National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2003
Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2003

paper no.
263

FINITE ELEMENT MODELLING OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN GLOTTIS

A. Damašek[1], **P. Burda**[2]

Summary: *The paper deals with numerical computations of viscous incompressible fluid flow in glottis described by Navier-Stokes equations and discretized by the finite element method. For space discretization the Hood-Taylor elements are used and time discretization is done using the Euler method. Navier-Stokes equations with the nonlinear term are discretized by semiimplicit integration scheme. For higher Reynolds number fluid flow Streamline Upwind Petrov-Galerkin Method - SUPG which stabilizes integration scheme is used. This method uses special weight functions which modify shape functions based on the Galerkin principle.*

1. Formulace obecné úlohy proudění vazké nestlačitelné tekutiny v kanále

Pro případ proudění vzduchu v hlasivkách vyjdeme z obecné úlohy 2D proudění vazké nestlačitelné tekutiny v jednoduchém přímém kanále (obr. 1), popsané soustavou Navier-Stokesových rovnic (1) a rovnicí kontinuity (2). Řešení soustavy hledáme na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega$ v časovém intervalu $[0, T]$. Rychlosti v tekutině v čase $t = 0$ jsou popsány funkcí ${}^0v$, objemová síla $f_i = f_i(x, t)$ a ν je kinematický koeficient vazkosti tekutiny.
Hledáme rychlost $v,\ v_i = v_i(x, t)$ a tlak $\tilde{p}/\rho = p = p(x, t)$, kde $x = (x_1, x_2) \in \Omega,\ t \in [0, T]$, na $\Omega \times (0, T)$ splňující

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla p = f \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{2}$$

Platí okrajové podmínky

$$v = g \ \text{ na } \ \Gamma_{in} \cup \Gamma_{wall} \tag{3}$$

$$\nu\frac{\partial v}{\partial n} - pn = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_{out} \quad ('\text{do nothing}') \tag{4}$$

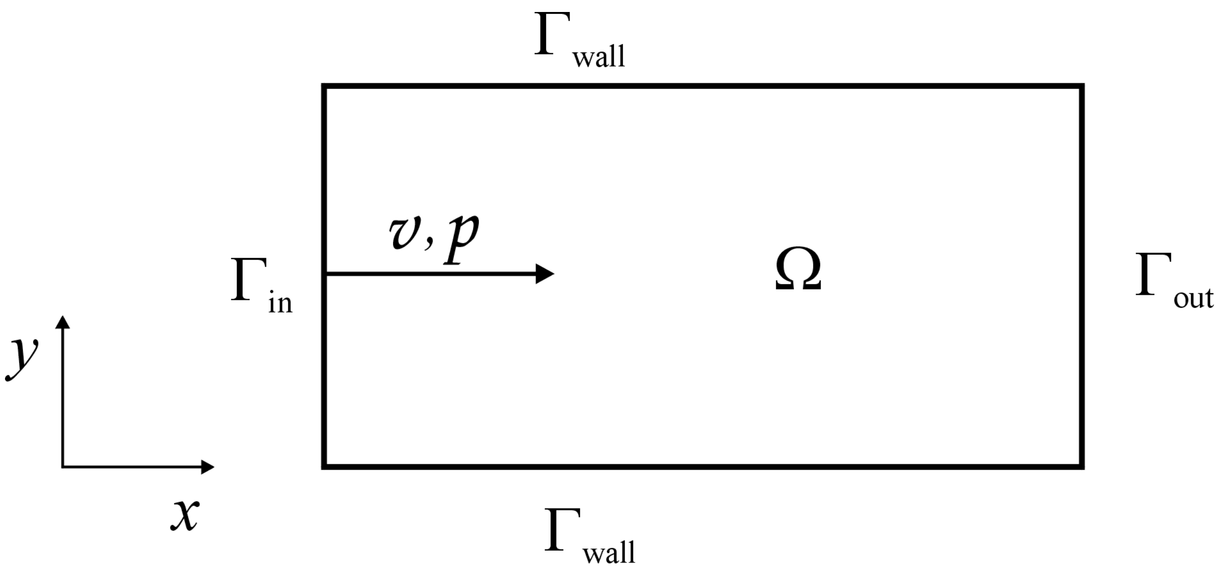
kde Γ_{in} , Γ_{wall} a Γ_{out} jsou části hranice $\partial\Omega$, oblasti Ω na vstupu, stěně a výstupu.

