National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2003
Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2003

paper no. 265

LARGE DEFORMATION — LARGE AMOUNT OF UNKNOWN

Z. Fiala[1]

Summary: *Large deformations are exposed from a viewpoint of differential geometry. This enables to formulate kinematics of continua in a compact, coordinate-free way with clear geometrical sense. In addition, more advanced concepts of Riemannian geometry bring interesting, totally new ideas to the very basic theory of large deformations. From this perspective the objective time derivative is unambiguously selected and the logarithmic strain attains a clear geometrical meaning. The primary aim of this paper is to present a brief outline of this approach and attract attention to these new ideas, quite unknown. At the end, new objective time derivative will be proposed.*

1. Úvod

Klasická inženýrská koncepce velkých deformací vychází z pojímání deformačního gradientu jako matice [Chadwick (1999)]. Pokud se omezíme jen na jediný materiálový bod kontinua, takovýto přístup poskytuje dostatečnou lokální informaci o deformaci. Už však nestačí, pokud nás zajímají vzájemné deformace blízkých bodů. Podobná situace nastává i v případě časového průběhu deformačního procesu, protože teorie konečných, na rozdíl od malých deformací, důsledně rozlišuje mezi počátečním a koncovým stavem.

Abychom systematicky popsali časový průběh deformačního procesu, využijeme k tomu aparát *diferenciální geometrie*, který nabízí mnohem jemnější nástroje pro popis konečných deformací než samotný maticový počet. Hlubší zájem o matematické základy mechaniky kontinua inicioval zejména Noll (1958, 1972) a v současné době je Riemannova geometrie využívána v řadě publikací, zabývajících se teoretickými aspekty deformace kontinua [Marsden & Hughes (1983), Sansour (1992), Giessen & Kollmann (1996), Stumpf & Hoppe (1997), Kadianakis (1999)].

Kromě prezentace tohoto standardního pohledu, příspěvek krátce shrne pokročilejší aspekty kinematiky konečných deformací, které se objevily v literatuře, aniž by však zaznamenaly větší pozornost. Konkrétně jde o knihu Rougée (1997), která přináší nové zásadní myšlenky a přístupy k chápání konečných deformací. Ty pak mohou sehrát důležitou roli pro správnou formulaci konstitutivních rovnic i pro numerickou integraci odpovídajících diferenciálních rovnic. Ukazuje se, že úzce souvisí obsahem matematických publikací o *geometrii nekonečně dimenzionálních Riemannových prostorů*. Kombinací Rougeého přístupu a obecného matematického aparátu lze například odvodit novou objektivní časovou derivaci.

[1] RNDr. Zdeněk FIALA, CSc., ÚSTAV TEORETICKÉ A APLIKOVANÉ MECHANIKY AV ČR; Prosecká 809/76, 190 00 Praha 9; tel.:286882121, fax:286884634; E-mail: fiala@itam.cas.cz

2. Konečné vs. malé deformace

Mezi kinematikou velkých a malých deformací je zásadní rozdíl. Zatímco teorie malých deformací ztotožňuje počáteční a koncový stav, teorie velkých deformací mezi nimi důsledně rozlišuje. Důsledkem toho je nejenom samotné nahrazení materiálové časové derivace vhodnou objektivní, ale i zásadní změna samotných základů celé teorie.

Deformace tělesa se klasicky popíše pomocí hladkého zobrazení $u(X)$. Poloha po deformaci *x* se vyjádří jako poloha před deformací *X* změněná o vektor posunutí *u*, tak že platí $x = X + u(X)$. V případě malých deformací se zobrazení *u* považuje za infinitesimálně malé, což v důsledku vede k již zmíněnému ztotožnění počátečního a koncového stavu před a po deformaci. Zobrazení *u* je pak třeba spíše než zobrazení považovat za pole (viz. paragraf 4).

Přijmeme-li přirozený předpoklad, že transformace $\phi : X \to x$ je invertibilní a diferencovatelná, pak o takovéto transformaci mluvíme jako o *difeomorfismu*. Mezi strukturou třídy difeomorfismů a třídy polí existuje jeden zásadní rozdíl. Základní operace v třídě difeomorfismů je složení zobrazení $\varphi \circ \phi$, zatímco u polí je to operace součtu $u + v$. Ve třídě polí tak existuje přirozená lineární struktura, z níž vyplývá, že operace sčítaní polí je lokální. Pro třídu difeomorfismů takováto lineární struktura neexistuje: výchozí bod vnějšího difeomorfismu je koncový bod vnitřního, a operace složení zobrazení proto není lokální.

3. Předběžné informace – Mechanika kontinua a Riemannova varieta

Kinematika kontinua se klasicky popíše pomocí tenzorových polí nad Euklidovskými prostory ve 3D s využitím obecných křivočarých souřadnic. V moderní literatuře však již převažuje moderní přístup uvažující Euklidovské prostory jako Riemannovy variety. Pro naše účely plně postačí charakterizovat Riemannovy variety jako prostory bodů, které jsou lokálně Euklidovské, avšak bez privilegovaného souřadnicového systému, a na kterých je pak definována metrika pomocí skalárního součinu na tečných prostorech. Více viz. Frankel (1997) a Schutz (1999). S vyžitím geometrických pojmů, jako jsou pull-back, push-forward, Lieovy derivace atd., můžeme identifikovat geometrický význam všech veličin kinematiky konečných deformací.

