

STRAIN GAUGE MEASUREMENTS OF DEFORMATIONS ON RUBBER PATTERNS

F. Vaněk*, L. Pešek*, J. Cibulka*

Summary: *This contribution deals with proposal of the method for strain gauge measurements of rubber patterns under dynamic loading. As deform elements the silicon strain gauges were selected. Two calibration test rigs, such as cantilever beam and clamped membrane, were chosen for evaluation of deformation sensitivity of the strain gauges glued at rubber patterns. Material constants of rubber as linear visco-elastic model were evaluated from dynamic tests on the test rigs. Temperature dependences of rubber pattern eigenfrequencies are included.*

1. Úvod

Tento příspěvek je zaměřen na měření deformací pryže při dynamickém zatížení pomocí tenzometrické metody. Tento úkol je řešen v rámci grantového projektu GA ČR č. 101/02/0241 „Vibro-akustické problémy mechanických systémů s disipační vrstvou“, který je zaměřen na matematický popis elastomerních materiálů a experimentální vyhodnocení jejich materiálových konstant. Tyto materiály se často využívají v automobilové i kolejové dopravě jako pasivní tlumící prvky (Mead, 1999). V praxi jsou přitom vystaveny složitému dynamickému namáhání a někdy extrémním okolním podmínkám. Proto jsme se zabývali návrhem tenzometrické metody měření poměrných přetvoření pryžových vzorků, abychom mohli sledovat jejich dynamické zatížení v provozních podmínkách a s ohledem na tyto podmínky navrhnout experimenty na zjištění parametrů jejich reologických modelů pro dynamickou analýzu nejen pryže jako takové ale mechanického systému jako celku, jehož jsou součástí. Ukazuje se právě velká závislost dynamického chování elastomerů na typu napjatosti, v kterém pracují.

Při vývoji tenzometrické metody bylo využito zkušenosti s měřením mechanického namáhání kovových strojních součástí pomocí křemíkových tenzometrů (Vaněk, 1995; Vaněk, 1982). Jde o čidla velmi malých rozměrů (0.1 x 1x3 mm), která po přitmělení na povrch měřeného vzorku jen nepatrně mění jeho globální mechanické vlastnosti. Určitým nedostatkem tenzometrické metody měření pryžových vzorků je ve velkém rozdílu modulů pružnosti křemíku a pryže; také jejich rozdílná teplotní roztažnost omezuje rozsah měření deformace. To se projevuje ve složitějším způsobu vyhodnocení úrovně deformací v předem zvoleném teplotním intervalu. Deformační citlivost tenzometrů udávaná výrobcem nelze

^{*)} Ing. František Vaněk, CSc., Ing. Luděk Pešek, CSc., Ing. Jan Cibulka, Ústav termomechaniky, Akademie věd České republiky, Dolejškova 5, 182 00, Praha 8, Česká republika

použit pro výpočet deformace z tenzometrických měření na pryžových vzorcích. Pro každý typ pryže lze určit výslednou deformační citlivost nově vyvinutými kalibračními zařízeními s deformačními členy z pryže ve tvaru jednostranně vetknutého nosníku, resp. vetknuté kruhové membrány.

Jedním z cílů je také využít navrženou metodu měření pro vyhodnocení materiálových konstant reologického modelu elastomeru. V tomto příspěvku uvádíme postup pro případ elastomeru jako lineárního isotropního materiálu. Pro vyhodnocení dynamického komplexního modulu pružnosti z naměřených dynamických charakteristik je možné použít několika postupů diskutovaných na začátku příspěvku. Pro zvolené kalibrační deformační členy, nosník a membrána, byl modul pružnosti vyhodnocen z vlastní frekvence tlumeného kmitání a logaritmického dekrementu.

