

STOCHASTIC CHARACTERIZATION OF SEISMOGRAMS

C. Fischer*

Summary: *Seismic random processes are characterized by high non-stationarity and, in most cases, by a marked variability of frequency contents. The widely used hypothesis modeling seismic signal as a simple product of stationary signal and a deterministic modulation function, consequently, is hardly ever applicable. Such assumption leads to the incorrect estimation of the frequency content, which can have a significant influence to the assessment of effects of such seismic event to structures. As a solution, the multicomponent decomposition of the non-stationary seismic record is presented. The wavelet multiresolution analysis is used as a tool. An example of the seismic response of a simplified structure is given.*

1. Úvod

S rozvojem výpočetní techniky stoupá popularita simulačních výpočtů při hledání účinků náhodného buzení na konstrukce. Paradoxně tak nevzniká tolik tlak na účinnost výpočetních metod, jako spíše na správný popis vstupních dat.

Myšlenka reprezentace seismického buzení ve tvaru náhodného procesu je poměrně stará a od svého uvedení v práci Housner 1947 prodělala veliký vývoj. Ne vždy však byla nabízená matematická idealizace v souladu s fyzikální podstatou popisovaného jevu. Každé zemetřesení je jedinečná událost a pro řádné statistické zpracování proto chybí odpovídající množina realizací. Je proto zapotřebí určit sadu parametrů, které jednotlivé seismické události popíší ve stochastickém smyslu s dostatečnou přesností. Použitím těchto parametrů pak bude možno počítat statistické vlastnosti odezvy konstrukce na takové buzení, bude možno vytvářet sady umělých seizmogramů či užívat jiných numerických postupů.

Uvažuje-li se seizmogram jako nestacionární náhodný proces ve tvaru, jak je běžně využíván, tedy

$$v(t) = m(t)v_s(t) \quad (1)$$

předpokládá se zpravidla, že $m(t)$ je vhodná deterministická obálka či modulace a $v_s(t)$ je gaussovský stacionární náhodný proces. Již dříve však již bylo ukázáno (Náprstek & Fischer 1998), že jak gaussovskost, tak stacionarita procesu $v_s(t)$ jakožto výsledku rozkladu (1) bývá problematická.

Nesplnění matematických předpokadů kladených na zkoumané procesy může mít fatální důsledky na kvalitu výsledků, k nimž dospíváme. Matematický model pak totiž popisuje jiný jev, než pro který byl původně zamýšlen.

*RNDr. Cyril Fischer, Ph.D., Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9, tel. 2 86 88 21 21, e-mail FischerC@itam.cas.cz

Jde především o předpoklad stacionarity. Použití Fourierovy transformace je vázáno na stacionární procesy. Pojem spektrální hustoty je výslovně definován pouze pro stacionární procesy. Její odhad je poměrně choulostivá procedura i v případě, kdy jsou všechny teoretické předpoklady zajištěny. Je-li však stacionarita zkoumaného vzorku pochybná, není vůbec jisté, že numerická procedura dá rozumný výsledek.

Například při odhadu spektrální hustoty Welchovou metodou (která je běžně používána, viz např. MATLABTM 2000, kdy je spektrální hustota nahrazena průměrem modifikovaných periodogramů, vypočtených z různých úseků zkoumaného signálu, je běžné, že dominantní části spekter z jistého úseku signálu jsou ve výsledku překryty podprůměrnou hodnotou z jiné části signálu.

Během posledních velkých zemětřesení (např. Northridge 1994, Chi-Chi 1999) se ukázal podstatný vliv i do té doby opomíjených vysokofrekvenčních složek zrychlení. Je proto vhodné popisovat podstatně širší spektrum, než bylo považováno za nutné v minulosti.

