

BENDING OF THE FIBRES WITH NON-CONTINUOUS DEPENDENCE OF THE MATERIAL PARAMETERS ON THE DEFORMATION

Z. Kalousek¹

Summary: *The topic of the paper is the solution of the equilibrium equations for the flexion of a transversally isotropic fiber and the discussion on the results for the materials, for which the dependence of material parameters on the deformational state is non-continuous. There is shown that it is possible to find the difference between the modulus of elasticity and the "flexural rigidity modulus" (constant of proportionality between the curvature and the moment of flexion at the bending of a rod), but in this case the second one is not any material constant.*

1. Experimentální data.

V literatuře věnované fyzikálním vlastnostem textilních materiálů [4] se lze často setkat s úvahami o ohybu vláken. Standardně je uváděn vztah pro závislost momentu síly, která způsobuje ohyb, na křivosti

$$M = \frac{B \cdot J}{R}, \quad (1)$$

kde J je moment setrvačnosti příčného řezu a B odpovídající modul pružnosti. V základním kursu mechaniky kontinua je (za jistých zjednodušujících předpokladů) odvozen vztah (1), v němž vystupuje na místě koeficientu B Youngův modul pružnosti materiálu v tahu. V [4] jsou pro nejdůležitější textilní materiály uvedeny experimentálně zjištěné hodnoty koeficientu B , které se od modulu pružnosti v tahu liší řádově o procenta až desítky procent, přičemž odchylky jsou kladné i záporné. Hlavním pramenem těchto dat je [2]; rozdíly mezi moduly pružnosti v tahu a „v ohybu“ jsou vysvětlovány rozdílnými vlastnostmi materiálů při tahové a tlakové deformaci bez podrobnějšího rozboru.

Příspěvek je věnován nezjednodušenému řešení úlohy ohybu vlákna (prutu) z materiálu, jehož deformační vlastnosti závisejí nespojitě na deformačním stavu. Cílem je vyhodnotit možnost naměření různých hodnot modulu pružnosti „v ohybu“ a v tahu.

2. Geometrie problému.

Při řešení problému ohybu vlákna budeme předpokládat, že nedeformované vlákno je přímý válec (ne nutně kruhový). Souřadný systém xyz zvolíme tak, že osa nedeformovaného vlákna bude rovnoběžná s osou z . K ohybu bude docházet v rovině yz , tj.

¹RNDr. Zdeněk Kalousek, CSc., Technická univerzita Liberec, katedra aplikované matematiky, e-mail zdenek.kalousek@vslib.cz

materiálové body, které před deformací ležely na přímce rovnoběžné s osou vlákna, budou po deformaci ležet na kružnici k v rovině rovnoběžné s rovinou yz ; že všechny takovéto kružnice mají střed na nějaké přímce s rovnoběžné s osou x . Posledním (standardním) předpokladem bude to, že body, které před deformací ležely v rovině kolmé na osu vlákna, budou po ohybu znovu komplanární a takto definované roviny budou obsahovat přímku s .

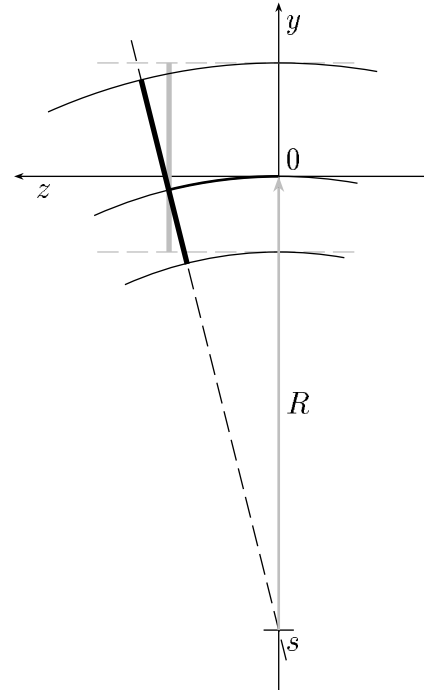
Souřadný systém zvolíme tak, že přímka s , (množina „středů ohybu“), bude mít polohu

$$s = [x, 0, -R]$$

a neutrální plocha, na které budou ležet body, jejichž vzdálenost ve směru osy vlákna se během ohybu nemění, bude procházet osou x (obr.1).