[1]Ing. Alexandr Damašek, Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, e-mail: damasek@it.cas.cz

[2]Doc. RNDr. Pavel Burda, CSc., Katedra technické matematiky, Fakulta strojní ČVUT, Karlovo náměstí 13, 121 35 Praha 2, e-mail: burda@fsik.cvut.cz

Počáteční podmínka pro rychlost v tekutině je dána vztahem

$$v(0) = {}^0v.$$



Obr. 1: *Schéma oblasti* Ω

2. Numerické řešení úlohy pomocí metody konečných prvků

K numerickému řešení využíváme metodu konečných prvků. Prostorová diskretizace je zajištěna pomocí Hood-Taylorových prvků P2/P1, uvedených například v (Gresho, 1998) přičemž hodnoty složek rychlosti jsou hledány v rozích a středech hran jednotlivých prvků a hodnoty tlaku pouze v rozích. Tyto složky rychlosti i tlak jsou potom aproximovány jako spojité funkce v prostorových proměnných na všech uzlech jednotlivých prvků. Pro řešení Navier-Stokesových rovnic je využita semiimplicitní metoda.

Pro dosažení vyšších hodnot Reynoldsových čísel lze využít metodu SUPG - *Streamline Upwind Petrov-Galerkin method*, která podle (Brooks & Hughes, 1982; Franca & Frey, 1992) spočívá ve vytvoření speciálních váhových funkcí $\varphi = N + P$. Ty jsou vytvořeny součtem původních symetrických bázových funkcí N odpovídajících Galerkinovu principu a nesymetrických bázových funkcí P, které jsou konstruovány takovým způsobem, aby dostatečně zohledňovaly vliv přitékajícího proudu tekutiny (upwind).

2.1. Navier-Stokesovy rovnice - semiimplicitní metoda se SUPG

Semiimplicitní metoda, uvedená například v (Brooks & Hughes, 1982), vyžaduje použití slabé formulace klasické úlohy. Pro Navier-Stokesovy rovnice uvažujme testovací funkci

$$\varphi \;=\; (\varphi_1, \varphi_2) \in V_h, \quad \varphi = 0 \text{ na } \Gamma_{in} \cup \Gamma_{wall}$$

a pro rovnici kontinuity

$$\psi \in Q_h,$$

kde V_h je prostor testovacích funkcí odpovídající rychlostem a Q_h prostor funkcí odpovídající tlakům. Vynásobme (vektorovou) rovnici (1) skalárně (vektorovou) funkcí φ, rovnici (2) funkcí ψ a obě rovnice integrujme přes oblast Ω a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (v\nabla)v\varphi \mathrm{d}\Omega - \nu \int_\Omega \Delta v\varphi \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla p\varphi \mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}\Omega \\ \int_\Omega \mathrm{div}\, v\, \psi \mathrm{d}\Omega &= 0. \end{aligned}$$

Tvarová funkce φ umožňující dosažení vyšších Reynoldsových čísel je definována součtem spojité části N a nespojité části P.

$$\varphi = N_i + P_i,$$

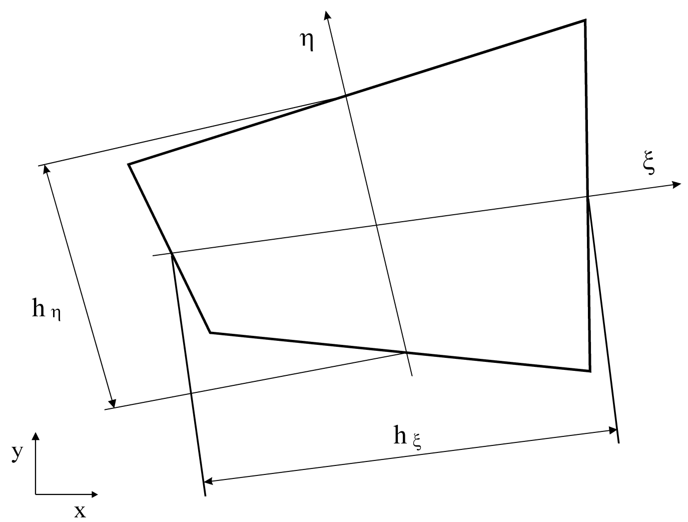
kde N_i je spojitá váhová funkce jako v případě centrálních diferencí a P_i je po prvcích nespojitá váhová funkce. Tato váhová funkce je vyjádřena vztahem