2. Experimentální vyhodnocení materiálových konstant lineárního modelu elastomerů

Elastomer jako lineární isotropní visko-elastický materiál lze popsat v tenzorovém zápisu konstitutivním vztahem

$$\sigma_{ij} = \frac{E^*}{1+\mu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (1)$$

kde σ_{ij} a ε_{ij} jsou tenzory napjatosti, resp. přetvoření, δ_{ij} je Kroneckerův symbol. E^* je komplexní modul pružnosti a μ je Poissonova konstanta. Modul pružnosti lze vyjádřit v komplexním tvaru jako

$$E^* = E' + jE'', \quad (2)$$

kde E' je klasický Youngův modul a E'' ztrátový modul. Z poměru těchto modulů lze vypočítat ztrátový faktor η a tzv. ztrátový úhel δ

$$\eta = \frac{E'}{E''} = \tan(\delta) \quad (3)$$

Tento úhel popisuje fázové zpoždění mezi napětím σ_{xx} a přetvořením ε_{xx} při časově harmonickém průběhu napětí σ_{xx} . Poissonova konstanta μ vystupuje jako parametr ve vztahu mezi modulem pružnosti a modulem smykovým G^* , jež je opět komplexní veličina

$$E^* = 2(1+\mu)G^*, \quad G^* = G' + jG'' \quad (4)$$

Pro popis konstitutivního vztahu elastomerů je tedy třeba určit tři nezávislé parametry: E' , E'' a μ nebo E' , E'' a G' . U elastomerních materiálů se zpravidla vychází z předpokladu nestlačitelných materiálů a tedy konstantě μ se přiřazuje hodnota 0.5. Pro matematické modelování dynamického chování elastomerů se vzhledem k velkému rozdílu, až několikanásobnému, mezi statickou a dynamickou tuhostí elastomerů určují parametry E' , E'' přímo z dynamických experimentů. Ty vedou na určení buď vlastních čísel kmitání s_ν ($\nu=1,2..$)

$$s_\nu = -b_\nu + j\Omega_{t\nu} = -b_\nu + j\sqrt{\Omega_\nu^2 - b_\nu^2} \quad (5)$$

kde Ω_{ν} je vlastní úhlová frekvence tlumeného systému, $\Omega_{\nu} = \sqrt{k/m}$ je vlastní úhlová frekvence netlumeného systému (k příslušná tuhost a m hmotnost systému), b_{ν} je konstanta útlumu ν -tého vlastního čísla a nebo vedou na určení funkcí frekvenčního přenosu

$$h_{j,m}(\omega) = \sum_{\nu=1}^{2N} (v_{j,k}(i\omega - s_{\nu})^{-1} w_{k,m}), \quad (6)$$

kde $v_{j,k}, w_{k,m}$ jsou prvky pravostranných, resp. levostranných vlastních vektorů, indexy j, k požijí místo j -té odezvy a k -tého buzení.

Při jednoduché napjatosti vzorku na tah-tlak se například získá dynamický modul pružnosti ze vztahu

$$E^*(\omega) = h_{1,1}(\omega)^{-1} l A^{-1}, \text{ resp. } E'(\omega) = m \Omega_1^2 A^{-1} l, \quad E''(\omega) = m b_1^2 A^{-1} l, \quad (7)$$

kde A je plocha průřezu a l výška vzorku. Index 1 představuje přenos v ose tah-tlak a označuje vlastní číslo pro tento typ kmitání. Analogicky lze vyhodnotit dynamický modul pružnosti i pro jiné typy napjatosti, pokud je známo jejich analytické řešení, jako např. kmitání nosníku, membrány atd. Zde pak je i možnost současného vyhodnocení i dynamického modulu ve smyku a tím nepřímo i Poissonovy konstanty.

Pro určení dynamických parametrů se používá se přitom několik typů zkoušek. Je to například volné dokmitávání vzorku elastomeru nebo vynucené kmitání v rezonanční a nerezonanční oblasti. Z volného dokmitávání se vyhodnocují vlastní frekvence tlumeného kmitání Ω_{ν} a logaritmický dekrement

$$g_{\nu} = \frac{2\pi b_{p\nu}}{\sqrt{1 - b_p^2}} \quad (8)$$

kde $b_{p\nu}$ je poměrný útlum definovaný vztahem $b_{p\nu} = b_{\nu} / \Omega_{\nu}$. Z vynuceného kmitání v rezonanční i nerezonanční oblasti se vyhodnocují funkce frekvenčních přenosů (6), z nichž se vyhodnocují materiálové konstanty (7). U rezonančních zkoušek se konstanta útlumu b_{ν} vyhodnocuje z tzv. 3dB šířky pásma rezonanční křivky Δf_{3dB}