Následující tři paragrafy čerpají z Fiala (2002) a poskytují krátký přehled užití Riemannovy geometrie v mechanice kontinua.

3.1. Základní pojmy

Konfigurací jednoduchého tělesa $B \subset R^3$ se označuje zobrazení $\Phi : I \times B \to R^3$ parametrizované časem z intervalu $I = [0, T]$. O všech zobrazeních budeme předpokládat, že jsou dostatečně hladká, a že spojitě závisí na čase *t*. Symbolem *X* budeme označovat body tvořící *R* a symbolem *x* body tvořící *S*. Obě konfigurace, ať v čase 0, nazývaná *referenční* konfigurace $R = \Phi(0, B)$, nebo v časovém okamžiku *t*, nazývaná *aktuální* $S = \Phi(t, B)$ konfigurace, tvoří Riemannovu varietu.

Tečný prostor $T_b B$ je linearizované, infinitezimální okolí bodu $b \in B$. Je to lineární, konečně-dimenzionální vektorový prostor všech „infinitezimálních **materiálových úseček**“ representovaných *vektory* tečnými v bodě *b* ke křivkám ležícím v tělese *B*.

Aby bylo možno definovat tenzory obecně, je potřeba zavést *kotečný prostor* $T_b^* B$. Je to opět lineární, konečně-dimenzionální vektorový prostor všech „infinitezimálních **materiálových ploch**“, představovanými *kovektory*, což jsou veličiny těsně svázané s gradienty funkcí v bodě *b*.

Kovektory působí zároveň jako lineární zobrazení z prostoru vektorů do reálných čísel $\langle a,u \rangle_{T_b B}$, a proto kotečný prostor tvoří *duální prostor* k tečnému prostoru. Kovektory mají navíc blízkou vazbu s *integrací* na varietách, zatímco (tečné) vektory s *derivacemi* funkcí. Na rozdíl od klasického přístupu, využití duálního prostoru umožňuje definovat tenzory na varietách přesněji a rozlišovat mezi vektory a kovektory, kontravariantními a kovarintními tenzory, a to proto, že je považuje za rozdílné objekty.

(*p*-*q*)-*tenzory* (*p*-kontravariantí, *q*-kovariantí) na lineárním vektorovém prostoru V, kde V^* je jeho duální prostor, jsou prvky množiny $\boldsymbol{T}_q^p$ (smíšené tenzory typu (*p*-*q*)),

$$\boldsymbol{T}_q^p = \boldsymbol{T}^p \otimes \boldsymbol{T}_q = V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^* \text{ a } \boldsymbol{T}_0^0 = R .$$

V teorii konečných deformací *V* reprezentuje tečný prostor a V^* jemu odpovídající kotečný prostor.

Klíčovým pojmem Riemannovy geometrie je *metrika*, tj. positivně definitní symetrický 2-kovariantní tenzor *G*, definující *skalární součin* dvou vektorů $u,v \in T_b B$:

$$u \cdot v \equiv G(u,v). \tag{1}$$

Metrika *G* pak pomocí vztahu $\langle \mathbf{G}u, v \rangle_{T_b B} = G(u,v)$ definuje zobrazení $\mathbf{G}: T_b B \to T_b^* B$. Tzv. *asociované tenzory* $t^\sharp$ a $t^\flat$ k (*1*-*1*)-tenzoru t jsou (*2*-*0*)- a (*0*-*2*)-tenzory, definované vztahy $t^\sharp = \mathbf{G}^{-1} t$ a $t^\flat = \mathbf{G} t$. Tyto operace odpovídají *zvyšování a snižování indexů* komponent tenzorů v klasickém přístupu. Jak původní tenzor, tak asociované tenzory jsou vnímány jako rozdílné objekty. Metrika na kotečném prostoru, tj. skalární součin dvou kovektorů, definovaná pomocí asociovaného 2-kontravariantního tenzoru $G^\sharp$

$$a \cdot b \equiv G^\sharp(a,b) = G\left(a^\sharp, b^\sharp\right), \tag{2}$$

je indukovaná skalárním součinem asociovaných vektorů.

