

## PARAMETRIC IDENTIFICATION OF UNBALANCE ROTATING MACHINES IN OPERATION

M. Musil\*, J. Skala\*

**Summary:** *The possibility of localising and quantifying a damage in a vibrating structure based on measured vibration amplitudes of the first harmonic in some locations of the structure and utilizing the mathematical model of an undamaged system is shown in the paper. The effect of the damage is modelled by unbalanced force and momentum in the damaged element. The excitation of the system is characterized by the simultaneous effect of dynamic harmonic loads. Simulated measured data were gained by the numerical solution of the linear analytical model based on finite elements method.*

### 1. Úvod

Pri prevádzke rotačných strojov vzniká často porušenie niektorého z komponentov konštrukcie. To má za následok zmenu prevádzkových pomerov, ktoré sa obvykle prejavia zníženou kvalitou, bezpečnosťou a spoľahlivosťou takéhoto stroja. Monitorovaním prevádzkových podmienok stroja a včasným odhalením poruchy v konštrukcii možno zabrániť havárii strojných konštrukcií počas prevádzky. Pri riešení danej problematiky možno využiť postupy vychádzajúce z metód identifikácie a detekcie porúch kmitajúcich mechanických sústav. Metodika na odhalenie vzniknutej nevyváženosti v konštrukcii počas prevádzky založená na zmene amplitúdy prvej harmonickej sa ukazuje byť dostatočne účinná. Už pri malých hodnotách nárastu nevyváženosti umožňuje lokalizovať a kvantifikovať zdroj danej nevyváhy, teda poruchu v konštrukcii. Uvádzaný postup identifikácie poruchy vychádza zo známych - zmeraných výchyliek v niektorých častiach porušenej konštrukcie počas prevádzky a zo známeho matematického modelu konštrukcie pred vznikom poruchy. V článku je rotačná sústava modelovaná využitím metódy konečných prvkov (MKP). Vplyv poruchy je modelovaný silovou a momentovou nevyváženosťou niektorého rotačného člena, ktorý je porušený. Experimentálne určenie potrebných výchyliek počas prevádzky je simulované numerickým výpočtom modelovo porušenej - nevyváženej sústavy.

### 2. Definícia modelu sústavy

Kmitanie rotorovej konštrukcie opisuje vektorová rovnica

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_D(t), \quad (1)$$

kde  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{v}}(t)$  a  $\mathbf{f}(t) \in C^q$  sú vektory zovšeobecnených výchyliek, rýchlostí a zrýchlení sústavy, respektíve zovšeobecnených síl závislé od času  $t$ . Vplyv fyzikálnych parametrov sústavy na kmitanie rotorovej konštrukcie reprezentujú

\* Doc. Ing. Miloš Musil, PhD. [musil@cvt.stuba.sk](mailto:musil@cvt.stuba.sk), Ing. Jozef Skala, [skala@sjf.stuba.sk](mailto:skala@sjf.stuba.sk)  
 Strojnícka fakulta STU, Námestie slobody 17,812 00 Bratislava, Slovenská republika

koeficientové matice  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{M}$ . Poruchu v konštrukcii v dôsledku nevyváhy charakterizuje vektor

$$\mathbf{f}_D(t) = \{F_{Dk} \omega^2 e^{i \vartheta_k}\} e^{i \omega t} = \omega^2 \mathbf{L} \begin{bmatrix} m_N e e^{i \vartheta_1} \\ D_{XY} e^{i \vartheta_2} \end{bmatrix} e^{i \omega t} = \omega^2 \mathbf{L} \mathbf{f}_D e^{i \omega t}, \quad (2)$$

kde hľadaný parameter nevyváhy  $F_{Dk}$ , môže byť reprezentovaný silovou nevyváženosťou ( $m_N e$ ), alebo momentovou nevyváženosťou ( $D_{XY}$ ) ( $m_N$  je hmotnosť,  $e$  je excentricita a  $D_{XY}$  je deviačný moment rotujúcej porušenej časti konštrukcie). Samotné budenie v dôsledku skúmanej nevyváhy je charakterizovaný známou uhlovou frekvenciou  $\omega$  rotácie hriadeľa a neznámymi fázami  $\vartheta_k$ , ktoré charakterizujú polohu rotujúcich vektorov odstredivej sily a dvojice síl voči hriadeľu. Matica  $\mathbf{L}$  charakterizuje polohu porušenia, pričom má jediné nenulové prvky jedničky práve v riadkoch  $m$ ,  $n$ , ktoré odpovedajú uzlovému bodu, kde pôsobí skúmaný silový a momentový budiaci účinok.