Z napsaného je zřejmé, kterým směrem je vhodné se ubírat dále. Jednak je potřeba zobecnění popisu (1) tak, aby byl schopen postihnout i variabilitu ve frekvenční oblasti. Rovněž bude nutno zpochybnit či doplnit i tzv. Kanai-Tajimi spektrum (Tajima 1960, Kanai 1957) či Bolotonovo AR(2) spektrum (Bolotin 1961) tak, aby mohlo obsáhnout širší spektrální oblast.

2. Rozklad seismické události

2.1. Jednoduchý rozklad

Kmitání soustavy působené seizmickou událostí je typickým příkladem náhodného kinematického buzení působeného pohybem podpor. Bez ohledu na charakter soustavy se funkce $v(t)$, popisující pohyb podloží, modelují jako známý spojitý nestacionární gaussovský náhodný proces. Takový proces se často popisuje ve tvaru jednoduchého rozkladu (1). Nicméně, takový rozklad stěží zajistí více než zhruba konstantní střední hodnotu amplitud, což je možno nepřesně nazvat jako *stacionarita v čase*, narozdíl od *stacionarity ve frekvenci*.

Určení modulační funkce spočívá obecně v aproximaci či zhlazení průběhu absolutní hodnoty amplitud procesu vhodnou funkcí. Ideální modulační funkce by měla být schopna postihnout strmý počátek a pozvolné odeznění zemětřesení, jakož i případ několika silných úseků či záznejí. Kritériem volby může být přesnost aproximace či jednoduchost vyjádření funkce.

Jednoduchosti vyjádření je vhodné dát přednost při použití k výpočtům. Rovněž pro generování syntetických seizmogramů zpravidla postačí jednoduché vyjádření. Naopak na přesnosti aproximace je nutno lpět při analýze záznamu. Pro výpočet hodnověrného odhadu spektrální hustoty je podmínkou nutnou (nikoli však postačující) získání co nejvyrovnanějšího procesu $v_s(t)$.

Mezi nejpoužívanější modulační funkce patří např. *dvojitá exponenciála*,

$$m(t) = a h(t)(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (2)$$

kde $h(t)$ značí Heavisideovu funkci. Jinou podobnou modulační funkcí je funkce navržená v práci Saragoni & Hart 1974, která představuje kvadrát průměrného zrychlení působeného superpozicí velkého počtu nestacionárních vlnových pulsů.

$$m(t) = a h(t)t^b e^{-\alpha t} \quad (3)$$

Obě zmíněné funkce splňují první podmínku ideální modulace dostatečně, druhou podmínku již ne. Proto byla zavedena modulace tvořená splajnem.

B-splajn je po částech polynomiální funkce. Díky své dobré lokalizaci v čase je schopna dobře postihnout lokální chování procesu.

$$m(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B^N(t - t_i) \quad (4)$$

kde $0 = t_0 < \dots < t_k = T$ je vhodné dělení intervalu a B^N je B-spline řádu N . Stupeň polynomů N je možno volit libovolně, ale řád $N = 2$ je zcela postačující.

2.2. Vícesložkový rozklad

Základní myšlenkou zde je rozložení zkoumaného signálu na součet procesů s (úzkým) omezeným spektrem. V takovém případě bude možno frekvenční variabilitu jednotlivých složek považovat za zanedbatelnou. V dalším kroku pak na každou složku uplatníme rozklad (1) se splajnovou modulací (4). Výsledkem pak bude aproximace evolučního spektra zkoumaného procesu (Priestley 1965). Počet takových úzkopásmových komponent teoreticky není omezen, ale z praktických důvodů je vhodné udržovat jejich počet co nejnižší.

Nakonec píšeme:

$$v(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) = \sum_{i=1}^n m_i(t) v_{0i}(t) \quad (5)$$

Vhodným prostředkem k rozkladu (5) může být například waveletová *multiresolution analysis* (viz Malat 1989). Tato technika neklade žádné apriorní předpoklady na stacionaritu či periodicitu zkoumaného procesu.