3.2. Veličiny lokální geometrie: Tenzory deformace a přetvoření

Zobrazení $\Phi : I \times B \to R^3$ indukuje *tečné zobrazení* (nazývané též deformačním gradientem **F**) $T\Phi(\equiv \mathbf{F}) : T_X R \to T_x S$ mezi tečnými prostory nad referenční konfigurací $T_X R$ a aktuální konfigurací $T_x S$. $X = \Phi(0,b)$ a $x = \Phi(t,b)$ pro některý bod $b \in B$. Pomocí tečného zobrazení pak definujeme operace *push-forward* Φ_* a *pull-back* Φ^* mezi odpovídajícími prostory tenzorů, které jednoduchým způsobem svazují popis stavu deformace a napěťového stavu v referenční a aktuální konfiguraci: **Popis kinematiky kontinua z hlediska REFERENČNÍHO stavu se získá pomocí operace *pull-back* z aktuálního stavu, a naopak popis kinematiky kontinua z hlediska AKTUÁLNÍHO stavu se získá pomocí operace *push-forward* z referenčního stavu.**

Nechť G označuje metriku na $T_X R$, zatímco g představuje metriku na $T_x S$. *Tenzory přetvoření* **1. skupiny** jsou odvozeny z deformace “materiálových úseček” reprezentovaných vektory. Změnu kvadrátu délky libovolného referenčního vektorového pole u_X, která je výsledkem deformace aktuálního vektorového pole u_x lze jako obvykle reprezentovat mírou přetvoření Δ, danou výrazem:

$$\Delta = \frac{1}{2}[\ g(u_x, u_x) - G(u_X, u_X)\ ].$$

Tenzory přetvoření **2. skupiny** jsou odvozeny z deformace “materiálových ploch” reprezentovaných jejich normálovými kovektory. Změna kvadrátu délky libovolného referenčního kovektorového pole a_X, která je výsledkem deformace aktuálního kovektorového pole a_x lze opět reprezentovat mírou přetvoření δ, danou výrazem:

$$\delta = \frac{1}{2}\left[\ g^\sharp(a_x, a_x) - G^\sharp(a_X, a_X)\ \right].$$

TEČNÝ PROSTOR: 1. skupina

REFERENČNÍ konfigurace

Transformací **aktuální metriky *g* operací pull-back do referenční konfigurace** získáme

$\boxed{C^\flat = \Phi^* g}$, asociovaný PRAVÝ CAUCHYHO-GREENŮV *deformační* (*0-2*)-tenzor. (3)

Míra přetvoření Δ vzhledem k REFERENČNÍ konfiguraci má tvar $\Delta_R = E^\flat(u_X, u_X)$, kde $E = \frac{1}{2}(C - I)$ je GREENŮV-ST.VENANTŮV (*1-1*)-*tenzor přetvoření* (Lagrangeův popis).

AKTUÁLNÍ konfigurace

Transformací **referenční metriky *G* operací push-forward do aktuální konfigurace** získáme $\boxed{c^\flat = \Phi_* G}$. (4)

Míra přetvoření Δ vzhledem k AKTUÁLNÍ konfiguraci má tvar $\Delta_S = e^\flat(u_x, u_x)$, kde $e = \frac{1}{2}(i - c)$ je ALMANSIŮV-HAMELŮV (*1-1*)-*tenzor přetvoření* (Eulerův popis).

- Platí následující vztahy: $E^\flat = \Phi^* e^\flat$, $e^\flat = \Phi_* E^\flat$.

DUÁNÍAL PROSTOR: 2. skupina

REFERENČNÍ konfigurace

Transformací **aktuální metriky $g^\sharp$ operací pull-back do referenční konfigurace** získáme

$\boxed{B^\sharp = \Phi^* g^\sharp}$. (5)

Míra přetvoření δ vzhledem k REFERENČNÍ konfiguraci má tvar $\delta_R = H^\sharp(a_X, a_X)$, kde $H = \frac{1}{2}(B - I)$ je PIOLŮV (*1-1*)-*tenzor přetvoření* (Lagrangeův popis).

AKTUÁLNÍ konfigurace

Transformací **referenční metriky $G^\sharp$ operací push-forward do aktuální konfigurace** získáme $\boxed{b^\sharp = \Phi_* G^\sharp}$, asociovaný LEVÝ CAUCHYHO-GREENŮV *deformační* (*0-2*)-tenzor. (6)

Míra přetvoření δ vzhledem k AKTUÁLNÍ konfiguraci má tvar $\delta_S = h^\sharp(a_x, a_x)$, kde $h = \frac{1}{2}(i - b)$ je FINGERŮV (*1-1*)-*tenzor přetvoření* (Eulerův popis).

- Opět platí následující vztahy: $H^\sharp = \Phi^* h^\sharp$, $h^\sharp = \Phi_* H^\sharp$.

3.3. Duální tenzory napětí a přetvoření, duální časová derivace

V teorii velkých deformací existuje celá řada tenzorů napětí a přetvoření, které se na první pohled nezdají vzájemně propojené. To samozřejmě vyvolává otázku zda je tomu tak skutečně, a zda je nelze vhodným způsobem seskupit na základě určitých, materiálově nezávislých vlastností. Ve svých pracích poprvé Hill (1968, 1978) spojil právě jeden (*konjugovaný*) tenzor napětí vždy s jedním Lagrangeovým tenzorem přetvoření tak, že skalární součin tenzoru napětí s materiálovou derivací tenzoru přetvoření představuje *hustotu výkonu napětí*:

$$\pi_t \equiv \sigma_t \cdot d_t = \left\langle \sigma_t^\sharp, d_t^\flat \right\rangle_{TS^*} = \left\langle \sigma_t^\flat, d_t^\sharp \right\rangle_{TS}, \tag{7}$$

$$\text{kde} \quad \left.\begin{aligned} \sigma_t &= \text{Cauchyho tenzor nap.} \\ d_t &= \text{tezor rychlosti deformace} \end{aligned}\right\} \text{ jsou } (1\text{-}1)\text{-tenzory.}$$