Súčasné statické a dynamické harmonické prevádzkové zaťaženie konštrukcie reprezentuje známy vektor budenia

$$\mathbf{f}(t) = e^{i(\omega t + \Phi)} \mathbf{f}, \quad (3)$$

kde vektor  $\mathbf{f}$  charakterizuje amplitúdy harmonického budenia s uhlovou frekvenciou  $\omega$  a s fázami v diagonálnej matici  $\Phi$ . Amplitúdy budenia vyšších harmonických uvažujeme pre zjednodušenie objasnenia metodiky rovné  $\mathbf{0}$ .

### 3. Ustálené periodické riešenie sústavy

Ustálené periodické riešenie lineárnej sústavy (1) s budením (2) a (3) reprezentuje vektor ustálenej ozvy

$$\mathbf{v}_U(t) = e^{i(\omega t + \Psi)} \mathbf{v}, \quad (4)$$

kde vektor  $\mathbf{v}$  charakterizuje amplitúdy výchyliek s uhlovou frekvenciou  $\omega$  a s fázami v diagonálnej matici  $\Psi$ . Porovnaním jednotlivých harmonických, zo vzťahov (1), (2), (3) a (4) postupne dostaneme

$$(\mathbf{K} + i \omega \mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M}) e^{i \Psi} \mathbf{v} + \omega^2 \mathbf{L} \mathbf{f}_D = e^{i \Phi} \mathbf{f}, \quad (5)$$

$$e^{i \Psi} \mathbf{v} - \mathbf{H}(i\omega) e^{i \Phi} \mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{H}_D(i\omega) \mathbf{f}_D, \quad (6)$$

kde matice

$$\mathbf{H}(i\omega) = \{\mathbf{h}_j(i\omega)\} = \mathbf{G}^{-1}(i\omega) = (\mathbf{K} + i \omega \mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{H}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{L} = \{\mathbf{h}_m(i\omega), \mathbf{h}_n(i\omega)\}, \quad (8)$$

charakterizujú maticu frekvenčných prenosov sústavy a jej vybrané stĺpce, ktoré sa uplatnia pri vzniku poruchy v konštrukcii.

#### 4. Lokalizácia a kvantifikácia porušenia

Vzťah (6) možno vyjadriť lineárnou závislosťou

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (9)$$

kde

$$A = \omega^2 \{H_{jm}(i\omega), H_{jn}(i\omega)\}, \mathbf{b} = \{v_j e^{i\psi_{jj}} - \sum_{l=1}^q H_{jl}(i\omega) f_l e^{i\phi_{ll}}\}, \mathbf{x}^T = \{m_N e^{i\theta_1}, D_{XY} e^{i\theta_2}\}.$$

Zo vzťahu (9) vyplýva postup, ako na základe známych vlastností neporušenej sústavy (na základe známych koeficientových matic  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{M}$  - známych prvkov matice frekvenčných prenosov  $H_{jk}(i\omega)$ ), známej ozvy ( $v_j e^{i\psi_{jj}}$ ) v niektorých miestach konštrukcie a známeho budenia ( $f_k e^{i\phi_{kk}}$ ) možno určiť polohu nelineárnej pružiny charakterizujúcej trhlinu v konštrukcii. Hodnoty vektora  $\mathbf{x}$  možno vyjadriť v tvare

$$\mathbf{x} = A^+ \mathbf{b}, \quad A \mathbf{x} - \mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (10)$$

kde vektor reziduí  $\boldsymbol{\varepsilon}$  reprezentuje nekonzistentnosť sústavy (9) v dôsledku chýb pri určovaní matice  $A$  a vektora  $\mathbf{b}$ .

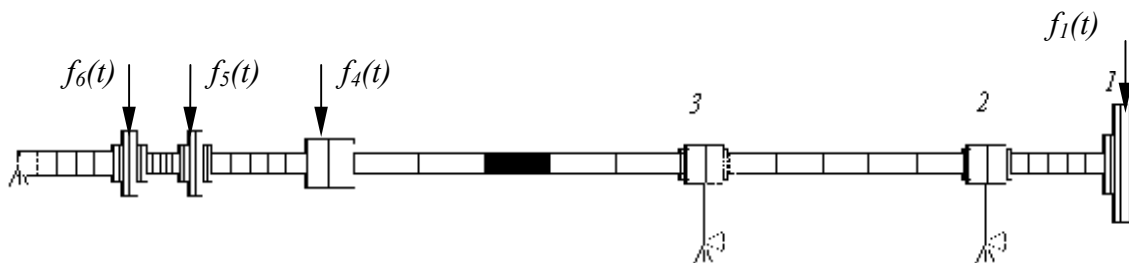
Keďže matica  $A$  je funkciou matice  $\mathbf{L}$ , ktorý reprezentuje miesto poškodenia v konštrukcii, aj vektor  $\mathbf{x}$  a následne aj vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  budú funkciou tejto matice  $\mathbf{L}$ . Z priebehu euklidovskej normy