$$b_{\nu} = \pi \Delta f_{3dB}, \quad (9)$$

nebo pro přesnější odhad identikačními metodami (např. Pešek, 1999). U elastomerů se také konstanta útlumu vyhodnocuje z plochy hysterezní smyčky síla F versus posuv x při harmonickém buzení $F e^{i\omega t}$ (Leitlinie des VDA, 1995). Tato plocha je rovna práci tlumících sil za jednu periodu (Juliš et al, 1987)

$$W = \pi b_{\nu} \omega x_A^2, \quad (10)$$

kde x_A je amplituda posuvu. Ze vztahu se jednoducho úpravou získá konstanta útlumu.

Protože chování elastomerů vykazuje slabé nelinearity, které v lineárním visko-elastickém modelu nejsou respektovány a bereme tento model jako nultou aproximaci, někdy označovanou jako ekvivalentní linearizace. Pro respektování slabých nelinearit lze použít jiné postupy identifikace v časové nebo frekvenční oblasti (např. Pešek, 2002; Pešek, 2003).

3. Výsledná deformační citlivost tenzometru

Smykovým napětím se přenáší deformace měřeného pryžového vzorku přes tmel na křemíkový tenzometr (obr.1). Smyková napětí největší na koncích tenzometru a výslednou silou deformují jen část tenzometru závislou především na poměru modulu pružnosti křemíku E_{Si} a pryže E .

Výsledná deformační citlivost tenzometru v našem případě se dá určit z rovnice uvedené v práci Vaněk (1982)

$$K = K_T \frac{1}{1 + \frac{4h_L(1+\mu)q}{x_1^2 l} \cdot \frac{E_{Si}}{E}}, \quad (11)$$

kde K_T – součinitel deformační citlivosti volného tenzometru udávaný výrobcem

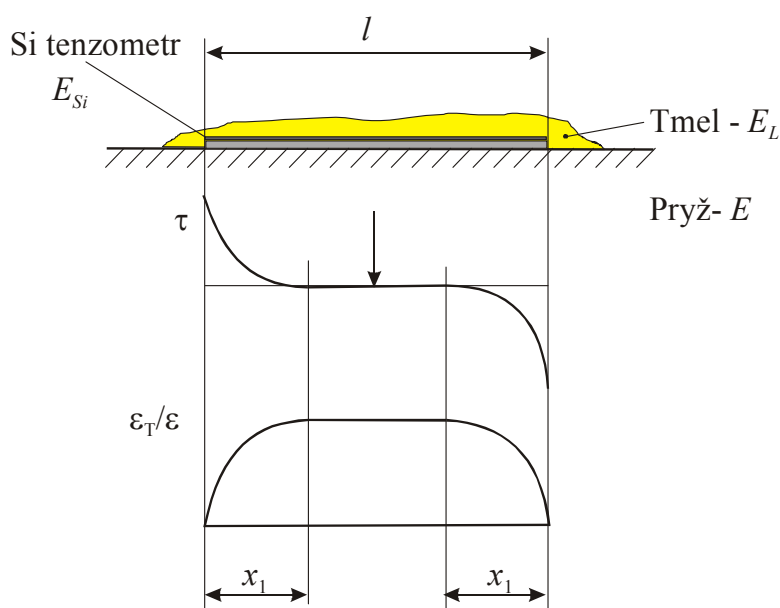
$$K_T \doteq 150,$$

h_L – tloušťka tmelu,

μ - Poissonův součinitel pryžového vzorku $\mu \doteq 0.5$,

x_1 - délka smykové plošky,

q - průřez tenzometru.



Obr. 1 Rozložení napětí τ a deformace po délce tenzometru ε_T pro $E_{Si} > E$ ($E_{Si} \doteq E_L$)

Z rov. (11) vyplývá pro ($E_{Si} > E$) velká závislost na rozměrech tenzometru tj. na co možná největší délce a nejmenším průřezu a tloušťce lepidla. Velikost délky smykové plochy bude záviset na druhu pryže, proto bude nutno pro stanovení deformační citlivosti použít kalibrační zařízení s jednostranně vetnutým nosíkem a nebo s vetknutou kruhovou membránou z měřené pryže.