Je-li z původní souřadnice bodu vlákna, bude kolmý řez, ve kterém se tento bod nachází, svírat s rovinou xy úhel $\alpha = \frac{z}{R}$. Označme nyní \hat{x} , \hat{y} polohy těch bodů řezu ohnutého vlákna, které leží v rovině xy . Souřadnice \vec{r}' bodů vlákna po ohybu lze vyjádřit pomocí původní souřadnice z a referenčních souřadnic \hat{x} , \hat{y} :

$$\begin{aligned} x' &= \hat{x} \\ y' &= -R + (R + \hat{y}) \cdot \cos \alpha = \\ &= \hat{y} \cos \frac{z}{R} + R \left(\cos \frac{z}{R} - 1 \right) \quad . \quad (2) \\ z' &= (R + \hat{y}) \cdot \sin \alpha = \\ &= \hat{y} \sin \frac{z}{R} + R \sin \frac{z}{R} \end{aligned}$$



Obr.1.

Z (2) vypočítáme deformační gradient $F = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \vec{r}}$ a jeho polární rozklad

$$F = (R_1 R_2) U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{z}{R} & -\sin \frac{z}{R} \\ 0 & \sin \frac{z}{R} & \cos \frac{z}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x} + \partial \hat{y}}{\partial x + \partial y} & \frac{\partial \hat{x} - \partial \hat{y}}{\partial y - \partial x} & 0 \\ \frac{\partial \hat{y} - \partial \hat{x}}{\partial x - \partial y} & \frac{\partial \hat{x} + \partial \hat{y}}{\partial x + \partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \hat{y}}{\partial x})^2 + \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{N} & \frac{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}}{N} & 0 \\ \frac{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}}{N} & \frac{(\frac{\partial \hat{x}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \hat{y}}{\partial y})^2 + \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hat{y}}{R} + 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme označili

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}\right)^2} \quad (3)$$

3. Napětí ve vlákně.

O materiálu vlákna předpokládáme, že je transversálně izotropní, přičemž materiálová osa symetrie je rovnoběžná s osou vlákna. Dále budeme předpokládat lineární závislost napětí na deformaci. Je-li U matice protažení, bude hustota deformační energie (viz [1])

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} E_1 \left[(U_{11} + U_{22} - 2)^2 - 2(1 - \nu_{12})((U_{11} - 1)(U_{22} - 1) - U_{12}^2) \right] + \\ &+ \sqrt{E_1 E_3 \nu_{13}} (U_{11} + U_{22} - 2)(U_{33} - 1) + \frac{1}{2} E_3 (U_{33} - 1)^2 . \end{aligned}$$

Pro symetrickou část korotovaného Lagrangeova napětí $\overline{\mathcal{T}}$ dostaneme podle [3]

$$\overline{\mathcal{T}}_{11} = E_1 [(U_{11} - 1) + \nu_{12}(U_{22} - 1)] + \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} (U_{33} - 1) \quad (4)$$

$$\overline{\mathcal{T}}_{12} = E_1 (1 - \nu_{12}) U_{12} \quad (5)$$

$$\overline{\mathcal{T}}_{22} = E_1 [(U_{22} - 1) + \nu_{12}(U_{11} - 1)] + \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} (U_{33} - 1) \quad (6)$$

$$\overline{\mathcal{T}}_{33} = \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} (U_{11} + U_{22} - 2) + E_3 (U_{33} - 1) \quad (7)$$

Antisymetrickou část korotovaného Lagrangeova napětí lze vypočítat pomocí nediatagonálních členů matice $U\overline{\mathcal{T}} - \overline{\mathcal{T}}U$ [3]; lze ovšem zjistit, že tato matice je nulová, a tedy korotované Lagrangeovo napětí \mathcal{T} splývá se svojí symetrickou částí.

Je-li $F = \mathcal{R}U$ polární rozklad deformačního gradientu, působí na plochu popsanou v nedeformovaném tělese normálou \vec{n} síla $\vec{K} = \mathcal{R}\mathcal{T}\vec{n}$. V naší úloze nepředpokládáme existenci objemových sil, a tak budeme řešit rovnici rovnováhy kontinua

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\mathcal{R}\mathcal{T})_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Ukazuje se, že charakter třetího členu součtu v (8) je významně odlišný od prvních dvou. Rozdělíme-li tedy sčítání v (8) na dvě části, dostaneme po úpravách, při nichž využijeme regularity matice R_1 a její nezávislosti na souřadnicích x, y , soustavu rovnic

$$\sum_{j \leq 2} \frac{\partial(R_2\mathcal{T})_{kj}}{\partial x_j} + \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathcal{T}_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Rovnice pro $k = 3$ v (9) je díky struktuře matic R_2 a \mathcal{T} splněna identicky. Nadále se tedy budeme zabývat pouze dvojrozměrným problémem.

4. Řešení úlohy pro malé deformace.

Až dosud byly všechny výpočty naprosto obecné a výsledky je možno využít pro libovolné deformace. Naším cílem je ale zabývat se pojmem „modul pružnosti v ohybu“, který má význam především pro malé deformace. Předpokládáme navíc, že deformovaným útvarem je vlákno, jehož příčné rozměry jsou malé v porovnání s poloměrem křivosti ohybu.