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 = (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})^{0,5}, \quad (11)$$

pre rôzne zvolené matice  $\mathbf{L}$ , ktoré charakterizujú rôzne možné polohy poškodenia v konštrukcii, vyplýva, že hľadanou maticou  $\mathbf{L}$  bude tá (a teda aj hľadaným miestom, kde sa nachádza poškodenie v konštrukcii), pre ktorú bude hodnota normy vektora  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2$  minimálna. Pre tento prípad získane hodnoty vektora  $\mathbf{x}$  charakterizujú veľkosť porušenia a jeho prvky reprezentujú v dôsledku porušenia vzniknutú nevyváženosť.

##### Príklad 1.

Uvedenú metodiku možno dokumentovať pri určovaní poruchy a následnej nevyváženosti rotora, ktorá vznikla pri poškodení rotora. Uvedený rotor je schématicky znázornený na obr. č. 1.



obr. č. 1

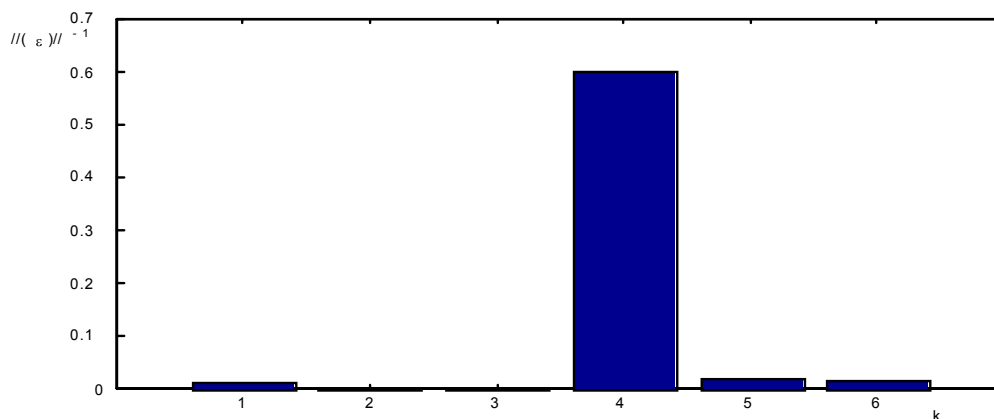
Pri manipulácii došlo k porušeniu, ktoré spôsobilo dodatočnú nevyváženosť rotora. Do úvahy prichádzajú možné miesta poruchy, ktorými sú kotúče č. 1, 4, 5, 6. Na základe meraní

výchyliet v miestach č. 1, 2, 3 pri prevádzke rotora potrebujeme určiť miesto a veľkosť daného poškodenia, pričom sú známe vlastnosti rotora (teda prvky matice frekvenčných prenosov a budenie rotora) pred poškodením.

Pre uvedenú situáciu (pre zprehľadnenie metodiky, budenie v sústave pred poruchou uvažujeme zanedbateľne malé oproti aktuálnej situácii) vzťah (9) nadobudne tvar

$$\omega^2 \begin{bmatrix} H_{1m}(i\omega_l) & H_{1n}(i\omega_l) \\ H_{2m}(i\omega_l) & H_{2n}(i\omega_l) \\ H_{3m}(i\omega_l) & H_{3n}(i\omega_l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_N e \\ D_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 e^{i\psi_1} \\ v_2 e^{i\psi_2} \\ v_3 e^{i\psi_3} \end{bmatrix},$$

Na základe vzťahu (10) boli vypočítané vektory rezidui pre všetky štyri predpokladané miesta porušenia. Z priebehu prevrátenej hodnoty normy vektora rezidui  $E = \| \boldsymbol{\varepsilon} \|^{-1}$  (obr. č. 2) jasne vyplýva, že porušenie nastalo v kotúči č. 4, ktorý budí sústavu v dôsledku svojej nevyváženosti (minimálna hodnota normy vektora rezidui  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sa prejaví ako maximálna hodnota jej prevrátenej hodnoty  $E$ ).



obr. č. 2

Pre tento prípad vypočítané hodnoty vektora  $\boldsymbol{x}$  korešpondujú so skutočnými simulovanými hodnotami nevyváženosti tohto kotúča a umožnia posúdiť veľkosť poškodenia sústavy v tomto mieste.