Po nalepení křemíkového tenzometru na pryžový vzorek je tenzometr předepnut následkem jejich rozdílné teplotní roztažnosti. Tenzometr je deformován touto dilatací podle rovnice z práce Vaněk (1982)

$$\varepsilon_T = \left(\frac{\alpha}{K} + \lambda_R \right) \cdot \Delta \vartheta, \quad (12)$$

kde α - teplotní součinitel odporu křemíkového tenzometru ($\alpha_{Si} \doteq 3 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$)

$\lambda_R = \lambda_p - \lambda_{Si}$ je rozdíl teplotní roztažnosti pryže a křemíkového tenzometru.

$\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_0$ je rozdíl měřené teploty ϑ a vytvrzovací teploty ϑ_0 při lepení tenzometru

Při návrhu tenzometrických měření na pryži je nutné dodržet podmínku $\varepsilon_T < \varepsilon_{\max}$ tj. volit teplotní interval měření tak, aby nedošlo k překročení maximální deformace tenzometru.

Z teplotní změny odporu tenzometru je možno určit délkovou roztažnost pryžového vzorku podle rovnice

$$\lambda_p = \left(\frac{\Delta R}{R \cdot \Delta \vartheta} - \alpha \right) \frac{1}{K} + \lambda_{Si}, \quad (13)$$

kde ΔR je měřena změna odporu tenzometru při změně teploty pryže o $\Delta \vartheta$.

4. Jednostranně vetknutý nosník z pryže

K určení vibroakustických parametrů vzorku pryže bylo použito v prvním případě jednostranně vetknutého pryžového nosníku s principiálním schématem zobrazeným na obr. 2. Jednostranně vetknutý pryžový nosník o šířce a , výšce v a délce l je na volném konci stupňovitě zatěžován závažím G a tím se ohybově deformuje. V místě vetknutí jsou na pryžovém nosníku přitmeleny křemíkové odporové tenzometry typ AP150-6-100 fy VTS Zlín (součinitel deformační citlivosti $K_T \doteq 150$), a to v podélném, příčném a v neutrální ose nosníku. Deformace nosníku v místě tenzometrů vyvolá změnu jejich odporů a příklad naměřených hodnot je uveden v Tab. 1. Z naměřených výchylek nosníku optickým polohovým detektorem PSD při daném zatížení se určuje modul pružnosti v tahu a ze změn odporů tenzometrů se pak vypočte výsledný součinitel deformační citlivosti K .

Pro stanovení dynamických parametrů vzorku pryže byl nosník (obr. 2) uchycen na stolečku výkonového elektrodynamického vibrátoru Brüel&Kjaer a kinematicky rezonančně buzen. Kmitající nosník deformuje křemíkové tenzometry a mění jejich odpory, což při napájení ze zdroje konstantního proudu dá elektrické napětí úměrné deformaci. Výchylky kmitání vibrátoru byly snímány opět opticky s PSD detektorem. Z naměřené rezonanční frekvence nosníku lze určit pro první tvar kmitání nosníku dynamický modul pružnosti E' podle rovnice z práce Daněk (1971)

$$E'_{DYN} = 38,3 \frac{\rho \cdot l^4}{b^2} \cdot f_1^2, \quad (14)$$

kde ρ - hustota pryže

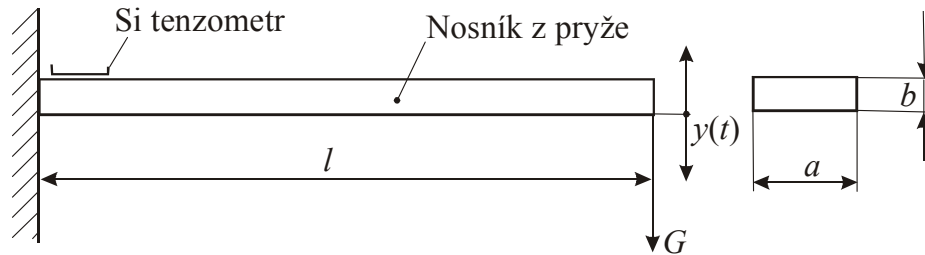
l - délka nosníku

b - tloušťka nosníku

f_1 - naměřená hodnota prvního tvaru kmitání.