Pod malými deformacemi budeme rozumět takové, pro které se deformační gradient liší od identity „velmi málo“, tj, $F_{ij} - \delta_{ij} \ll 1$ pro libovolnou dvojici indexů i, j . Po vyhodnocení kvantitativního významu jednotlivých členů v rovnici (9) za uvedeného předpokladu o deformačním gradientu a zanedbání všech příspěvků, které jsou vzhledem k alespoň jednomu z ostatních výrazů v rovnici řádu $\mathcal{O}\left(\frac{\|\vec{x}\|}{R}\right)$, bude možno rovnici (9) přepsat do tvaru

$$\sum_{j \leq 2} \frac{\partial \mathcal{T}_{kj}}{\partial x_j} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (10)$$

Když za předpokladu malých deformací vyjádříme pomocnou proměnnou N z (3) a prvky matice $U - 1$ potřebné k výpočtu napětí (4) až (7), dostaneme (všude zanedbáváme nekonečně malé veličiny vyšších řádů):

$$U - I \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} - 1 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hat{y}}{R} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Pokusíme se nejprve zjistit, zda neexistuje takové řešení rovnic (10), ve kterém jsou všechny složky napětí \mathcal{T} v rovině xy nulové. Zápis rovnic zjednodušíme využitím skutečnosti, že výraz $\frac{\sqrt{E_1 E_3} \nu_{13}}{E_1(1+\nu_{12})}$ je Poissonův poměr σ při tahové deformaci ve směru osy z

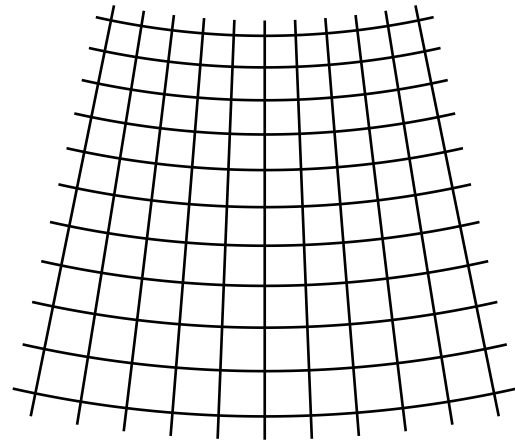
$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{11} &= E_1 \left[\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} - 1 + \nu_{12} \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - 1 \right) + (1 + \nu_{12}) \sigma \frac{\hat{y}}{R} \right] = 0, \\ \mathcal{T}_{12} &= \frac{1}{2} E_1 (1 - \nu_{12}) \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \right) = 0, \\ \mathcal{T}_{22} &= E_1 \left[\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - 1 + \nu_{12} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} - 1 \right) + (1 + \nu_{12}) \sigma \frac{\hat{y}}{R} \right] = 0.\end{aligned}$$

Jedná se o přeuročenu soustavu, nicméně její řešení existuje a má tvar

$$\hat{x} = a + C \sin \left(\frac{\sigma x}{R} - \beta \right) e^{-\frac{\sigma y}{R}}, \quad (12)$$

$$\hat{y} = \frac{R}{\sigma} - C \cos \left(\frac{\sigma x}{R} - \beta \right) e^{-\frac{\sigma y}{R}}. \quad (13)$$

Geometrie nalezeného řešení je znázorněna na obr. 2 – je to ukázka deformace původně čtvercové sítě v kolmém řezu vláknem při orientaci ohybu podle obr. 1, tedy střed ohybu se nachází pod úrovní obrázku.



Obr.2. Deformace příčného řezu.

5. Zrcadlově symetrická vlákna.

V dalším průběhu řešení úlohy se omezíme na vlákna s prakticky významnými tvary průřezů. Především budeme vyžadovat zrcadlovou symetrii průřezů vláken, přičemž osa symetrie průřezu bude ležet v ose y (a rovina symetrie vlákna v rovině yz). Pak bude zcela nepochybně funkce \hat{x} lichou funkcí proměnné x a funkce \hat{y} sudou funkcí této proměnné. Vyslovíme-li dále požadavek

$$\hat{y}(0, 0) = \hat{x}(0, 0) = 0,$$

budou mít právě nalezená „beznapěťová“ řešení rovnic rovnováhy podobu

$$\hat{x}_0 = \frac{R}{\sigma} \sin \frac{\sigma x}{R} e^{-\frac{\sigma y}{R}}, \quad (14)$$

$$\hat{y}_0 = \frac{R}{\sigma} \left(1 - \cos \frac{\sigma x}{R} e^{-\frac{\sigma y}{R}} \right). \quad (15)$$

Deformace $[\hat{x}_0, \hat{y}_0]$ vyhovuje nulové Neumannově okrajové podmínce na povrchu vlákna

$$\mathcal{T} \vec{n} = 0, \quad (16)$$

tj. řeší problém čistého ohybu, kdy na vlákno nepůsobí žádné boční síly. Je vidět, že její geometrie závisí výhradně na Poissonově poměru σ , a tedy bude řešením problému ohybu i pro materiály, které mají jiné deformační chování v tahu a v tlaku, ale jejich Poissonovy poměry v obou oblastech jsou stejné. Situaci nyní rozebereme podrobněji.

