pro podloží tak po úpravě nabude tvaru

$$\begin{Bmatrix} \Delta r \\ \Delta q \end{Bmatrix} = \left[\sum_{\mu=1,3,5\dots}^M \frac{8}{\pi^2 \mu^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta y_{\mu}}}{\Delta y_{\mu}} \right) \right]^{-1} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \Delta w \\ \Delta w' \end{Bmatrix} - \sum_{\mu=1,3,5\dots}^M \begin{Bmatrix} {}^1\Gamma_{\mu}(t_{i-1}) \\ {}^2\Gamma_{\mu}(t_{i-1}) \end{Bmatrix} \left(1 - e^{-\Delta y_{\mu}} \right) \right) \quad (19)$$

k níž přísluší evoluční rovnice (srov. s rov. (7))

$$\begin{Bmatrix} {}^1\Gamma_{\mu}(t_i) \\ {}^2\Gamma_{\mu}(t_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^1\Gamma_{\mu}(t_{i-1}) \\ {}^2\Gamma_{\mu}(t_{i-1}) \end{Bmatrix} e^{-\Delta y_{\mu}} + \frac{8}{\pi^2 \mu^2 \Delta y_{\mu}} (1 - e^{-\Delta y_{\mu}}) \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta r \\ \Delta q \end{Bmatrix}, \quad \mu = 1, 3, 5, \dots \quad (20)$$

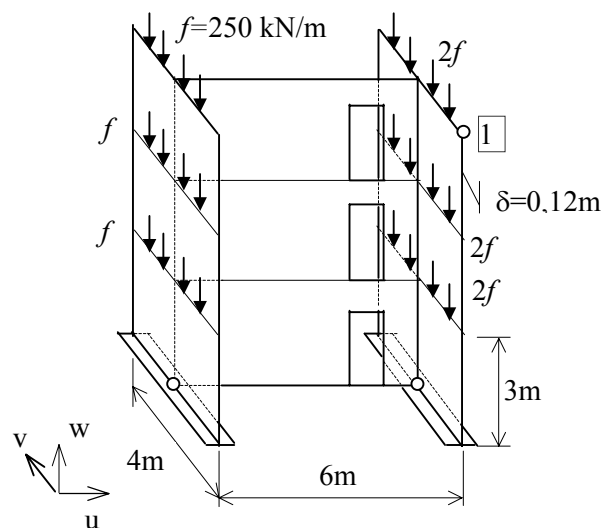
Tuhosti podloží jsou vyjádřeny známými vztahy (srov. Bittnar, Z. & Šejnoha, J. (1996), Kuklík (1984))

$$C_1 = \int_0^h E_{\text{oed}} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 dz \quad (\text{Nm}^{-3}), \quad C_2 = \int_0^h E_{\text{oed}} \psi^2 dz \quad (\text{Nm}^{-1}).$$

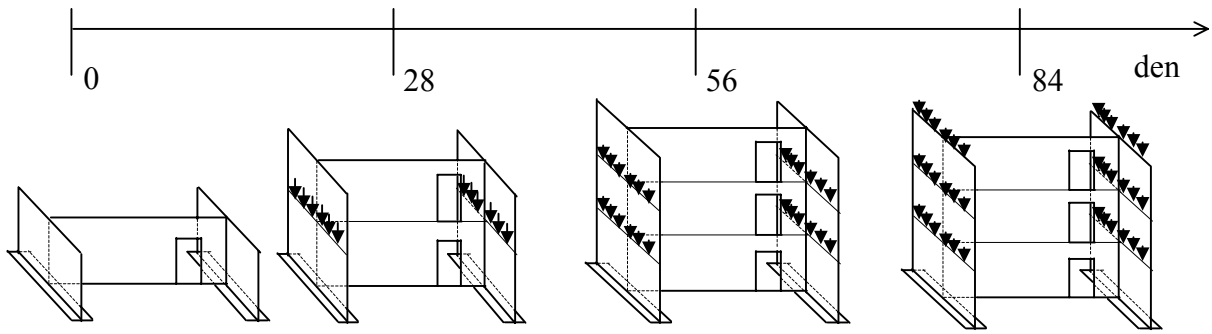
3. Řešený příklad

Výsek panelového objektu je založen na pásech podporovaných vrstvou tloušťky $h = 3,0\text{m}$. Vlastnosti skeletu zeminy jsou vyjádřeny tuhostmi $C_1 = 60 \text{ MN/m}^3$, $C_2 = 20 \text{ MN/m}$.

Harmonogram výstavby a nárůst zatížení (rozloženého podle obr.5) do třetího podlaží včetně je patrný z obr. 6.