$$P_i = \sum_{j=1}^{2} \bar{k} \frac{v_j}{\| v \|^2} \frac{\partial N_i}{\partial x_j},$$

přičemž normováním jednotlivých složek rychlosti v_j je zajištěno minimalizování vlivu této uměle vnesené difuze do směru kolmého vzhledem ke směru proudu tekutiny na konkrétním uzlu daného prvku. Členy $\frac{\partial N_i}{\partial x_j}$ jsou příslušné derivace původních tvarových funkcí sloužících při výpočtech semiimplicitním schématem založeným na centrálních diferencích. Ve dvojrozměrném případě se parametr $\bar{k}$ určí podle vztahu

$$\bar{k} = (\bar{\xi} v_\xi h_\xi + \bar{\eta} v_\eta h_\eta)/2,$$

pomocí něhož počítáme vliv difůze v křivočarých souřadnicích. Na obrázku jsou patrné střední příčky prvku potřebné pro normování rychlostí.



Obr. 2: *Schéma prvku v křivočarých souřadnicích*

Pro $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ platí vztahy

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= (\mathrm{cth}\ \alpha_\xi) - 1/\alpha_\xi \\ \bar{\eta} &= (\mathrm{cth}\ \alpha_\eta) - 1/\alpha_\eta,\end{aligned}$$

přičemž α_ξ, α_η jsou ve složkách rozepsaná Pecletova čísla definována vztahy

$$\begin{aligned}\alpha_\xi &= \rho v_\xi h_\xi / 2\nu \\ \alpha_\eta &= \rho v_\eta h_\eta / 2\nu.\end{aligned}$$

Složky rychlostí v_ξ, v_η představují projekce vektoru rychlosti v do jednotkových vektorů $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$ odpovídajících lokálnímu souřadnému systému na konečném prvku

$$\begin{aligned}v_\xi &= e_\xi \cdot v \\ v_\eta &= e_\eta \cdot v.\end{aligned}$$

Nyní aplikujeme na členy $\nu \int_\Omega \Delta v N \mathrm{d}\Omega$ a $\int_\Omega \nabla p N \mathrm{d}\Omega$ integraci per partes. Na členy násobené váhovou tvarovou funkcí P nelze integraci per partes uplatnit, protože funkce P není spojitá přes hranice prvků.

Zavedením dirichletovské podmínky (3) a *'do nothing'* okrajové podmínky (4) dostáváme *slabou SUPG formulaci* úlohy, ve které hledáme v, p splňující rovnice

$$\begin{aligned}& \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} N \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (v \cdot \nabla) v N \mathrm{d}\Omega + \nu \int_\Omega \nabla v \nabla N \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p (\nabla \cdot N) \mathrm{d}\Omega + \\ + \ & \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} P \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (v \cdot \nabla) v\ P \mathrm{d}\Omega - \nu \int_\Omega \Delta v\ P \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla p\ P\ \mathrm{d}\Omega = \\ = \ & \int_\Omega f N \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega f P \mathrm{d}\Omega, \\ & \int_\Omega \mathrm{div} v\ \psi \mathrm{d}\Omega = 0,\end{aligned}$$

pro všechny testovací funkce $N, P \in V_h,\ \psi \in Q_h$.

Dále můžeme přejít k řešení diskretizované úlohy. Časovou dikretizaci provedeme nahrazením derivace rychlosti v $n+1$ časovém kroku Eulerovou zpětnou diferencí a vzhledem k použití semiimplicitní metody provedeme náhradu $(v^{n+1} \cdot \nabla) v^{n+1} \approx (v^n \cdot \nabla) v^{n+1}$.

K sestavení matic soustavy a pravých stran je nutné ve slabé formulaci počítat hodnoty a derivace tvarových funkcí, nezbytných pro aproximaci soustavy Navier-Stokesových rovnic a rovnice kontinuity při prostorové diskretizaci dané oblasti.
Předpokládáme-li systémy tvarových funkcí $\{\mathbf{N}_i\}_{i=1}^{2L_N}$, kde $\mathbf{N}_1 = (N_1, 0)$, $\mathbf{N}_2 = (0, N_1)$, $\mathbf{N}_3 = (N_2, 0)$, $\mathbf{N}_4 = (0, N_2)$, ... a $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{2L_N}$, kde $\mathbf{P}_1 = (P_1, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (0, P_1)$, $\mathbf{P}_3 = (P_2, 0)$, $\mathbf{P}_4 = (0, P_2)$, které jsou basí prostoru V_h a systém tvarových funkcí $\{M_i\}_{i=1}^{L_M}$, který je base prostoru Q_h a položíme-li $\mathbf{N} = \mathbf{N}_j$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_j$ a $\psi = M_j$, máme