Abychom mohli počítat síly a momenty působící při ohybu, musíme znát napětí \mathcal{T}_{33} v (7), kam dosadíme z (11) a deformace (14), (15).

$$\mathcal{T}_{33} = \sqrt{E_1 E_3 \nu_{13}} \left(\frac{\partial \hat{x}_0}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}_0}{\partial y} - 2 \right) + E_3 \frac{\hat{y}_0}{R} = \frac{1 - \cos \frac{\sigma x}{R} e^{-\frac{\sigma y}{R}}}{\sigma} Y_3, \quad (17)$$

kde Y_3 je Youngův modul pružnosti pro jednoosý tah ve směru osy z .

Z výsledku (17) vyplývá, že anizotropie materiálu nemá žádný vliv na hodnoty ohybových sil. Je tedy třeba zaměřit pozornost na možnost navrhouvanou autory [2], že totiž na rozhraní mezi oblastí prodloužení a zkrácení materiálu dochází ke skokové změně materiálových konstant.

Nechť nyní Y_3^+ , Y_3^- jsou Youngovy moduly pružnosti v tahu, resp. v tlaku, $Y_3^+ \neq Y_3^-$. Je-li v části průřezu vlákna deformace tahová a v části tlaková, je nutno najít rozhraní mezi těmito oblastmi. To je posáno rovnicí $\hat{y}_0 = 0$, tj.

$$y_r = \frac{R}{\sigma} \ln \cos \frac{\sigma x}{R} \approx -\frac{1}{2} \frac{\sigma x^2}{R},$$

ovšem lze ukázat, že příspěvky deformačních sil a momentů působících na oblast mezi křivkami $y = y_r$ a $y = 0$ k celkové síle, resp. momentu, jsou v porovnání s uvedenými veličinami řádu $\mathcal{O}\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2\right)$ v případě síly a řádu $\mathcal{O}\left(\left(\frac{a}{R}\right)^3\right)$ v případě ohybového momentu (a je příčný rozměr vlákna v oblasti neutrální plochy), a tak se za předpokladu malých deformací dopustíme zanedbatelné chyby, když položíme $y_r = 0$; významně se tím ale zjednoduší výpočet.

Dále provedeme ilustrativní výpočty pro vlákna s některými speciálními průřezy. Nejprve vezmeme vlákno s obdélníkovým průřezem o stranách $2a \times 2b$. Neutrální plocha $\hat{y} = 0$ nemusí procházet nutně středem obdélníka; ten může mít polohu $y_s = h$ a lze očekávat $|h| < b$. Hodnotu h určíme na základě požadavku celkově nulové deformační síly

$$K = \int_{-a}^a \left(\int_{h-b}^{y_r} \mathcal{T}_{33} dy + \int_{y_r}^{h+b} \mathcal{T}_{33} dy \right) dx \approx \frac{a}{R} \left(Y_3^+ (h+b)^2 - Y_3^- (h-b)^2 \right) = 0$$

(symbolem „ \cdot^+ “ jsou zde i v celém následujícím textu označeny veličiny související s oblastí tahové deformace, tj. $y > 0$, zatímco veličny označené symbolem „ \cdot^- “ náležejí k oblasti $y < 0$), což dá pro h kvadratickou rovnici s právě jedním kořenem vyhovujícím požadavku $|h| < b$

$$h = \frac{Y_3^+ + Y_3^- - 2\sqrt{Y_3^+ Y_3^-}}{Y_3^- - Y_3^+} \cdot b = \frac{\sqrt{Y_3^-} - \sqrt{Y_3^+}}{\sqrt{Y_3^+} + \sqrt{Y_3^-}} \cdot b \quad (18)$$

Ohybový moment je

$$M = \int_{-a}^a \left(\int_{h-b}^{y_r} y \mathcal{T}_{33} dy + \int_{y_r}^{h+b} y \mathcal{T}_{33} dy \right) dx \approx \frac{4ab^3}{3R} \cdot \frac{4Y_3^+ Y_3^-}{\left(\sqrt{Y_3^+} + \sqrt{Y_3^-} \right)^2}$$

a výraz

$$B = \frac{4Y_3^+ Y_3^-}{\left(\sqrt{Y_3^+} + \sqrt{Y_3^-} \right)^2}$$

hraje v tomto vztahu roli modulu pružnosti v ohybu.