Vzájemnou korelaci jednotlivých složek rozkladu (5) je v obecném případě nutno brát v úvahu, což značně zesložituje případné výpočty. V případě výpočtu složek pomocí zmíněné waveletové MRA jsou však vzájemné korelace zanedbatelné. Je to proto, že jednotlivé složky rozkladu v_{0i} mají disjunktní spektra.

2.3. Určení spektrální hustoty

Obvykle je stacionární část buzení, ať $v_0(t)$ či $v_{0i}(t)$, uvažována ve tvaru autoregresního modelu či smíšeného modelu ARMA. Takové modely mají řadu žádoucích vlastností, kterých není vhodné se vzdávat: Mají spektrální hustotu ve tvaru ryze lomené racionální funkce, jsou reprezentovatelné jako lineární diferenciální filtr a – v neposlední řadě – dlouhou tradici v seizmickém inženýrství. Všeobecně uznávané Kanai-Tajimi spektrum (Tajima 1960, Kanai 1957)

$$G(\omega) = \frac{G_0 \left(1 + 4b^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{G_0 c^2 (c^2 + 4b^2 \omega^2)}{(c^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 c^2} \quad (6)$$

je vlastně spektrální hustota spojitého ARMA(2, 1). Jiným často užívaným modelem je tvar spektrální hustoty navržený v práci Bolotin 1961

$$\psi(\omega) = \frac{\sigma_0^2}{\pi} \frac{a^2 b}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{I_0}{(\omega^2 - \alpha_0)^2 + \omega^2 \alpha_1^2} \quad (7)$$

Tento tvar spojitého AR(2) modelu umožňuje konstrukci diferenciálního filtru, jehož výstupem je proces $v_{0i}(t)$ o spektrální hustotě (7) generovaný z bílého šumu na vstupu.

Oba zmíněné tvary spektrálních hustot jsou výhodné pro použití v analyticko-numerických metodách pro řešení nestacionární náhodné odezvy. Navíc, spektrální hustoty jednotlivých členů

$v_{0i}(t)$ rozkladu provedeného waveletovou MRA mohou být nahrazeny spektrální hustotou (7) nebo (6) poměrně dobře.

Rozdíl mezi AR(2) a ARMA(2, 1) se nejeví nijak zásadní. Ačkoli komplikovanější tvar ARMA(2, 1) zpravidla nahradí vypočtenou spektrální hustotu lépe než AR(2) model, rozdíl mezi oběma aproximacemi je zpravidla menší než nejistota odhadu spektrální hustoty.

Stochastická Newmarkova metoda, zavedená v práci To 1992, užívá jako buzení libovolně modulovaný diskretní ARMA(p, q) náhodný proces. Existuje vzájemná transformace koeficientů diskretních a spojitých ARMA modelů. V pracích Phadke & Wu 1974, Pandit & Wu 1975 se ukazuje, že diskretizací spojitého ARMA(p, q) modelu vznikne diskretní ARMA($p, p - 1$) model. Jinými slovy, je-li spojitý ARMA(p, q) proces $X(t)$ pozorován v diskretních okamžicích s krokem Δt , výsledný diskretní proces bude právě ARMA($p, p - 1$). Na druhou stranu, pro daný diskretní ARMA($p, p - 1$) a dost malý časový krok Δt existuje jediný jemu odpovídající spojitý AR(p) proces.

Je proto možné kombinovat metody pro spojitě a diskretní ARMA buzení.

3. Seismická odezva jednoduché konstrukce

Pro příklad postupu rozkladu seismického signálu a následného výpočtu seismické odezvy uvažujeme nyní jednoduchou konstrukci, viz obr. 1. Jde o jednoduchý mostek, modelovaný jako symetrický nosník s pěti koncentrovanými hmotami na dvou pružných podporách v koncových bodech. Vlastní frekvence konstrukce jsou 6.4, 24.9, 37.3, 41.0, 63.4 s^{-1} .

