

DYNAMICS OF A SPHERICAL VIBRATION ABSORBER

J. Náprstek*, M. Pirner*

Summary: *Wind excited vibrations of slender structures such as towers, masts or certain types of bridges can be reduced using passive or active vibration absorbers. If there is available only a limited vertical space to install such a device, a spherical type of absorber can be recommended. In general, it is a semi-spherical horizontal dish in which a sphere of a smaller diameter is rolling. Ratio of both diameters, mass of the rolling sphere, quality of contact surfaces and other parameters should correspond with characteristics of the structure. The spherical absorber is modelled as a holonomous system. Using Lagrange equations of the second type, governing nonlinear differential system is derived. The function and effectiveness of the absorber identical with those installed at the existing TV towers was examined in the laboratory of the Institute of Theoretical and Applied Mechanics. The response spectrum demonstrates a strongly non-linear character of the absorber. The response amplitudes at the top of a TV tower with spherical absorber were reduced to 15 ÷ 40% of their original values.*

1. Úvod

Pro tlumení vibrací inženýrských konstrukcí se velmi často používají pasivní tlumiče. Obvykle se s nimi setkáváme v případech jako jsou TV věže, stožáry a jiné štíhlé konstrukce, které jsou vystaveny silnému působení dynamické složky větru. Konvenční pasivní tlumiče bývají kyvadlového typu. I když jsou velmi efektivní a spolehlivé, mají některé nedostatky, které omezují jejich využitelnost. Především mají jisté nároky na prostor ve vertikálním směru. Tento požadavek se nedá vždy uspokojit, zejména pak tehdy, když se mají osadit dodatečně. Tím jsou tyto klasické tlumiče obtížně použitelné u lehkých mostů, např. lávky pro pěší a na mnoha stožárech, kde prostorové možnosti ve vrcholu jsou velmi omezené. Další nevýhodou tlumičů kyvadlového typu je nezbytnost pravidelné údržby.

Oba tyto nedostatky se dají vyloučit použitím tlumiče kulového typu. Jeho základní princip spočívá v tom, že v kovové míse o poloměru R opatřené gumovou povrchovou vrstvou se pohybuje valivým pohybem kovová koule o poloměru $r < R$. Geometrické poměry jsou upraveny tak, aby pohyb koule probíhal převážně "v protifázi" podobně jako u kyvadla, čímž se dosahuje tlumícího účinku. Tato soustava je uzavřena ve vzduchotěsné kazetě. Takovéto zařízení prakticky nepotřebuje žádnou údržbu. Jeho svislý rozměr je relativně velmi malý a dá se tedy použít i v případech, kdy následkem nedostatku místa nebo obtížné údržby je kyvadlový tlumič nepoužitelný.

*Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Prof. Ing. Miroš Pirner, DrSc.
 Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
 naprstek@itam.cas.cz, pirner@itam.cas.cz

Na druhé straně, dynamika kulového tlumiče je mnohem složitější ve srovnání s tlumičem kyvadlovým. Jeho pohyb nemůže být popsán v lineárním stavu, i když na první pohled se zdá jeho chování velmi blízké kyvadlovému tlumiči. Ukazuje se zde řada problémů spjatých se stabilitou pohybu, bifurkacemi, autoparametrickými rezonancemi a dále problémů vyplývajících z imperfekcí povrchu mísy i koule, viz předchozí práce autorů Náprstek & Pirner (2002). Tento příspěvek se pokouší nastínit řešení některých z těchto problémů pomocí jednoduchého nelineárního rovinného matematického modelu včetně prověření jeho numerických vlastností. Výsledky jsou porovnány s výsledky laboratorních zkoušek a dlouhodobých měření na skutečné konstrukci.