Z praktického hlediska bude dále významný výpočet pro vlákno s kruhovým průřezem. Postup je analogický a výpočty vedou k hodnotě „modulu pružnosti v ohybu“

$$B = \frac{1}{2}(Y_3^+ + Y_3^-) + \frac{1}{\pi}(Y_3^+ - Y_3^-) \left(\frac{8}{3} \sin \omega \cos^3 \omega - \cos \omega \sin \omega \cos 2\omega + \omega \right) ,$$

kde $\omega \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ je řešením rovnice

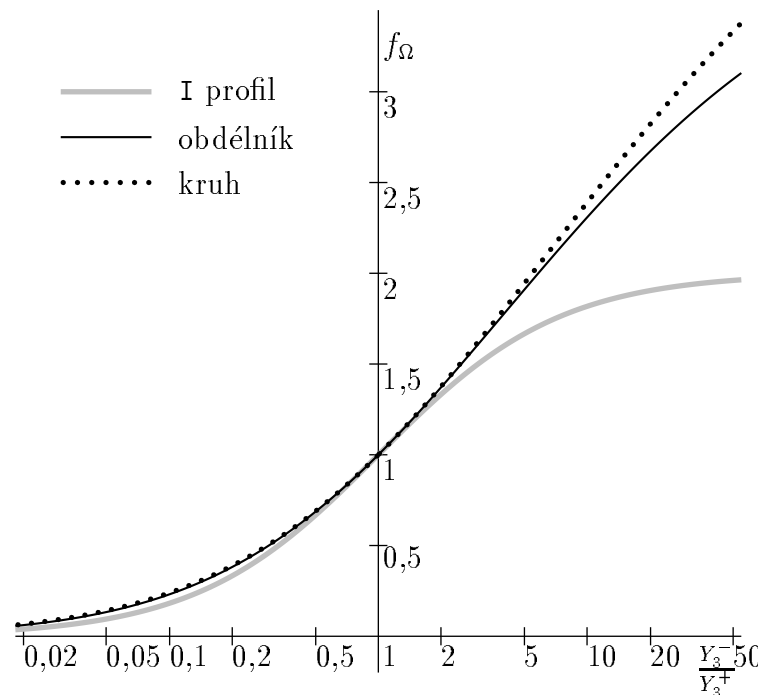
$$(Y_3^+ - Y_3^-) \left(\frac{2 + \sin^2 \omega}{3} \cos \omega + \omega \sin \omega \right) + (Y_3^+ + Y_3^-) \frac{\pi}{2} \sin \omega = 0 .$$

Lze snadno ukázat, že pro libovolný tvar Ω průřezu vlákna bude modul pružnosti B součinem

$$B = Y_3^+ \cdot f_\Omega \left(\frac{Y_3^-}{Y_3^+} \right) . \quad (19)$$

Na grafu č.3 je znázorněn průběh funkce f_Ω pro obdélníkový a kruhový průřez vlákna; dále je spíše pro zajímavost uveden průběh této funkce pro „vlákno“ (nosník) s I-průřezem, jehož svislá část má zanedbatelnou tloušťku. Po snadném výpočtu bychom zde došli ke vztahu

$$B = \frac{2Y_3^+Y_3^-}{Y_3^+ + Y_3^-} = Y_3^+ \cdot \frac{2\frac{Y_3^-}{Y_3^+}}{1 + \frac{Y_3^-}{Y_3^+}} .$$



Obr.3. Příklady průběhů funkcí f_Ω

Uvedené výsledky naznačují, že hodnota funkce f_Ω v (19) je tím větší, čím více je hmota průřezu vlákna koncentrována do okolí neutrální roviny při ohybu.

6. Materiály s nespojitým Poissonovým poměrem.

Řešení (12), (13) (popř. (14), (15)) rovnic rovnováhy přestává vyhovovat přirozenému požadavku na spojitost deformací, pokud je Poissonův poměr nespojitou funkcí deformačního stavu. Řešení (12), (13) vyhovuje Neumannově okrajové podmínce (16) bez ohledu na tvar průřezu vlákna. Při nespojitém Poissonově poměru je však takovýto požadavek příliš silný, a proto je nutno řešit okrajovou úlohu pro každý zadaný tvar vlákna samostatně.