$$\begin{aligned}& \int_\Omega \frac{v^{n+1}}{\tau} \mathbf{N}_j \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (v^n \cdot \nabla) v^{n+1} \mathbf{N}_j \mathrm{d}\Omega + \nu \int_\Omega \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}_j}{\partial x_k} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p^{n+1} (\nabla \cdot \mathbf{N}_j) \mathrm{d}\Omega + \\ + \ & \int_\Omega \frac{v^{n+1}}{\tau} \mathbf{P}_j \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (v^n \cdot \nabla) v^{n+1} \mathbf{P}_j \mathrm{d}\Omega - \nu \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x_k^2} \mathbf{P}_j \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla p^{n+1} \mathbf{P}_j \mathrm{d}\Omega = \\ = \ & \int_\Omega f^{n+1} \mathbf{N}_j \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{v^n}{\tau} \mathbf{N}_j \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega f^{n+1} \mathbf{P}_j \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{v^n}{\tau} \mathbf{P}_j \mathrm{d}\Omega, \\ & \int_\Omega (\nabla \cdot v^{n+1}) M_j \mathrm{d}\Omega = 0.\end{aligned}$$

Označíme-li $v = (v_x, v_y)$ lze hledané složky rychlosti a tlaky vyjádřit jako lineární kombinace tvarových funkcí N_i *a* M_i a koeficientů těchto tvarových funkcí v_{x_i}, v_{y_i}, p_i na všech prvcích dané oblasti podle ${v_x}^{n+1} = \sum_{i=1}^{L_N} {v_x}_i^{n+1} N_i$, ${v_y}^{n+1} = \sum_{i=1}^{L_N} {v_y}_i^{n+1} N_i$, $p^{n+1} = \sum_{i=1}^{L_M} p_i^{n+1} M_i$, přičemž L_N je počet uzlů pro rychlosti a L_M počet uzlů pro tlaky.

V maticové formě bude soustava zapsána takto:

$$K_{ji}^{n+1} = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & \begin{array}{l} -\int_\Omega M_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \mathrm{d}\Omega \\ +\int_\Omega \frac{\partial M_i}{\partial x} P_j \mathrm{d}\Omega \end{array} \\ 0 & K_{yy} & \begin{array}{l} -\int_\Omega M_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \mathrm{d}\Omega \\ +\int_\Omega \frac{\partial M_i}{\partial y} P_j \mathrm{d}\Omega \end{array} \\ -\int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial x} M_j \mathrm{d}\Omega & -\int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial y} M_j \mathrm{d}\Omega & 0 \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} K_{xx} = K_{yy} \;&=\; \frac{1}{\tau} \int_\Omega N_i \left(N_j + P_j\right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \left(v_x^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_y^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(N_j + P_j\right) \mathrm{d}\Omega + \\ &+\; \nu \int_\Omega \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega - \nu \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) P_j \mathrm{d}\Omega . \end{aligned}$$