2. Matematický model

Mísa je upevněna ke konstrukci. Dynamické vlastnosti konstrukce jsou popsány lineární soustavou s jedním stupněm volnosti o hmotnosti M . Uvnitř mísy na jejím vnitřním povrchu se pohybuje ve svislé rovině koule m . Předmětem další analýzy tedy bude nelineární soustava se dvěma stupni volnosti, jak je naznačeno na obr. 1. Z geometrických vztahů vyplývá:

$$R \cdot \varphi = r(\psi + \varphi) \Rightarrow r\psi = \varrho\varphi \quad \text{kde} \quad \varrho = R - r \quad (1)$$

Pro vodorovnou, resp. svislou složku přemístění a rychlosti těžiště vnitřní koule platí:

$$\left. \begin{array}{l} \text{horiz.:} \quad u + \varrho \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{u} + \varrho \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \text{vert.:} \quad \varrho \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad -\varrho \dot{\varphi} \sin \varphi \end{array} \right\} \quad (2)$$

Kinetickou energii soustavy obou koulí m , M je možné vyjádřit ve tvaru:

$$T = \frac{1}{2}m[(\dot{u} + \varrho \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi] + \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{u}^2 = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + m\varrho\dot{u}\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m}{2\kappa}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{u}^2 \quad (3)$$

$$m/\kappa = m + \frac{J}{r^2} \Rightarrow \kappa = 5/7.$$

zatímco potenciální energie vyplývá ze vzorce:

$$V = mg\varrho(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2}Cu^2 \quad (4)$$

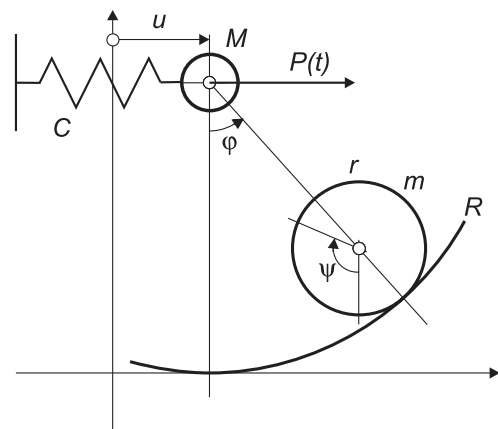
Tlumení se zavede ve tvaru jednoduché Rayleighovy funkce:

$$B = \frac{1}{2}(M \cdot b_u \dot{u}^2 + m \cdot b_\varphi \dot{\varphi}^2) \quad (5)$$

m – hmota koule;

J – moment setrvačnosti koule m ;

b_u, b_φ – koeficienty tlumení;



Obrázek 1: Základní schema soustavy

Výrazy (3), (4), (5) dosadíme do Lagrangeových rovnic druhého typu, viz např. Hamel (1978)

a řada dalších pramenů:

$$\sum_{r=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_r} \right\} \delta q_r = P_r(t) \quad (6)$$

$$q_1 = u = \zeta \cdot \varrho ; q_2 = \varphi ; P_u(t) = p(t) \cdot M \varrho, P_\varphi(t) = 0$$

odkud dostaneme základní rovnice pohybu systému:

$$\ddot{\varphi} + \kappa b_\varphi \cdot \dot{\varphi} + \kappa \omega_m^2 \sin \varphi + \kappa \ddot{\zeta} \cdot \cos \varphi = 0 \quad (a)$$

$$\mu \ddot{\varphi} \cos \varphi - \mu \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + (1 + \mu) \ddot{\zeta} + b_u \dot{\zeta} + \omega_M^2 \zeta = p(t) \quad (b) \quad (7)$$

$$\mu = m/M ; \quad \omega_M^2 = C/M ; \quad \omega_m^2 = g/\varrho$$

Rovnice (7) popisuje pohyb soustavy s kulovým tlumičem ve svislé rovině. Soustava je buzena silou $P(t)$ při jakýchkoli výchylkách tlumiče včetně teoreticky možného přechodu limitním cyklem z uzavřené smyčky do otevřeného režimu.

3. Základní vlastnosti tlumiče

Teoretická účinnost tlumiče se dá posoudit rozborem jeho frekvenční charakteristiky pro kinematické buzení hmoty M . Pohyb koule m , která se valí uvnitř mísy, je plně popsán rovnicí (7a). Stanovíme-li výchylku $\varphi(t)$, potom z rovnice (7b) můžeme určit sílu $p(t)$. Ta je nezbytná, máme-li určit výchylku $u(t) = \varrho \cdot \zeta(t)$. Pro určení frekvenční charakteristiky zavedeme do rovnic (7) harmonické kinematické buzení $\zeta(t) = \zeta_o \cos(\omega t)$, z čehož vyplývá:

$$\ddot{\varphi} + \kappa b_\varphi \dot{\varphi} + \kappa \omega_m^2 \sin \varphi - \kappa \omega^2 \cos \varphi \cdot \zeta_o \cos \omega t = 0 \quad (a) \quad (8)$$

$$\mu \ddot{\varphi} \cos \varphi - \mu \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + (-(1 + \mu)\omega^2 + \omega_M^2) \zeta_o \cos \omega t - b_u \omega \cdot \zeta_o \sin \omega t = p(t) \quad (b)$$