### 5. Lokalizácia a kvantifikácia porušenia pri meraní len amplitúd výchyliet

Pri určovaní miesta a veľkosti porušenia uvedenou metodikou bolo potrebné určiť na základe experimentov aj fázové pomery medzi jednotlivými ozvami sústavy. Aby sa zmenšili nároky na meranie, bola vypracovaná metodika [Musil M.: Identifikácia parametrov mechanických sústav], ktorou možno riešiť predošlú úlohu, pričom sú merané len amplitúdy oziev.

Vzťah (6) upravíme do tvaru

$$v_j = H_{jm}(i\omega) F_{D1} + H_{jn}(i\omega) F_{D2} e^{i\alpha}, \quad (12)$$

kde veličiny  $F_{D1}$  a  $F_{D2}$  charakterizujú veľkosť silovej a momentovej nevyváženosti a uhol  $\alpha$  charakterizuje vzájomnú polohu týchto rotujúcich vektorov. Upravou tejto rovnice dostaneme vzťah

$$v_j^2 = c_{j1} F_{D1}^2 + c_{j2} F_{D1} F_{D2} \cos(\alpha) + c_{j3} F_{D2}^2, \quad (13)$$

kde  $c_{j1} = /H_{jm}^2$ ,  $c_{j2} = \text{Real}[H_{jm}(i\omega) H_{jn}(-i\omega) + H_{jm}(-i\omega) H_{jn}(i\omega)]$ ,  $c_{j3} = /H_{jn}^2$ .  
Vzťah (13) reprezentuje systém lineárnych algebraických rovníc (6), kde

$$A = \{c_{jk}\}, k=1,2,3, \quad \mathbf{x} = \{F_{D1}^2, F_{D1} F_{D2} \cos(\alpha), F_{D2}^2\}^T, \quad \mathbf{b} = \{v_j^2\}.$$

Pre zmerané amplitúdy oziev ( $v_j$ ) v troch miestach konštrukcie a známe vlastnosti sústavy pred porušením ( $H_{jk}(i\omega)$ ) možno z rovnice (13) určiť hľadané parametre nevyváženosti ( $F_{D1}$ ,  $F_{D2}$ ,  $\alpha$ ). Ak je neznáme miesto poškodenia je potrebné ešte vopred previesť lokalizáciu porušenia sústavy. Lokalizáciu možno previesť postupom uvedeným v predošlej kapitole, pričom ako kontrolnú hodnotu pre porovnanie vektorov reziduií  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je potrebné merať amplitúdu ozvy ešte vo štvrtom mieste konštrukcie.

## 6. Záver

V článku je uvedený postup, pomocou ktorého sa na základe známych výchyliek niektorých častí rotorovej konštrukcie a známeho matematického modelu neporušenej sústavy dá určiť počas prevádzky poloha a rozsah poškodenia, ktoré sa prejaví nevyváženosťou v konštrukcii. V práci sú uvedené dva postupy na riešenie daného problému. Pri prvom z nich sa vyžaduje poznať z neúplného vektora ustálených výchyliek amplitúdy a fázy harmonickej ozvy. Pri druhom stačí poznať z neúplného vektora ustálených výchyliek len amplitúdy harmonickej ozvy. Pri lokalizácii poškodenia sa využíva jeho lokálny charakter a nesúlad medzi modelom neporušenej sústavy a ozvami častí konštrukcie porušenej sústavy. Z porovnania možných polôh trhlín v konštrukcii vyplýva skutočná poloha trhliny. Pri určovaní rozsahu trhliny sa využíva vplyv nárastu nevyváženosti na amplitúdy harmonickej ozvy. Táto závislosť je charakterizovaná systémom lineárnych v prvom prípade komplexných v druhom reálnych algebraických rovníc.

## 7. PodĎakovanie

Táto práca vznikla v spolupráci s projektom VEGA 1/9432/02.

## 8. Literatúra

- Starek L. - Musil M.: Detekcia a lokalizácia porúch využitím inverzného problému. In: Zborník z konf. "Technická diagnostika strojov a strojných zariadení", Zlín 1997, s.265-271.
- Musil M. - Starek L.: Determining location and extent of rotor damage. In: Zborník z konf. "Fifth International Conference on Rotor Dynamics", Darmstadt 1998, s.101-110.
- Musil M.: Identifikácia parametrov mechanických sústav, In: Habilitačná práca, Strojnícka fakulta STU Bratislava, 2000.
- Musil M.: Detection of vibrating structure due to higher harmonics. In: Zborník z konf. "Inženýrska mechanika 2000", Svratka 2000, s.265-271.
- Musil M.: Dynamické problémy odstred'ovacieho stroja. In: Kandidátska práca, Strojnícka fakulta STU Bratislava, 1993.