Hillův výsledek lze získat použitím transformace pull-back. Výsledkem je *hustota výkonu napětí*, která z hlediska ***referenční*** *konfigurace* je vyjádřená vztahem:

$$\pi_t^{ref} = \left\{ \begin{aligned} &\left\langle P_t^\sharp, \partial E_t^\flat \right\rangle_{TR^*} \\ &\left\langle K_t^\flat, \partial H_t^\sharp \right\rangle_{TR} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} &P_t \cdot \partial E_t \\ &K_t \cdot \partial H_t \end{aligned} \right.$$

, kde ∂ představuje MATERIALNÍ časovou *derivaci*.

Při odvozování sehrály klíčovou roli následující dva vztahy:

$$\Phi^* d^\flat = (\partial E)^\flat = \partial E^\flat \qquad\qquad \Phi^* d^\sharp = -(\partial H)^\sharp = -\partial H^\sharp. \tag{8}$$

Asociovaný DRUHÝ PIOLŮV-KIRCHHOFFŮV tenzor *napětí*	$P^\sharp = \Phi^* S^\sharp$	(*2*-*0*)-tenzor
a asociovaný ZÁPORNÝ KONVEKTIVNÍ tenzor *napětí*	$K^\flat = -\Phi^* S^\flat$	(*0*-*2*)-tenzor

se získají pomocí operace pull-back z odpovídajících asociovaných tenzorů:

(kontravariantní) VÁŽENÝ CAUCHYHO tenzor *napětí*	$S^\sharp$	(*2*-*0*)-tenzor
a (kovariantní) ZÁPORNÝ VÁŽENÝ CAUCHYHO tenzor *napětí*	$-S^\flat$	(*0*-*2*)-tenzor,

které jsou zase odvozeny

z VÁŽENÉHO CAUCHYHO tenzoru *napětí* (též KIRCHHOFFŮV), tj. (*1*-*1*)-tenzoru: $S = J\sigma$, kde Jakobián J (skalární veličina) je pak determinant tečného zobrazení

$$J = \det(\partial\Phi/\partial X)\sqrt{\det(g)/\det(G)}\,.$$

Modifikaci a rozšíření na libovolnou *(duální) dvojici tenzorů napětí-deformace* provedl Haupt & Tsakmakis (1989). Výsledkem byl i koncept *duální časové derivace* svázané s každou dvojicí, což umožnilo vyjasnit úlohu *objektivních časových derivací* v teorii konečných deformací. Operací push-forward získáme z Hillova výsledku následující vztahy

$$\pi_t^{ref} = \left\{ \begin{aligned} &\left\langle S_t^\sharp, L_{\mathbf{F}} e_t^\flat \right\rangle_{TS^*} \qquad &\left(L_{\mathbf{F}} e^\flat\right)_{ij} &= \dot{e}_{ij}^\flat + (d-w)_{ik}\, g^{kl} e_{lj}^\flat + e_{ik}^\flat g^{kl} (d+w)_{lj} \\ -&\left\langle S_t^\flat, L_{\mathbf{F}} h_t^\sharp \right\rangle_{TS} \qquad &\left(L_{\mathbf{F}} h^\sharp\right)^{ij} &= (\dot{h}^\sharp)^{ij} - (d+w)^{ik} g_{kl} (h^\sharp)^{lj} - (h^\sharp)^{ik} g_{kl} (d-w)^{lj} \end{aligned} \right.$$

$L_{\mathbf{F}} = \Phi_* \circ \partial \circ \Phi^*$ je tzv. *Lieova derivace* (opět $\mathbf{F} \equiv T\Phi$), a w je vířivost. Tato duální časová derivace, získaná z materiálové derivace přesně stejným způsobem jako odpovídající duální tenzory napětí a deformace, je samozřejmě objektivní (**Oldroydova derivace**).

Konfigurace	**TENZORY PŘETVOŘENÍ**	**TENZORY NAPĚTÍ**	**ČASOVÁ DERIVACE**
1. skupina	**(kovariantní)**	**(kontravariantní)**	
referenční	GREEN-ST.VENANT	2^{ND} PIOLA-KIRCHHOFF	MATERIÁLOVÁ
aktuální	ALMANSI-HAMEL	KIRCHHOFF	OLDROYDOVA
2. skupina	**(kontravariantní)**	**(kovariantní)**	
referenční	PIOLA	ZÁPORNÝ KONVEKTIVNÍ	MATERIÁLOVÁ
aktuální	FINGER	ZÁPORNÝ KIRCHHOFF	OLDROYDOVA

Tab. Trojice vzájemně souvisejících tenzorů přetvoření a napětí, a časových derivací

4. Pokročilé informace – Teorie kontinua a Riemannova varieta Riemannových metrik

Úvodem shrnu hlavní výsledky předchozích odstavců, které budou dále klíčové.