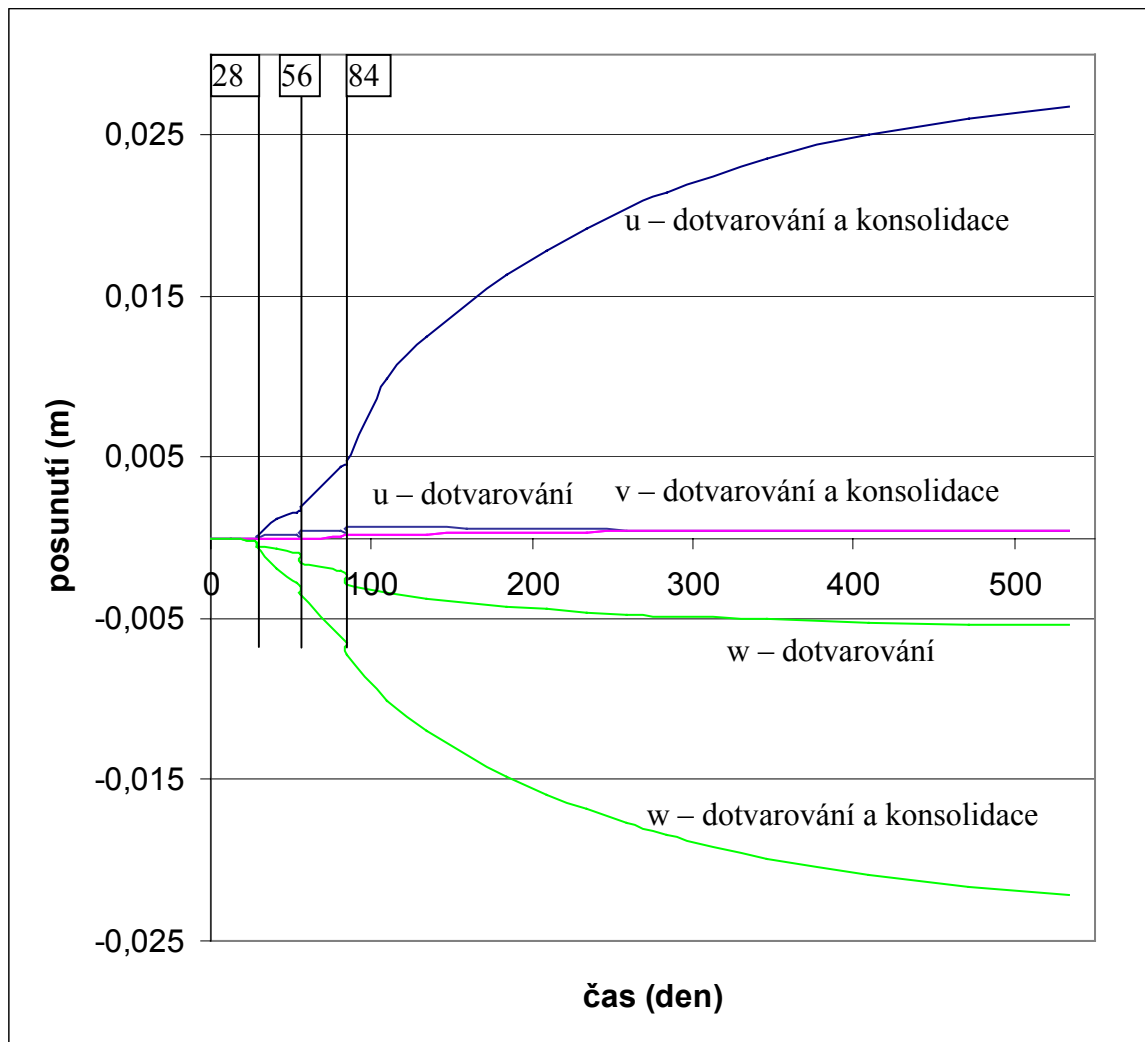


Obr. 5 Schéma objektu



Obr. 6 Harmonogram výstavby

V Obrázku 7 jsou znázorněny průběhy posunutí bodu 1 (vyznačeném v obr. 3) při konsolidaci a dotvarování se smršťováním ($c_v = 0,02$ - propustná zemina) a posunutí způsobené samotným dotvarováním a smršťováním.



Obr. 7 Časové průběhy svislého posunutí

4. Závěr

- V tomto studijním příkladě se dotvarování a smršťování podílí na svislém posunu nejvyšších podlaží zhruba dvaceti procenty. U vysokopodlažních objektů může mít ovšem dominantní vliv.
- I když jsou k dispozici velmi účinné nástroje na řešení interakce konstrukce s podložím prostřednictvím soustavy (10) ve spojení s vysoce efektivními řešiči, jako je např. metoda FETI (finite element tearing and interconnecting method), pro praktické aplikace lze doporučit i zjednodušený model popsany v odst. 2.2 a aplikovaný v odst. 3.

5. Poděkování

Příspěvek byl vypracován za podpory výzkumných záměrů MSM 210000001 a MSM 210000003.

6. Literatura

Bittnar, Z. & Šejnoha, J.(1996) : Numerical methods in structural mechanics. ASCE Press, Thomas Telford, New York, London, (422pp), „Numerické metody mechaniky I,II“, Praha ČVUT, (1992)

Fajman P. (2002) : Nelineární a časově závislá analýza stěnových systémů budov, Habilitační práce ČVUT, Praha (80 str.)

Krejčí, T. – Nový, T. – Sehnoutek, L. – Šejnoha, J.(2001): Structure-subsoil Interaction in View of Transport Processes in Porous Media. CTU Reports, 5, No. 1, (81pp.)

Kuklík P. (1984): „Příspěvek k řešení vrstevnatého podloží“, Pozemní stavby 7, 1984

Vaniček I. (1996): „Mechanika zemin“, skripta ČVUT, Praha