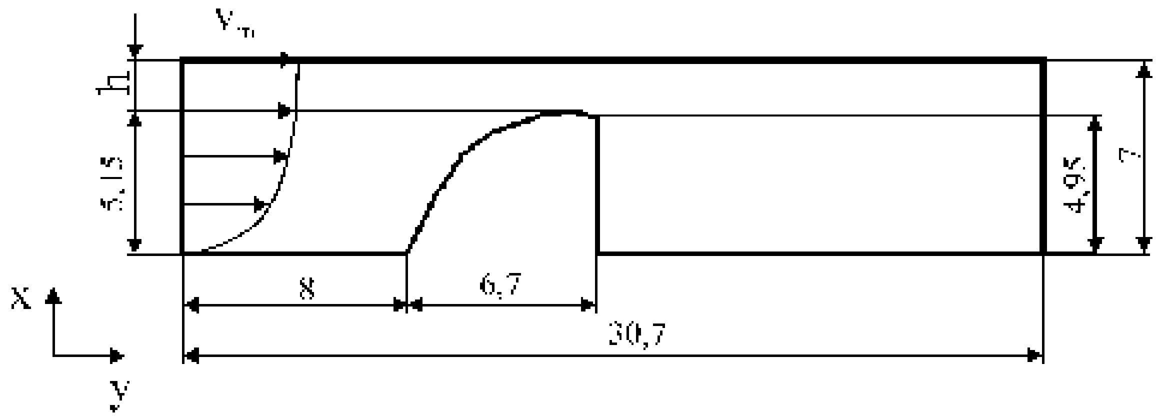
$$R_j^{n+1} = \begin{bmatrix} \int_\Omega f_x^{n+1} \left(N_j + P_j\right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{u_x^n}{\tau} \left(N_j + P_j\right) \mathrm{d}\Omega \\ \int_\Omega f_y^{n+1} \left(N_j + P_j\right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{u_y^n}{\tau} \left(N_j + P_j\right) \mathrm{d}\Omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_i^{n+1} = \begin{bmatrix} {v_x}_i^{n+1} \\ {v_y}_i^{n+1} \\ p_i^{n+1} \end{bmatrix},$$

v každém časovém kroku tedy řešíme lineární soustavu rovnic ve tvaru

$$K_{ji}^{n+1} V_i^{n+1} = R_j^{n+1}.$$

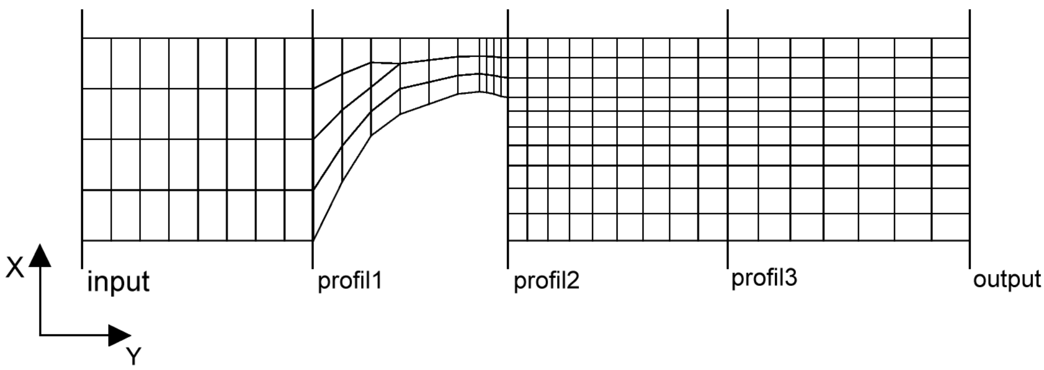
3. Numerické výsledky

K dispozici jsou výsledky 2D úlohy nestacionárního proudění vazké nestlačitelné tekutiny kolem tuhého profilu hlasivek počítané numerickou metodou se semiimplicitním integračním schématem a s aplikovanou stabilizací pomocí metody SUPG. Vzhledem k tomu, že se jedná o symetrické proudění, postačilo uvažovat pouze jednu polovinu hlasivek, jejíž geometrie je zřejmá z obr.3 s rozměry uvedenými v milimetrech. Na celém povrchu hlasivek je předepsána okrajová podmínka pro obě složky rychlosti tekutiny $v_x, v_y = 0$ $[\mathrm{m.s^{-1}}]$ a na výstupu je předepsána podmínka "do nothing". Na vstupu je zadán parabolický rychlostní profil, přičemž v ose kanálu je hodnota vstupní rychlost tekutiny $v_{in} = 4$ $[\mathrm{m.s^{-1}}]$. Nejužší místo mezi výčnělkem hlasivek a osou kanálu je s ohledem na riziko výrazného vzrůstu rychlosti voleno $h = 1.85$ $[\mathrm{mm}]$, což je již nad horní mezí nutnou k rozvoji flutteru, nezbytného pro vlastní fonační funkci hlasivek. Síť konečných prvků s označenými místy jednotlivých vykreslených profilů je znázorněna na obr. 4.