- Konečné deformace kontinua v referenčním bodě X popisuje libovolný deformační tenzor C (3) nebo B (5).
- Jejich časové derivace ∂C, ∂B v průběhu deformačního procesu získáme z odpovídajících tenzorů rychlosti deformace $d^\flat$, $d^\sharp$ působením operace pull-back (viz. (8)):

$$\partial C^\flat = 2\partial E^\flat = 2\Phi_t^* d^\flat \qquad \partial B^\sharp = 2\partial H^\sharp = -2\Phi_t^* d^\sharp . \tag{9}$$

Na tomto místě bude vhodné zdůraznit, proč je pro popis deformačního procesu z pohledu konečných deformací *vhodnější uvažovat deformační tenzory, a ne tenzory přetvoření*. Odpověď je jednoduchá a obráží samotnou podstatu rozdílu mezi konečnými a malými deformacemi. Vyjádříme-li deformaci kontinua přes posunutí $x \equiv \Phi(X) = X + u(X)$, pak pro následnou posloupnost deformací $X \to x_1 \to x_2$ platí

$$x_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1(X) = \Phi_2(x_1) = \Phi_2(X + u_1(X)) = X + u_2(X + u_1(X)) + u_1(X).$$

V případě malých deformací se vztah zanedbáním všech členů druhého a vyšších řádů zjednoduší na tvar $x_2 \approx X + u_2(X) + u_1(X)$ a koncept difeomorfismů se tak změní na koncept polí. Vlastní difeomorfismus Φ se zredukuje na identické zobrazení $x \equiv \Phi(X) \approx X$, stejně tak i deformační gradient $T\Phi = I + Tu \approx I$. Vektory ani kovektory se během transformace nemění $v = T\Phi(V) \approx V$, $A = T\Phi^*(a) \approx a$, a tečné a kotečné prostory v referenční a aktuální konfiguraci můžeme ztotožnit. Odpovídající tenzory jsou rovněž identické, takže i metrické tenzory $g \approx G$ se sobě rovnají. Podobně i objektivní časová derivace se nahradí jednoduchou materiálovou časovou derivací: $L_{\mathbf{F}} = \Phi_* \circ \partial \circ \Phi^* \approx \partial$. Linearizace Φ kolem identického zobrazení $x \equiv \Phi(X) \approx X$ v bodě $x \equiv \Phi(X)$ pak nahradí difeomorfismy infinitezimálními poli $u(X)$, které v samotné teorii malých deformací vystupují dále prostřednictvím infinitezimálních změn metriky $g = G$. Tuto infinitezimální variaci pak vyjadřují tenzory přetvoření $e \approx E$ a $h \approx H$. Dále platí: $c \approx C$, $b \approx B$ a $\partial C = 2\partial E \approx 2d$, $\partial B = 2\partial H \approx -2d$.

Z pohledu velkých deformací se během deformačním procesu přestáváme pohybovat v samotném lineárním tečném prostoru $T_{C^\flat}\mathbf{M}$ (viz.níže), tak jako při malých deformacích, a pouhý rozdíl deformačního tenzoru v počátečním a koncovém stavu poskytuje o celém deformačním procesu průběhu asi tak stejnou informaci, jako o celkové trajektorii částice její Euklidovská vzdálenost mezi její počáteční a koncovou polohou: tedy žádnou. Jedině pro logaritmický tenzor přetvoření tomu tak není, jak uvidíme dále z textu, což jej činí v teorii velkých deformací obzvláště přitažlivým.

Důsledkem toho je, že deformační proces v každém materiálovém bodě X bude popsán ne časovým průběhem tenzoru přetvoření, ale časovým průběhem tenzoru deformace, tj. pomocí trajektorie v prostoru **M** - *všech možných tenzorů deformací vzhledem referenční konfiguraci*. Pro popis deformace poddajných těles je právě toto vhodné schéma, vzhledem k tomu, že jejich nejpřirozenějším referenčním systémem je jejich počáteční stav, narozdíl od tekutin, u kterých lze libovolnou aktuální konfiguraci považovat za referenční.

Zásadní postřeh, který umožnil významně rozšířit analýzu časového průběhu procesu konečných deformací pak vychází z následujích vztahů:

$$\partial C^\flat = 2\Phi_t^* d^\flat \qquad\qquad \partial B^\sharp = -2\Phi_t^* d^\sharp .$$

Rougée (1997) si totiž uvědomil, že veličiny $\partial C^\flat$ a $\partial B^\sharp$ vlastně představují tečné vektory k varietě **M** v konkrétním bodě $C_t^\flat$, nebo $B_t^\sharp$, zvoleném v daném časovém okamžiku t. Tím, že zavedl na *tečném prostoru* $T_{C^\flat}\mathbf{M}$ skalární součin, převedl prostor **M** na Riemannovu varietu. Dosáhl toho tím, že rozšířil skalární součinu vektorů v aktuální konfiguraci, definovaného metrikou g na $T_x S$, pro libovolné tenzory (viz. též (7)). Pro tenzor rychlosti deformace $d^\flat$ je výsledkem vztah:

$$d^{\flat 1}\cdot d^{\flat 2} \equiv g^{ik} g^{jl} d^1_{kj} d^2_{li} .$$

Přirozený požadavek, aby difeomorfismus Φ_t byl zároveň izomorfismus, tj. difeomorfismus zachovávající metriku, umožňuje definovat *metriku na tečném prostoru* $T_{C^\flat}\mathbf{M}$ vztahem

$$\partial C^{\flat 1}\cdot \partial C^{\flat 2} \equiv \Phi_t^*\left(d^{\flat 1}\cdot d^{\flat 2}\right),$$

kde $\partial C^{\flat\, i} \in T_{C^\flat}\mathbf{M}$, $C^\flat = \Phi_t^*(g)$, $B^\sharp = (C^\flat)^{-1}$ a $\partial C^{\flat\, i} = 2\Phi_t^*(d^{\flat\, i})$. Uplatněním operace pull-back, Rougée nakonec získal skalární součin na $T_{C^\flat}\mathbf{M}$ ve tvaru

$$\partial C^{\flat 1}\cdot \partial C^{\flat 2} = \tfrac{1}{4} B^{ik} B^{jl} \partial C^1_{kj} \partial C^2_{li} . \tag{10}$$

Nenechme se tu mást skutečností, že deformační tenzory $C^\flat$ tvoří body Riemannovy variety **M** a jejich materiálové časové derivace $\partial C^{\flat\, i} \in T_{C^\flat}\mathbf{M}$ vektory v odpovídajícím tečném prostoru $T_{C^\flat}\mathbf{M}$, příslušnému konkrétnímu bodu $C^\flat$ variety **M**. Jak uvidíme vzápětí, tato interpretace nabízí dalekosáhlé důsledky pro popis kinematiky konečných deformací.

Za prvé, je možné definovat derivaci tenzorových polí **M**, jako *kovariantní derivaci* vektorových polí. Nechť $V \in T_{C^\flat}\mathbf{M}$ a U je vektorové pole nad **M,** pak kovariantní derivace

$$\left(\nabla_V U\right)_{ij} = \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_{ij} - \frac{1}{2}\left(V_{il} B^{lk} U_{kj} + U_{il} B^{lk} V_{kj}\right), \text{ kde } \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_{ij} \equiv \frac{d}{dq} U_{ij}\left(C^\flat + qV\right)\Big|_{q=0} .$$

Nechť $C^\flat : I \to \mathbf{M}$ označuje hladkou křivku, pak derivace vektorového pole U podél křivky

$$\left(\frac{D}{Dt}U\right)_{ij} \equiv \left(\nabla_{\partial C^\flat} U\right)_{ij} = \partial U_{ij} - \frac{1}{2}\left(\partial C_{il} B^{lk} U_{kj} + U_{il} B^{lk} \partial C_{kj}\right), \text{ neboť } \frac{\delta U}{\delta(\partial C^\flat)} = \partial U .$$

Tato derivace, vzhledem k operaci push-forward, má v aktuální konfiguraci má tvar

$$\left(\frac{D}{Dt}u\right)_{ij} \equiv \Phi_{t*}\left(\nabla_{\partial C^\flat} U\right)_{ij} = \left(L_{\mathbf{F}} u\right)_{ij} - \left(d_{il} g^{lk} u_{kj} + u_{il} g^{lk} d_{kj}\right) = \left(u^{ZJ}\right)_{ij} , \tag{11}$$

kde $d^\flat = \frac{1}{2}\Phi_{t*}(\partial C^\flat)$, a $u = \Phi_{t*} U$ je libovolné aktuální 2-kovariantní symetrické tenzorové pole odpovídající U. Výsledná časová derivace je **Zarembova-Jaumanova objektivní**

derivace [Rougée (1997)]. Budeme-li interpretovat parametr t jako čas a křivku $C_t^\flat$ jako deformační proces, ke kterému v bodě kontinua X dochází, matematická struktura Riemannovy variety **M,** daná metrikou (10), pak jednoznačně vyděluje jedinou *objektivní časovou derivaci* (11) příslušnou deformačnímu procesu. Všimněme si, že platí $g^{ZJ} = 0$, což je ekvivalentní vztahu $DC/Dt = 0$.

Za druhé, geometrická struktura variety **M** umožňuje vyjasnit geometrický význam *logaritmických tenzorů přetvoření*, tím že je dává do spojitostí s geodetikami. Geodetiky jsou obecně křivky spojující dva body variety nejkratší možnou cestou. Jsou to také křivky s konstantní rychlostí, tj. s nulovým zrychlením. V případě variety **M** s metrikou definovanou vztahem (10), křivka $C^\flat : I \to \mathbf{M}$ je geodetikou, pokud splňuje vztah:

$$\left(\nabla_{\partial C^\flat} \partial C^\flat\right)_{ij} \equiv \partial^2 C_{ij} - \partial C_{il} B^{lk} \partial C_{kj} = C_{il} \partial\left(B^{lk} \partial C_{kj}\right) = 0 ,$$

a tedy rovnici $\partial\left(B^{lk}\partial C_{kj}\right) = -\partial\left(\partial B^{lk} C_{kj}\right) = 0$.