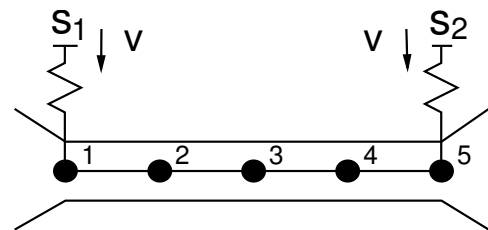


Fig. 1. Lumped mass modeled bridge

Jako vzorek seismického buzení byl vybrán záznam zemětřesení Sierra Madre ze stanice Altadena, Eaton Canyon Park ze 28. června 1991, složka východ-západ. Záznam byl pořízen v epicentrální vzdálenosti 49km, je 40s dlouhý a maximální zrychlení je 1.756 m/s^2 . Záznam byl zbaven vlivu měřicího přístroje a dvakrát integrován. K výpočtu odezvy zobecněnou korelační metodou (Náprstek & Fischer 1995, Fischer 2002) a zobecněnou stochastickou Newmarkovou metodou (To 1992, Fischer 2002) pak bude použit záznam posunut.

Tento záznam nejprve poslouží jako příklad waveletové multiresolution analysis. Obr. 2 ukáže 4 úzkopásmové komponenty, seřazené vzestupně podle převládající frekvence, a vysokofrekvenční zbytek (spodní křivka). Součet všech 4 složek a zbytku dá dohromady původní signál.

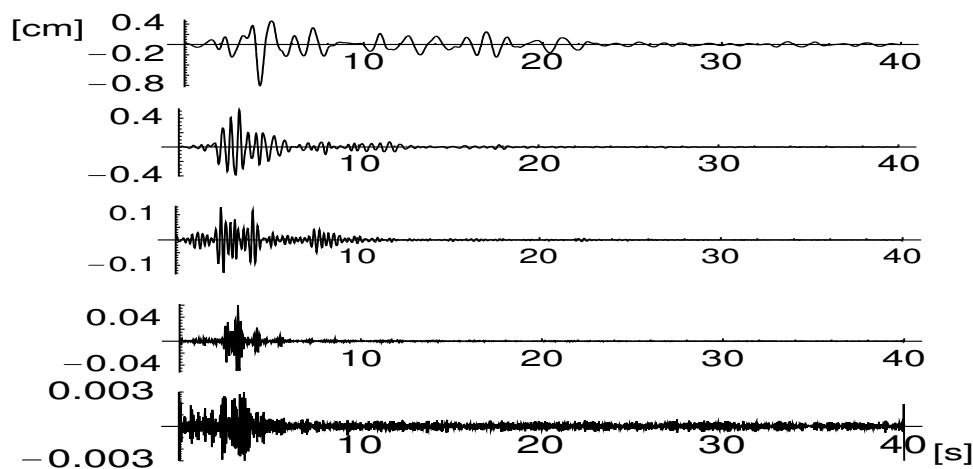


Fig. 2. Wavelet decomposition of the Sierra Madre earthquake, June 28, 1991.

Statistický popis jednotlivých složek rozkladu pak bude zřejmý z obrázku 3. Zde v prvním sloupci vidíme nestacionární úzkopásmovou složku, ve druhém sloupci pak odpovídající modulace (každá tvořená kvadratickými B-splajny). Třetí sloupec ukazuje stacionarizované části jednotlivých složek. Jejich spektrální hustoty, spolu s AR(2) a ARMA(2, 1) aproximací, jsou zobrazeny ve čtvrtém sloupci. Plná čára odpovídá numerickému odhadu spektrální hustoty, čárkovaná čára sleduje aproximaci spojitým AR(2) modelem a tečkovaná čára ukazuje příslušný spojitý ARMA(2, 1) model.