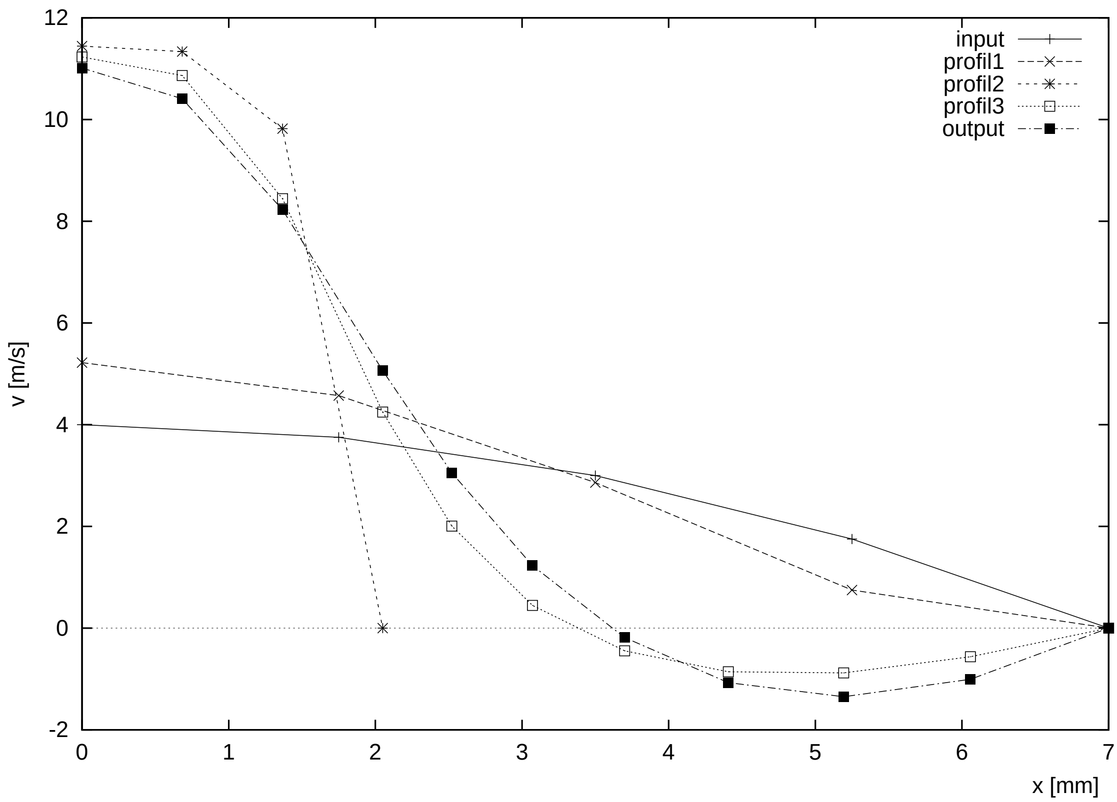


Obr. 3: *Schéma kanálu tvořeného profilem hlasivek*

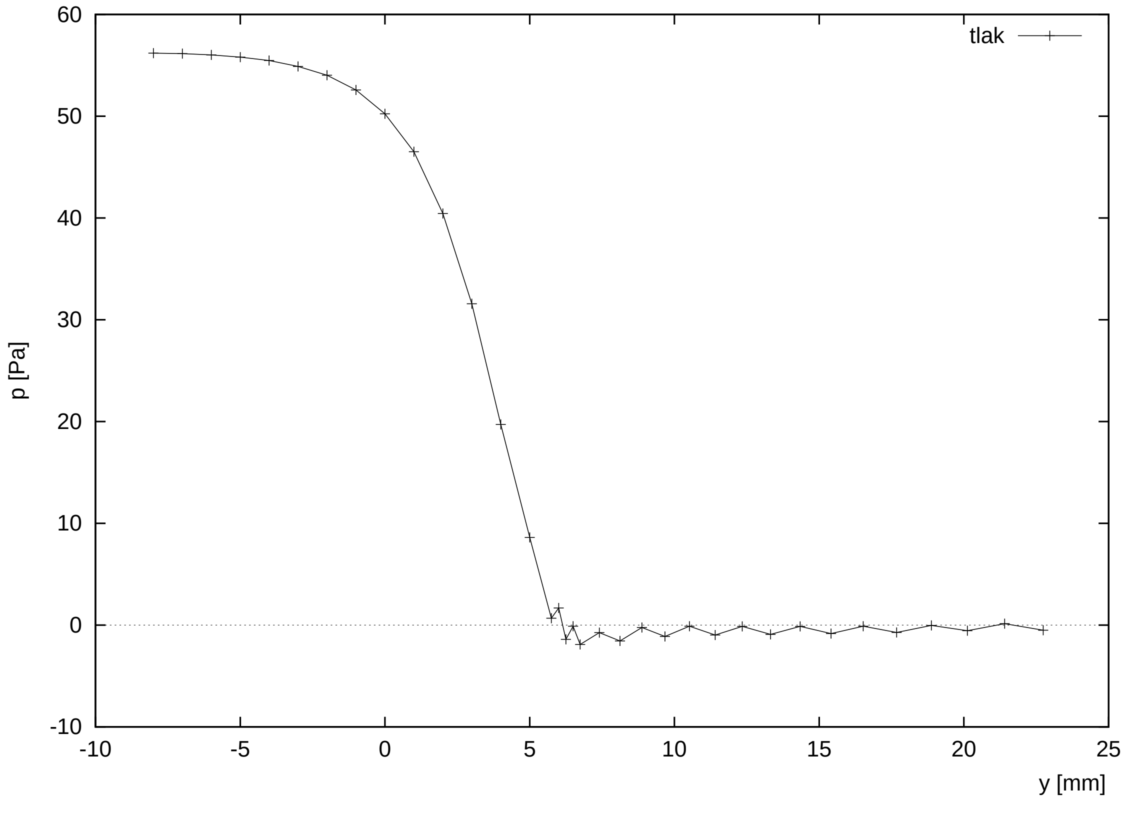
V místě vykreleného rychlostního profilu 2 je maximální hodnota podélné složky rychlosti v ose kanálu $v_y \approx 11.5$ $[\mathrm{m.s^{-1}}]$, přičemž odpovídající charakteristický rozměr je, jak je patrné z