Řešení ilustrujeme na vláknu (nosníku) s obdélníkovým průřezem $2a \times 2b$ posunutým o hodnotu h ve směru osy y . Řešení deformační úlohy budeme hledat zvlášť na oblasti $y > 0$ a zvlášť na oblasti $y < 0$ ve tvaru

$$\hat{x} = \hat{x}_0 + u(x, y) , \quad (20)$$

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + v(x, y) . \quad (21)$$

Vyjádříme-li napětí \mathcal{T} pomocí rozkladu (20), (21), dostaneme v důsledku toho, že napětí určené deformacemi \hat{x}_0, \hat{y}_0 je nulové, vztahy

$$\mathcal{T}_{11} = E_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} \frac{v}{R} , \quad (22)$$

$$\mathcal{T}_{12} = E_1 \frac{1 - \nu_{12}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (23)$$

$$\mathcal{T}_{22} = E_1 \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} \frac{v}{R}. \quad (24)$$

Stále platný předpoklad malých deformací vede k závěru, že člen $\sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} \frac{v}{R}$ ve výrazech (22) a (24) je v porovnání se zbývajícími dvěma sčítanci zanedbatelný, a proto ho z dalších úvah vynecháme. Dále je potřeba zformulovat okrajové podmínky pro hledané řešení úlohy. Pro $x = -a$ a $x = a$ požadujeme $\mathcal{T} \cdot \vec{n} = 0$ při $\vec{n} = (\pm 1, 0)$, tedy

$$\mathcal{T}_{11}|_{x=-a} = \mathcal{T}_{11}|_{x=a} = \mathcal{T}_{21}|_{x=-a} = \mathcal{T}_{21}|_{x=a} = 0, \quad (25)$$

pro $y = b + h$ má platit $\mathcal{T} \cdot \vec{n} = 0$ při $\vec{n} = (0, 1)$, tj

$$\mathcal{T}_{12}|_{y=h+b} = \mathcal{T}_{22}|_{y=h+b} = 0, \quad (26)$$

analogicky pro řešení v oblasti $y < 0$ při $y = h - b$.

Na rozhraní mezi oblastmi $\hat{y} > 0$ a $\hat{y} < 0$ je třeba řešení z obou oblastí navázat. Za rozhraní můžeme opět v rámci výpočtů malých deformací považovat přímku $y = 0$ a při přechodu přes rozhraní požadujeme spojitost deformace a silovou rovnováhu, tj.

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = \hat{x}_0^- - \hat{x}_0^+ \approx 0, \quad (27)$$

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \hat{y}_0^- - \hat{y}_0^+ \approx \frac{1}{2}(\sigma^- - \sigma^+) \frac{x^2}{R}, \quad (28)$$

$$\mathcal{T}_{12}^+|_{y=0} = \mathcal{T}_{12}^-|_{y=0}, \quad (29)$$

$$\mathcal{T}_{22}^+|_{y=0} = \mathcal{T}_{22}^-|_{y=0}. \quad (30)$$

Je známo, že soustava rovnic (10) při napětích definovaných pomocí (22) až (24) vede na homogenní biharmonickou rovnici. Pokusíme se předem získat více informací o vlastnostech jejího řešení na základě podmínek (25) až (30). Zavedeme proměnnou

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Funkce \mathcal{T}_{11} , \mathcal{T}_{12} , \mathcal{T}_{22} , v_x musejí vyhovovat rovnicím rovnováhy a navíc vztahům

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Z (22) až (24) vyjádříme obě parciální derivace funkce u , a po dosazení do (31) dostaneme rovnici

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mathcal{T}_{12}}{1 - \nu_{12}} - v_x \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathcal{T}_{11} - \nu_{12}\mathcal{T}_{22}}{1 - \nu_{12}^2} \right), \quad (32)$$

Vzhledem k symetrii oblasti se můžeme omezit na řešení na obdélníku $(0, a) \times (0, b+h)$. Ze symetrie vyplývají i okrajové podmínky na přímce $x = 0$. Funkce v má být sudá

v proměnné x , tedy $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ při $x = 0$, a dále funkce u je lichá v proměnné x , tedy $u = 0$ a $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ při $x = 0$.

$$v_x(0, y) = 0, \quad (33)$$

$$\mathcal{T}_{12}(0, y) = 0, \quad (34)$$

Z rovnic (10), (32) lze při využití okrajových podmínek (25), (26), (33) a (34) vyjádřit funkce \mathcal{T}_{11} , \mathcal{T}_{12} , v_x uvnitř dané oblasti pomocí funkce \mathcal{T}_{22} :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{12}(x, y) &= - \int_0^x \frac{\partial \mathcal{T}_{22}(\xi, y)}{\partial y} d\xi, \\ \mathcal{T}_{11}(x, y) &= - \int_x^a \int_0^\zeta \frac{\partial^2 \mathcal{T}_{22}(\xi, y)}{\partial y^2} d\xi d\zeta, \\ v_x(x, y) &= - \frac{2 + \nu_{12}}{1 - \nu_{12}^2} \int_0^x \frac{\partial \mathcal{T}_{22}(\xi, y)}{\partial y} d\xi + \frac{1}{1 - \nu_{12}^2} \int_0^x \int_\tau^a \int_0^\zeta \frac{\partial^3 \mathcal{T}_{22}(\xi, y)}{\partial y^3} d\xi d\zeta d\tau, \end{aligned} \quad (35)$$

vše samozřejmě za předpokladu, že jsou přípustné příslušné záměny pořadí integrace a derivování.