Během deformačního procesu je asociovaný tenzor D: $D_j^l = \frac{1}{2} B^{lk} \partial C_{kj}$ s referenčním tenzorem tenzoru rychlosti deformace $D^\flat = \Phi_t^{\ *}\left(d^\flat\right)$ konstantní. Nechť $D = \sum_i \Lambda_i p_i \otimes p^i$ je jeho spektrální rozklad, kde Λ_i jsou vlastní čísla a p_i vlastní vektory. Deformační proces $C_t^\flat$ podél geodetiky pak lze obecně vyjádřit vztahem

$$t \to C_t^\flat = \sum_i \exp\left(2\Lambda_i \left(t - t_0\right) + \lambda_i\right) p_i \otimes p^i .$$

Varieta **M** se tak dělí na podvariety $\mathbf{M_B}$, tvořené těmi deformačními tenzory, pro které jsou lineárně nezávislé směry $\mathbf{B} = \{p_i\}$ vzájemně ortogonální. Na každé takové podvaritě má pak deformační proces zmíněný tvar.

Protože pro libovolné dva stavy metrik $C_{t_1}^\flat$, $C_{t_2}^\flat$ vždy existuje podvarieta $\mathbf{M_B}$ obsahující je oba, lze je propojit geodetikou zmíněného tvaru [Rougée (1997)]:

$$C_t^\flat = \sum_i \exp\left\{2L_i \left(t - t_1\right) / \left(t_2 - t_1\right)\right\} \Delta_i \otimes \Delta^i . \tag{12}$$

Nyní L_i a Δ_i jsou definovány pomocí tenzoru $\hat{C}_j^i = \left(B_{t_1}\right)^{ik} \left(C_{t_2}\right)_{kj}$, svazující dva deformované stavy v čase t_2 a čase t_1. Nechť $\hat{C} = \sum_i l_i^2 \Delta_i \otimes \Delta^i$ je jeho spektrální rozklad, pak logaritmický tenzor přetvoření $\hat{L} = \frac{1}{2} \log \hat{C} = \sum_i L_i \Delta_i \otimes \Delta^i$, kde $L_i = \log l_i$. Narozdíl od jiných měr přetvoření, pouze logaritmický tenzor přetvoření je schopen smysluplně vázat dva vzdálené deformované stavy, protože je porovnává jako dva stavy umístěné na jedné geodetice, tj. pomocí dobře definovaného procesu, jednoznačně určeného svými krajními body (stavy metriky $C_{t_1}^\flat$ a $C_{t_2}^\flat$) a odpovídajícími tečnými vektory mířících do druhých bodů.

Za třetí, varietu **M** lze rozložit [Freed & Groisser (1989)] na objemovou a tvarovou podvarietu: $\mathbf{M} \cong \mathrm{Vol}(\mathbf{M}) \times \mathbf{M}_\mu$. Zatímco podprostor $\mathrm{Vol}(\mathbf{M})$ je *plochý*, podprostor $\mathbf{M}_\mu$ má *nenulovou křivost* (je záporná), a to má za následek závislost deformačního procesu na trajektorii $C_t^\flat$ v podprostoru **M**. Tady je zřejmě jádro problémů v současném používání logaritmického tenzoru přetvoření při modelování konstitutivních vztahů.

5. Diskuse

Pokud deformační proces přestaneme sledovat pouze v jednom materiálním bodě X, tak jak to dělá Rougée (1997), je nutné jeho přístup vhodně modifikovat. Riemannovu metriku budou nyní tvořit tenzorová pole C deformačních tenzorů nad referenční konfigurací R, a odpovídající varieta **M** takovýchto Riemannových metrik se stává *nekonečně dimensionální Riemannovou varietou* [Gill-Medrano & Michor (1991), Freed & Groisser (1989), Kriegel & Michor (1997)]. *Metriku* (10) je pak třeba modifikovat vztahem

$$\left\langle U^1, U^2 \right\rangle_{C^\flat} = \int_R U^1_{kj} \cdot U^2_{li}\Big|_{C^\flat, X} \mathrm{dVol}_X \left(B^\sharp\right) = \int_R \tfrac{1}{4} B^{ik} B^{jl} U^1_{kj} U^2_{li} \sqrt{\det(B^\sharp)}\Big|_X \mathrm{dV}\,. \tag{13}$$

Vzhledem k dodatečnému multiplikativnímu členu $\sqrt{\det(B^\sharp)}$, kovariantní derivace má tvar

$$\left(\nabla_V U\right)_{ij} = \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_{ij} - \frac{1}{2}\left(V_{il} B^{lk} U_{kj} + U_{il} B^{lk} V_{kj}\right) + \frac{1}{4}\left(B^{kl} V_{lk} U_{ij} - B^{kl} V_{lo} B^{op} U_{pk} C_{ij} + V_{ij} B^{kl} U_{lk}\right),$$

a pro *objektivní časovou derivaci* symetrického tenzorového pole u pak platí

$$\left(\frac{D}{Dt} u\right)_{ij} = \left(u^{ZJ}\right)_{ij} + \frac{1}{2}\left(g^{kl} d_{lk} u_{ij} - g^{kl} d_{lo} g^{op} u_{pk} g_{ij} + d_{ij} g^{kl} u_{lk}\right). \tag{14}$$

Přítomnost dodatečného členu $\sqrt{\det(B^\sharp)}$ se zdá být z hlediska vztahu (7) a jeho bezprostředních důsledků logická. Navíc platí $Dg/Dt = 3/2 \cdot d^\flat$, nebo-li $DC/Dt = 3/4 \cdot \partial C$. I tyto výsledky se jeví přirozenými v porovnání s výsledky Zarembovy-Jaumanovy derivace, poskytující pro tyto veličiny nulové hodnoty derivace.