obr. 3, vzhledem ke tvaru výčnělku hlasivek oproti h nepatrně větší. Kinematická viskozita tekutiny je volena $\nu = 0.00015$ $[\mathrm{m^2.s^{-1}}]$, což je 10x vyšší, než je její reálná hodnota pro vzduch.



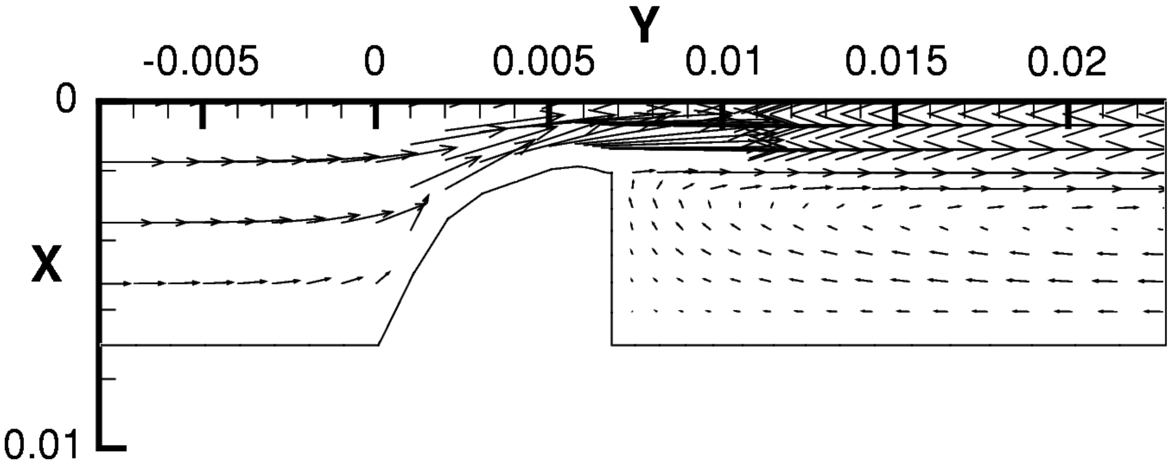
Obr. 4: *Schéma sítě konečných prvků s vyznačenými místy pro vykreslení rychlostních profilů*