Např. pro pryžový nosník o rozměrech $a=40$ mm; $b=16$ mm a $l=200$ mm; $\rho=1,477 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $f_1=13,2$ Hz je

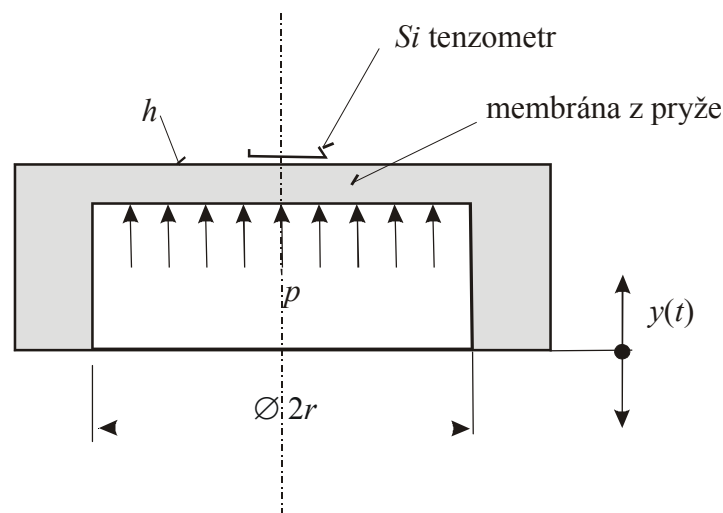
$$E'_{DYN} = 60,6 \text{ MPa}; E'_{STAT} = 32 \text{ MPa}; K = 2,1; \lambda_p = 2,4 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$$



Obr. 2 - Jednostranně vetknutý kalibrační nosník z pryže

5. Vetknutá kruhová membrána z pryže

Druhým možným způsobem stanovení parametrů vzorku pryže bylo ve využití definovaných vlastností (rozměrů) vetknuté kruhové membrány (obr. 3). Na membráně zhotovené vybráním z pryžového kotouče byly přitmeleny křemíkové odporové tenzometry typ AP150-6-100, a to uprostřed na obou stranách a v místě vetknutí. Statické parametry vzorků byly vyhodnocovány při rovnoměrném tlakovém zatížení membrány tlakovým vzduchem. Dynamické parametry vzorků při kinematickém rezonančním buzení na stolečku elektrodynamického vibrátoru. V obou případech deformace membrány vyvolá odpovídající změna odporu tenzometrů a při proudovém napájení změnu elektrického napětí. Měřením výchylky středu membrán optickou metodou a tlaku tlakového vzduchu se získají hodnoty pro výpočet statického modulu pružnosti vzorku. Ze změn odporů tenzometrů se zatížením se vypočte výsledný součinitel deformační citlivosti. Dynamický modul pružnosti se vypočte z frekvence prvního tvaru kmitu naměřené při rezonančním kmitání membrány podle rovnice v Merhaut (1971).