Z okrajových podmínek (34), (25) a rovnice rovnováhy (10) vyplývá pro funkci \mathcal{T}_{22}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_0^a \mathcal{T}_{22}(x, y) dx &= \int_0^a \frac{\partial \mathcal{T}_{22}(x, y)}{\partial y} dx = - \int_0^a \frac{\partial \mathcal{T}_{12}(x, y)}{\partial x} dx = \\ &= - [\mathcal{T}_{12}(a, y) - \mathcal{T}_{12}(0, y)] = 0 \end{aligned}$$

a to vede v důsledku okrajové podmínky (26) k požadavku

$$\int_0^a \mathcal{T}_{22}(x, y) dx = 0. \quad (36)$$

7. Výpočet přídatné ohybové síly a momentu.

Aniž bychom nyní hledali konkrétní vyjádření řešení biharmonické rovnice pro napětí \mathcal{T}_{22} , můžeme se pokusit o kvalitativní vyhodnocení příspěvku opravných deformací u , v k celkové působící síle a momentu. Opravná síla v oblasti $y > 0$ bude v důsledku (17) při využití vztahů (36), (35)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0^+ &\approx \int_{-a}^a \int_0^{b+h} \sqrt{E_1^+ E_3^+} \nu_{13}^+ \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} + \frac{\partial v^+}{\partial y} \right) dy dx = \\ &= -\sigma^+ \int_{-a}^a \int_x^a \int_0^\zeta \left[\frac{\partial \mathcal{T}_{22}^+}{\partial y}(\xi, b+h) - \frac{\partial \mathcal{T}_{22}^+}{\partial y}(\xi, 0) \right] d\xi d\zeta dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Jsou-li funkce \mathcal{T}_{12}^+ , \mathcal{T}_{22}^+ spojité na $\langle -a, a \rangle \times \langle 0, b+h \rangle$ včetně prvních derivací, vyplývá z rovnice rovnováhy (10) a okrajové podmínky (26)

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{22}^+}{\partial y}(\xi, b+h) = - \frac{\partial \mathcal{T}_{12}^+}{\partial x}(\xi, b+h) = 0 \quad (38)$$

a při zavedení pomocné funkce

$$\tau^+(y) = \int_{-a}^a \int_x^a \int_0^\zeta \mathcal{T}_{22}^+(\xi, y) d\xi d\zeta dx$$

můžeme za předpokladu, že je přípustná záměna pořadí příslušných integrací a derivování podle parametru, upravit výsledek (37) do podoby

$$\mathcal{K}_0^+ \approx \sigma^+ \tau^{+'}(0) .$$

Podobně lze vyjádřit velikost opravného ohybového momentu vyvolaného změnami deformačními poměry v oblasti $y > 0$:

$$\mathcal{M}_0^+ \approx \int_{-a}^a \int_0^{b+h} y \sqrt{E_1^+ E_3^+ \nu_{13}^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} + \frac{\partial v^+}{\partial y} \right) dy dx = -\sigma^+ \tau^+(0) . \quad (39)$$

O funkci $\tau^+(y)$ můžeme získat další informace z okrajové podmínky (26) a z (38) – v jejich důsledku je

$$\tau^+(b+h) = \tau^{+'}(b+h) = 0 . \quad (40)$$

Navíc můžeme využít požadavků (27), (28), (29), (30) při porovnání vlastností funkcí τ^+ a τ^- při argumentu 0; přitom odhlédneme od aproximativního charakteru rovností (27) a (28). Z uvedených podmínek vyplývá

$$\tau^+(0) = \tau^-(0) , \quad (41)$$

$$\tau^{+'}(0) = \tau^{-'}(0) , \quad (42)$$

$$\frac{\tau^{+''}(0)}{E_1^+ [1 - (\nu_{12}^+)^2]} = \frac{\tau^{-''}(0)}{E_1^- [1 - (\nu_{12}^-)^2]} , \quad (43)$$

$$\frac{\tau^{+'''}(0)}{E_1^+ [1 - (\nu_{12}^+)^2]} - \frac{\tau^{-'''}(0)}{E_1^- [1 - (\nu_{12}^-)^2]} = 2(\sigma^- - \sigma^+) \frac{a}{R} . \quad (44)$$