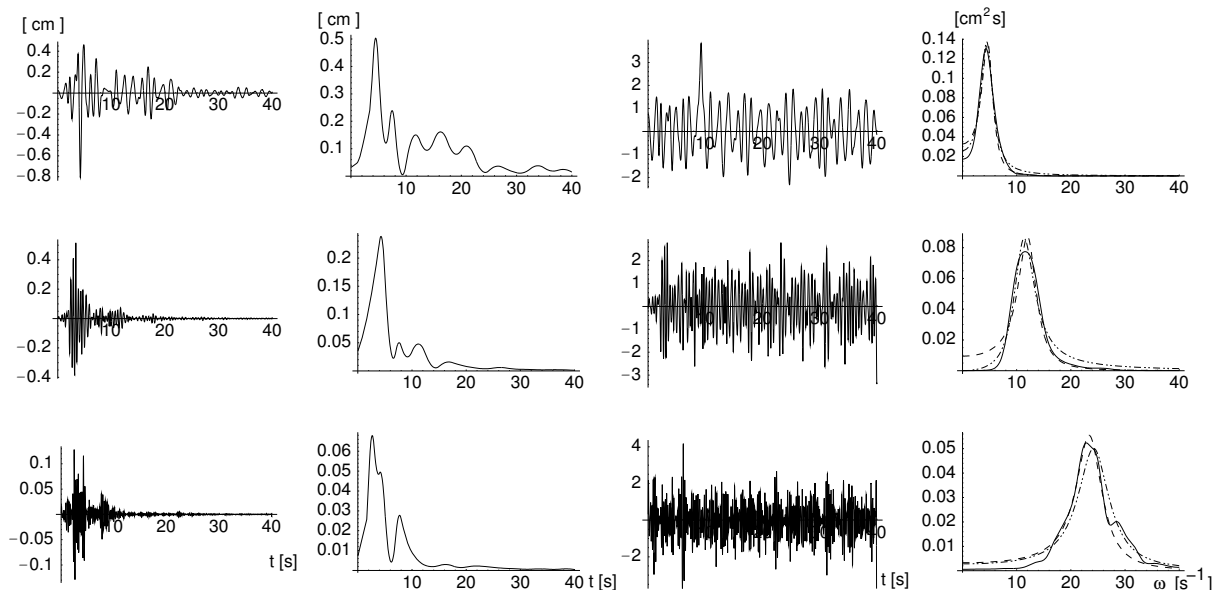


Fig. 3. Three low-frequency components of the wavelet decomposition of the earthquake record given on Fig. 2.

Náhodná odezva mostku na obrázku 1 podrobeného seizmickému buzení v obou podporách S_1 a S_2 byla vypočtena pomocí zobecněné korelační metody a zobecněné Newmarkovy metody, a to jak pro buzení popsané klasickým rozkladem (1), tak pro složitější rozklad (5). Nejdůležitější prvky kovarianční matice jsou variance posunů jednotlivých uzlů 1–5 konstrukce podle obrázku 1. Díky symetrii soustavy i buzení budou výsledky pro uzly 1 a 5 stejně jako pro 2 a 4 identické. Obrázek 4a ukazuje výsledky analýzy se vstupními daty popsanými jednoduchým rozkladem (1), obr. 4b ukazuje výsledek zobecněné korelační metody využívající vícesložkový rozklad.