6. Závěr

Výše načrtnutý přístup iniciovaný Rougéem (1997) přináší velké množství nových neotřelých nápadů do kinematiky velkých deformací, a zaslouží si proto hlubší studium. Matematická teorie nekonečně dimenzionálních Riemannových variet Riemannových metrik, tak jak je popsána v článcích citovaných v paragrafu 5, bude k tomu bezpochyby nezbytná. Na základě této teorie byla pro začátek jednoznačně navržena nová objektivní časová derivace (14) s jasným geometrickým významem. Platí pro ni vztahy $Dg/Dt = 3/2 \cdot d^\flat$ a $DC/Dt = 3/4 \cdot \partial C$, které, narozdíl od Zarembovy-Jaumanovy derivace, dávají nenulové výsledky. Vzhledem k tomu, že také platí $L_{\mathbf{F}} g = 2d^\flat$, zdá se, že nová objektivní časová derivace bude mít vhodné vlastnosti.

7. Literatura

Fiala, Z. (2002) Theory of finite deformations and differential geometry. *Euromech Colloquium 430: Formulations and constitutive laws for very large strains*, J. Plešek (ed.), Prague 2001, pp.37-51

Frankel, T. (1997) *The geometry of physics. An introduction.* Cambridge University Press

Freed, D.S. & Groisser D. (1989) The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and its quotient by the diffeomorphism group. *Mitchigan Math.J.* **36**, pp.323-344, http://projecteuclid.org/Dienst/Repository/1.0/Disseminate/euclid.mmj/1029004004/body/pdf

Gill-Medrano, O. & Michor, P.W. (1991) The Riemannian manifold of all Riemannian metrics. *Q. J. Math. Oxf.* **42**, pp. 183 - 202, www.mat.univie.ac.at/~michor/rie-met.ps

Giessen, E. & Kollmann, F.G. (1996) On the mathematical aspects of dual variables in continuum mechanics. Part 1: Mathematical principles. *ZAMM*, **76**(8), pp.447-462, Part 2: Applications in nonlinear solid mechanics. *ZAMM*, **76**(9), pp.497-504

Haupt, P. & Tsakmakis, Ch. (1989) On the application of dual variables in continuum mechanics. *Continuum Mech.Thermodyn.* **1**, pp.165-196

Hill, R. (1968) On constitutive inequalities for simple materials. *Int.J.Mech.Phys.Solids* **16**, pp.229-242

Hill, R. (1978) Aspects of invariance in solid mechanics. *Advances in Appl. Mech.* **18**, C.-S.Yih (ed.), Academic Press, pp.1-75

Chadwick, P. (1999) *Continuum Mechanics.* Dover Publications, New York

Kadianakis, N. (1999) On the geometry of Lagrangian and Eulerian descriptions in continuum mechanics. *ZAMM* **79**(2), pp.131-138

Kriegel, A. & Michor, P.W. (1997) *The convenient setting of global analysis.* Mathematical Surveys and Monographs **53**, The American Mathematical Society, USA, kap.IX, par.45, pp.487-497, http://www.ams.org/online_bks/surv53/

Marsden, J.E. & Hughes, T.J.R. (1983) *Mathematical foundations of elasticity.* Dover Publications, New York

Noll, W. (1958) A mathematical theory of the behavior of continuous media. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **2**, pp.197-226

Noll, W. (1973) Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **52**, pp.62-92

Rougée, P. (1997) *Mécanique des grandes transformations.* Mathématique & Applications **25**, Springer

Sansour, C. (1992) On the geometric structure of the stres and strain tensors, dual variables and objective rates in continuum mechanics. *Arch. Mech.* **44**, pp.527-556

Schutz, B. (1999) *Geometrical methods of mathematical physics.* Cambridge University Press

Stumpf, H. & Hoppe, U. (1997) The application of tensor algebra on manifolds to nonlinear continuum mechanics – Invited survey article. *ZAMM* **77**(5), pp.327-339

Svendsen, B. & Tsakmakis, Ch. (1994) A local differential geometric formulation of dual stress-strain pairs and time derivatives. *Arch.Mech.* **46**(1-2), pp.49-91

Svendsen, B. (1995) A local frame formulation of dual-strain pairs and time derivatives. *Acta Mechanica* **111**, pp.13-40

Poděkování: Příspěvek byl vypracován v rámci řešení grantu GA ČR 106/03/0582 a projektu AV ČR K1010104 “ Fyzika kondenzovaných systémů a materiálový výzkum“.