Celkovou hodnotu změny momentu ohybových sil dostaneme jako součet příspěvku (39) a obdobného výrazu pro oblast $y < 0$. Funkce $\tau(y)$ definovaná pro $y \geq 0$ jako $\tau^+(y)$ a pro $y \leq 0$ jako $\tau^-(y)$ je podle (41) a (42) spojitá v argumentu 0 a má tam i spojitou první derivaci, a tak lze psát

$$\mathcal{M}_0 \approx (\sigma^- - \sigma^+) \tau(0) ,$$

podobně pro celkovou opravu ohybové síly vyjde

$$\mathcal{K}_0 \approx (\sigma^+ - \sigma^-) \tau'(0) .$$

Kvalitativní rozbor vlastností funkcí, které vyhovují vztahům (41), (42), (43), (44) a dále (40) (a analogickým podmínkám pro $y = -b+h$), vede k závěru, že platí následující úměrnosti:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &\approx C \cdot \frac{(\sigma^+ - \sigma^-)^2 ab^2}{R} , \\ \mathcal{M}_0 &\approx D \cdot \frac{(\sigma^+ - \sigma^-)^2 ab^3}{R} . \end{aligned} \quad (45)$$

Závislost na kvadrátu rozdílu Poissonových poměrů platí v případě zachování hodnot $E_1 [1 - \nu_{12}^2]$ v horní i dolní polorovině. Závislost na rozměrech platí bezvýhradně pouze při zachování poměru $\frac{b}{a}$; v opačném případě není jisté dodržení náležitě podobnosti průběhu funkce $\tau(y)$ a úměra je spíše orientační.

Významným výsledkem je to, že přídatný ohybový moment je stejného řádu vzhledem k příčným rozměrům vlákna jako ohybový moment při stejných Poissonových poměrech v tahu a v tlaku, a tedy samotná různost těchto materiálových parametrů může ovlivnit hodnotu konstanty úměrnosti mezi křivostí a ohybovým momentem. Ze vztahu (45) není patrné, zda je hodnota opravy ohybového momentu kladná nebo záporná, její znaménko však nezávisí na tom, který z Poissonových poměrů je větší, a fyzikální důvody hovoří jasně pro její pozitivitu – velikost ohybového momentu souvisí s deformační energií a je jisté, že „slepení“ částí vlákna nacházejících se v oblasti tahové a tlakové deformace nějakou kladnou práci stojí.

Ukazuje se dále, že i přídatná ohybová síla je řádově srovnatelná s příspěvkem oblastí $y > 0$ a $y < 0$ k celkové ohybové síle. V důsledku toho dojde při ohybu vláken s různými Poissonovými poměry v tahu a v tlaku k posunutí neutrální plochy $\hat{y} = 0$ oproti materiálům s konstantním Poissonovým poměrem. Tento posuv má za následek další zvětšení ohybového momentu, neboť tento moment nahlížený jako funkce polohy neutrální plochy nabývá pro nalezenou hodnotu (18) svého minima.

8. Závěr

Porovnání všech výsledků v grafu č.3 vede k jednoznačnému závěru, že za předpokladu nespojitě závislosti modulu pružnosti materiálu vláken v tahu na tahové deformaci vláken je konstanta úměrnosti B v rovnici (1) závislá na tvaru průřezu vlákna, a tedy není materiálovou konstantou. Dále se ukazuje, že je možné vskutku naměřit odlišné hodnoty „modulu pružnosti v ohybu“ a modulu pružnosti v tahu; naměřené hodnoty konstanty B však závisejí za daných předpokladů evidentně nejen na tvaru průřezu – ten bychom mohli alespoň pro některá přírodní vlákna považovat za jejich charakteristickou vlastnost a do vztahu (19) jej zahrnout – ale i na stupni tahové deformace vláken: při ohýbání vláken, která jsou navíc zatížena tahem, bychom měli dostat hodnotu $B = Y_3^+$, pro vlákna podrobená tlaku (i když realizace takového experimentu by byla asi dost náročná) lze očekávat hodnotu $B = Y_3^-$.

Odlišné hodnoty obou zmíněných modulů lze naměřit dokonce i v případě, že moduly pružnosti materiálu v tahu a v tlaku jsou stejné; aby tento jev nastal, stačí mít materiál s různými Poissonovými poměry v tahové a tlakové oblasti.

Poděkování: Práce vznikla v rámci výzkumného záměru MŠMT č. MSM 245100303.

Literatura:

- [1] Černých, K. F.: *Vveděnije v anizotropnuju uprugost*, Nauka, Moskva 1988.
- [2] Chapman, B. E.: , J. Textile Institute, 1973, **64**, p.312.
- [3] Kalousek, Z.: *Napětí energeticky přidružené k protažení*, Sborník konference Inženýrská mechanika, Brno, 1999.
- [4] Morton, W. E., Hearle, J. W. S.: *Physical Properties of Textile Fibres*, Textile Institute, Manchester 1993.