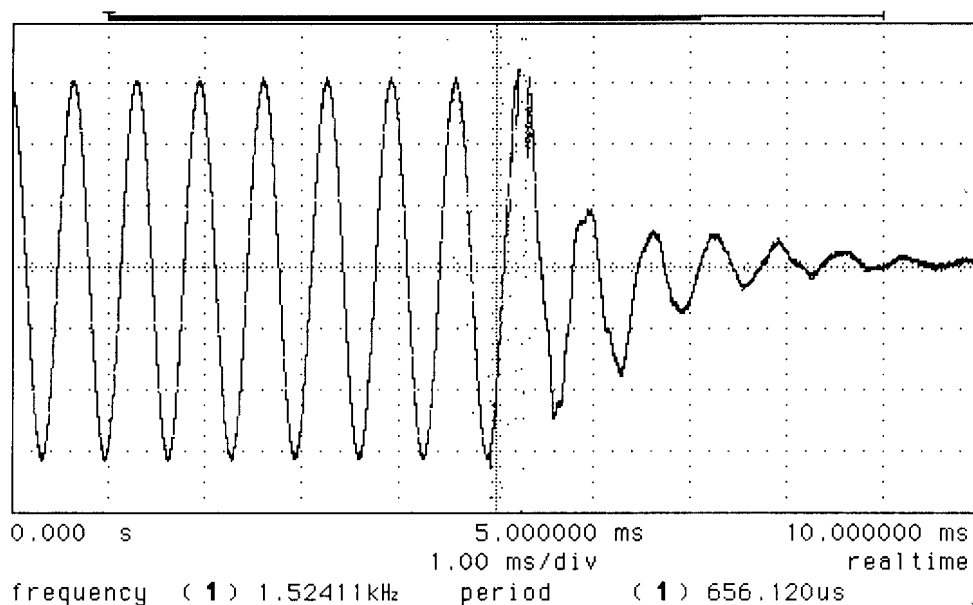
Obr. 3 Kruhová kalibrační membrána z pryže

$$E'_{DYN} = 3,41 \frac{r^4 \cdot f_1^2}{h^2} \cdot \rho, \quad (15)$$

kde r – poloměr membrány
 h – tloušťka membrány
 ρ - hustota vzorku pryže

f_{r1} - frekvence prvního tvaru rezonančního kmitání membrány.

Poměrný útlum b_p vzorku pryže byl vyhodnocen z dokmitávání membrány po přechodu z rezonančního kmitání pomocí zařízení s číslicovým osciloskopem (Hendrych, 2002). Příklad záznamu měření časového průběhu dokmitávání pryžové membrány je uveden na obrázku obr. 4.



Obr. 4 Tenzometrické měření časového průběhu dokmitávání pryžové membrány

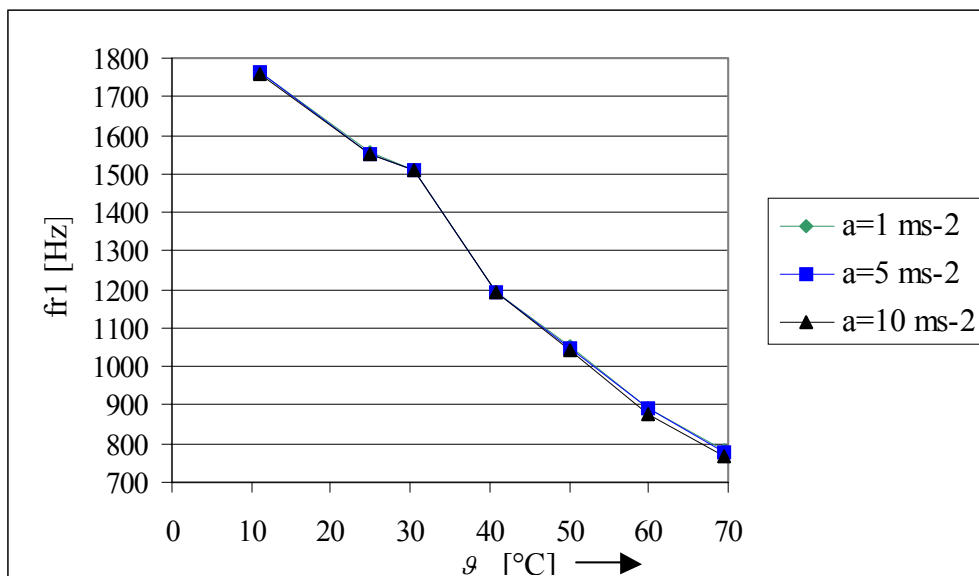
Např. pro pryžovou membránu o rozměrech $r=25$ mm, $h=5$ mm, a při $\vartheta=25^\circ\text{C}$ je $\rho=1,428 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ a $f_{r1}=1474$ Hz; $E'_{DYN}=165$ MPa; $E'_{STAT}=35$ MPa; $K \approx 22$; $\lambda_P=2,2 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$, a poměrný útlum $b_{pv} \approx 0.1$.