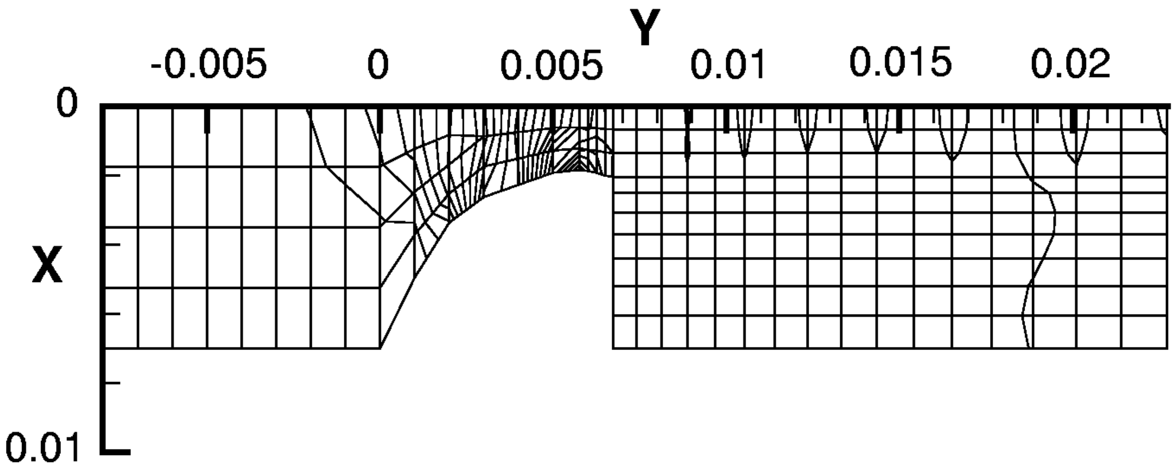
Obr. 5: *Rychlostní profily*



Obr. 6: *Průběh tlaku v ose kanálu*



Obr. 7: *Vektory rychlostí nestacionárního řešení pro* $Re \approx 150$ *v čase t* = 100 s



Obr. 8: *Isolinie tlaků nestacionárního řešení pro* $Re \approx 150$ *v čase t* = 100 s

4. Závěr

Ze zobrazených výsledků je patrný průběh proudění a zejména rozsah a tvar vírové struktury za výčnělkem hlasivek. Vzhledem k použitému numerickému schématu však nebylo možné dosáhnout reálných hodnot Reynoldsova čísla, které se při vytváření lidské řeči v hlasivkách běžně vyskytují. Dosavadní numerické schéma tedy neumožňuje provádění výpočtů při reálné hodnotě viskozity vzduchu, kterou lze uvažovat $\nu = 0.000015$ $[\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}]$, nýbrž je z důvodu jeho stability nutné akceptovat hodnotu 10x vyšší. Přestože podélná složka vstupní rychlosti tekutiny v ose kanálu $v_{in} = 4$ $[\mathrm{m.s}^{-1}]$ je poněkud vyšší než odpovídá fisiologickému rozmezí, kde lze uvažovat hodnotu rychlosti do $\approx 1 - 2$ $[\mathrm{m.s}^{-1}]$, Reynoldsovo číslo $Re \approx 150$ se stále pohybuje pod skutečnými hodnotami, které se v hlasivkách vyskytují v řádu 10^3 a vyšším (Hofmans, 1998). Maximální šířka mezi výčnělky hlasivek se podle (Alipour & Titze, 1996; Alipour & Scherer, 2000) pohybuje kolem 2.6 mm, tedy $h \approx 1.3$ mm. Dosažení nižší hodnoty tohoto rozměru je však vzhledem k nárůstu rychlosti v tomto místě pro dané numerické schéma nedostupné. Použité numerické schéma lze využít zejména pro případy proudění definované nižšími hodnotami Reynoldsova čísla.

5. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory Komplexního projektu GA ČR 101/98/K019 Matematicko-fyzikální modelování vibroakustických systémů v biomechanice hlasu a sluchu se zaměřením na vývoj náhradních materiálů a protéz.

6. Literatura

Gresho, P.M., Sani,R.L.: *Incompressible flow and the finite element method*, Wiley, 1998

Brooks, A., Hughes, T.: *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **32**(1982)

Franca, L.P., Frey, S.L.: *Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **99**(1992), 209-233

Hofmans, G.C.J.: *Vortex Sound in Confined Flows*, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 1998

Alipour, F., Titze, R.I.: *Combined Simulation of Two-Dimensional Airflow and Vocal Fold Vibration*, Vocal Fold Physiology, Controlling Complexity and Chaos, Singular, San Diego, 1996

Alipour, F., Scherer, C. R.: *Vocal Fold Bulging Effects on Phonation Using a Biophysical Computer Model*, Journal of Voice **14**(2000), No. 4., 470-483