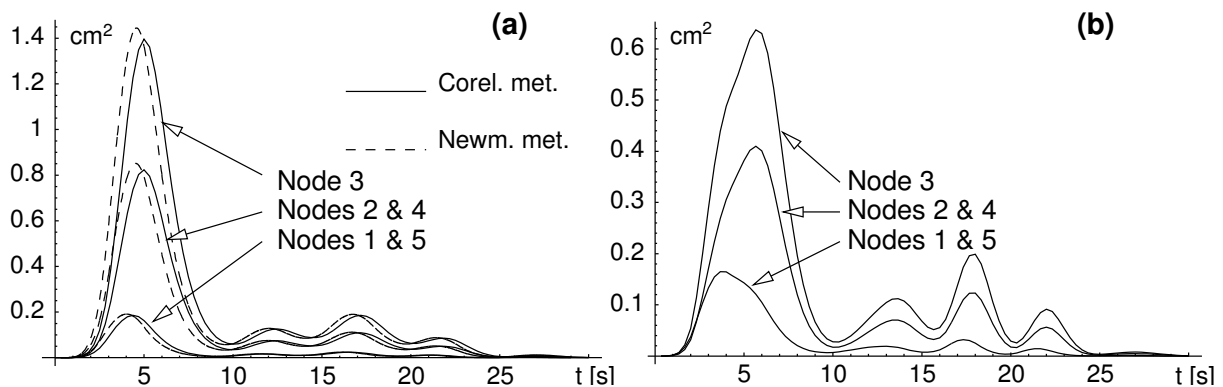


Fig. 4. Displacement variance of the structure computed using (a) simple decomposition (b) multicomponent decomposition of the Sierra Madre record

Na první pohled může být překvapující, že maximální hodnota rozptylu odezvy (b) je méně než poloviční oproti hodnotě rozptylu v případě (a). Navíc se v průběhu výpočtu (b) ukázalo, že začlenění vyšších detailů rozkladu nepřineslo výrazný kvantitativní příspěvek k celkovému rozptylu. Vysvětlení těchto faktů přinese detailní pohled na obr. 5 s průběhem aproximovaných spektrálních hustot prvních tří detailů vícesložkového rozkladu spolu s aproximovanou spektrální hustotou procesu $v_s(t)$ odvozeného použitím jednoduchého rozkladu (1) (čárkovaně). Hodnota spektrální hustoty první složky vícekomponentního rozkladu pro $\omega = 6.4\text{s}^{-1}$ (tedy první vlastní frekvenci mostku) je zhruba poloviční ($0.043\text{cm}^2\text{s}$) oproti hodnotě spektrální hustoty vypočtené z jednoduchého rozkladu ($0.076\text{cm}^2\text{s}$). Hodnota druhé vlastní frekvence sice padne do oblasti vrcholu spektrální hustoty třetího detailu, ale malá hodnota třetí modulační funkce tento příspěvek potlačí.

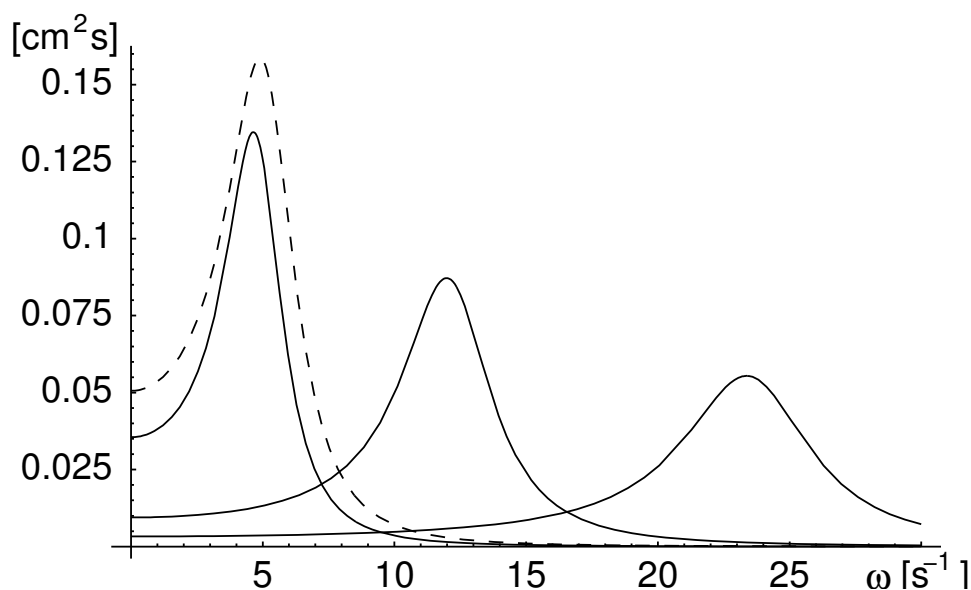


Fig. 5. AR(2) approximation of the spectral density of the earthquake record stationarized using (1) (dashed line) and AR(2) approximation of the spectral densities of the three low frequency components of the wavelet-based multicomponent decomposition (5).