Na obrázku obr. 5 jsou vykresleny teplotní závislosti rezonanční frekvence f_{r1} kruhové pryžové membrány pro tři úrovně kinematického buzení se zrychlením stolečku vibrátoru $a=1; 5; 10 \text{ m.s}^{-2}$

Tyto teplotní závislosti jsou v číselné podobě uvedeny v Tab. 1.

Tab.1

a [m.s^{-2}]	1	5	10
ϑ [$^\circ\text{C}$]	f_{R1} [Hz]	f_{R2} [Hz]	f_{R3} [Hz]
11	1765	1762	1761
25	1555	1553	1550
30,4	1512	1510	1509
40,7	1195	1193	1193
50,1	1051	1047	1040
60,0	892,5	890,7	876,8
69,6	782,2	778,2	769,2



Obr. 5 Tenzometrické měření teplotní závislosti rezonanční frekvence f_{r1} kruhové pryžové membrány

6. Závěr

V příspěvku byla navržena tenzometrická metoda pro měření přetvoření pryžových vzorků při statickém a dynamickém zatížení. Pro tyto účely byla vyvinuta kalibrační zařízení s jednostranně vetknutým pryžovým nosníkem a vetknutou kruhovou pryžovou membránou s nalepenými miniaturními křemíkovými tenzometry. Ze statického měření napjatosti byl stanoven výsledný součinitel deformační citlivosti tenzometru a délkový součinitel roztažnosti pryže. Z dynamického měření napjatosti byly určeny dynamické parametry pryžových vzorků, z nichž se vyhodnocovaly materiálové konstanty lineárního modelu pryže. Na základě provedených měření lze konstatovat, že při dodržení technologického postupu instalace tenzometru na pryžový vzorek a se zavedením korekcí na citlivost a teplotní roztažnost tenzometrů, je možné dosáhnout dostatečné přesnosti (max. cca 3%).

7. Poděkování

Příspěvek byl vypracován v rámci řešení grantového projektu GA ČR č.101/02/0241

8. Literatura

- DANĚK, O. (1971) Výpočet vlastních a vynucených kmitů štíhlých přímých prismatických nosníků a složitějších kmitavých systémů z nich vytvořených. Zpráva ÚT AV ČR č. Z319/71.
- Elastomer-Bauteile in Kraftfahrzeugen (1995), VDA 675 480, Leitlinie des Verband der Automobilindustrie.
- HENDRYCH, P., PEŠEK, L., VANĚK, F. (2002) Dynamická analýza turbinové lopatky M4. Sborník konference „Dynamics of Machines 2002“, str. 35-38.
- JULIŠ, K., BREPTA, R. (1987) Mechanika (II.díl Dynamika), Technický průvodce, SNTL.
- MEAD, J. D. (1999) Passive Vibration Control. *John Wiley & Sons*.
- MERHAUT, J. Teoretické základy elektrotechniky. Kniha ACADEMIA ČSAV Praha 1971.

- PEŠEK, L. (1999) Globální MIMO identifikační metoda v časové a frekvenční oblasti. Sborník národní konference Inženýrská mechanika '99, str.183-188, Svratka, květen 1999;
- PEŠEK L., VESELÝ J. (2002) Parametric identification of non-linear models of an internal dissipation layer in mechanical systems. In: Proceedings of ISMA 2002. (Ed.: Sas, P. - Van Hal B.), Leuven, KU, 2002, pp. 471-479;
- PEŠEK, L., PŮST, L. (2003) Thermo-mechanical interaction in nonlinear vibrating systems, In. Proceedings of Dynamics of Machines 2003, IT AS CR, Prague, pp.147-154;
- VANĚK F., CIBULKA J. (1995) Snímač pro měření mechanického namáhání lopatek za rotace. Sborník „Kolokvium Dynamika strojů'95 „Ústav termomechaniky AV ČR, str. 207-210.
- VANĚK, F. (1982) Charakteristiky a aplikace křemíkových nosníků. Zpráva ÚT AV ČR č. T273/82.