4. Závěr

Ukazuje se, že hlavním zdrojem problémů již není samotný výpočet, jako spíše správné určení statistických charakteristik budicího procesu. "Stacionární" procesy, získané jednoduchým rozkladem (1), zpravidla skutečnou stacionaritu postrádají, což zabraňuje správnému odhadu spektrální hustoty.

Tento problém je možno odstranit pomocí vícesložkového rozkladu. Navíc, vícesložkový rozklad nám umožňuje popsat podstatně širší spektrum použitím sady jednoduchých AR(2) procesů.

Je vhodné poznamenat, že je nutné použít dostatečně flexibilní modulační funkci (jako například B-splajny) pro odvození stacionární části nestacionárního signálu. Pro zjišťování odezvy konstrukcí či generování syntetických seizmogramů již zpravidla postačí modulace jednodušší, ať už tvaru dvojité exponenciály či splajnu s hrubším dělením.

5. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantů GA ČR 103/03/P080, 103/02/0020.

6. Literature

- Bolotin, V.V. (1961) *Statistical methods in the engineering mechanics* Gosstroizdat, Moskva
- Fischer, C. (2002) *Numerické metody stochastické mechaniky*, Diplomová práce, ÚTAM AV ČR a MFF UK, Praha
- Housner, G. W. (1947) *Characteristics of strong-motion earthquakes*. Bull. Seismological Soc. of Am., 37(1), pp. 19-31.
- Kanai, K. (1957) *Semi-empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground Motion*. Bulletin of the Earthquake Research institute, Univ. of Tokyo, Japan, Vol. 35, June 1957, pp. 309-325
- Malat, S. (1989) Multiresolution approximation and wavelets, Trans. Amer. Math. Soc., 315, pp. 69–88
- MATLABTM (2000) *Signal Processing Toolbox User's Guide*, MathWorks, Inc.
- Náprstek J. & Fischer C. (1998) *Determination of stochastic characteristics of seismic nonstationary random excitation processes*. In: *Seismic Design Practise into the Next Century*, Balkema, pp. 237–244
- Náprstek, J. & Fischer O. (1995) *Correlation analysis of non-stationary vibrations of a large system excited by seismic process*. Proc. 7th Int. Conf. Soil Dynamics and Earthquake Engineering '95, (C.A.Brebbia, A.S.Cakmak eds). Wessex Inst. of Techn., Chania (Greece), Comp.Mech.Publ., Southampton-Boston, pp.607-614.
- Pandit, S.M. & Wu, S. M. (1975) *Unique estimates of the parameters of a continuous stationary stochastic process*. Biometrika, 62, 2, pp. 497-501
- Phadke, M.S. & Wu, S.M. (1974) *Modelling of Continuous Stochastic Processes from Discrete Observations with Application to Sunspot Data*. Journ. of the Am. Statist. Assoc., No. 346, Vol. 69, June 1974, pp. 325-329
- Priestley, M. B. (1965) *Evolutionary spectra and non stationary processes*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 27, pp. 204-237
- Saragoni R. & Hart G. (1974) *Simulation of artificial earthquakes*. Earthquake Eng. and Struct. Dyn. Vol. 2, pp. 249-267
- Tajima, H. (1960) *A Statistical Method of Determining The Maximum Response of a Building Structure During Earthquake*. Proc. of the Second World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo and Kyoto, Japan, Vol. II
- To, C. W. S. (1992) *A stochastic version of the Newmark family of algorithms for discretized dynamic systems*. Computers and Structures 44, pp. 667–673