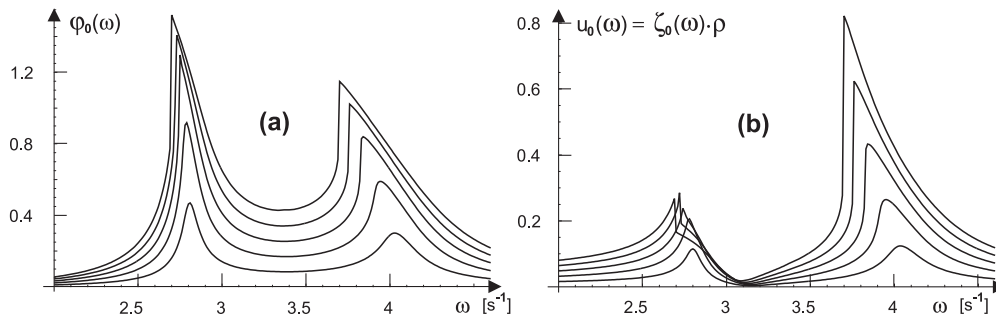
Zaměříme se nyní na rovnici (8a). Odpovídá rovnici matematického kyvadla buzeného v bodě závěsu. Jeho efektivní hmota je zvětšena vlivem momentu setrvačnosti koule m faktorem $1/\kappa$. Ani v praktických případech se pohyb této koule, resp. tohoto hypotetického kyvadla nedá linearizovat. Musí být zachována alespoň Duffingova forma této rovnice:

$$\ddot{\varphi} + \kappa b_\varphi \dot{\varphi} + \kappa \omega_m^2 \left(\varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) - \kappa \omega^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \cdot \zeta_o \cos \omega t = 0 \quad (9)$$

Nicméně smyslem této studie je nastínit základní inženýrskou aproximaci, která probírá problém v celé šíři od teoretických základů až po praktickou realizaci. Z toho důvodu odložíme přesnou analýzu rovnice (9) na příští práci, která se bude zabývat především matematickými aspekty problému. Prozatím se spokojíme s numerickou analýzou, která vede rychleji k získání přehledu o dynamických vlastnostech kulového tlumiče. Z hlediska numerické analýzy je však vhodnější vycházet z původního tvaru (8). Neklade si totiž žádná omezení na velikost amplitudy odezvy.

Vzhledem k dosavadním zkušenostem s pasivními tlumiči kmitání byla zavedena tato vstupní data:

$$M = 10.0 \quad m = 1.0 \Rightarrow \mu = 0.1$$



Obrázek 2: Frekvenční charakteristika kulového tlumiče

Jako základní nástroj numerické analýzy byl použit systém MATHEMATICA. Některé další výpočty byly provedeny vlastními programy.

Hlavní výsledky jsou shrnuty a znázorněny na obr. 2. Nelineární charakter problému je patrný na první pohled. Vyplývá to z výrazné závislosti polohy extrémů odezvy na amplitudě budící síly. Tento efekt je obzvláště patrný v blízkosti konvenční "lineární" vlastní frekvence tlumiče, ačkoliv i další vlastní frekvence konstrukce jsou tímto jevem ovlivněny. Rezonanční křivky jsou typické pro soustavu s "měkknoucí" nelinearitou. Ukazuje se, že nelineární prvek reprezentovaný kulovým tlumičem může být účinnější při širokopásmovém náhodném buzení než klasický tlumič kyvadlového typu. Ještě lepších výsledků lze dosáhnout při nestacionárním buzení, které se vyznačuje výraznou proměnností spektra na času. V takovýchto případech buzení je nelineární tlumič bezpochyby výhodnější, zatímco lineární tlumič dává lepší výsledky při výrazně úzkopásmovém buzení spíše deterministického charakteru.

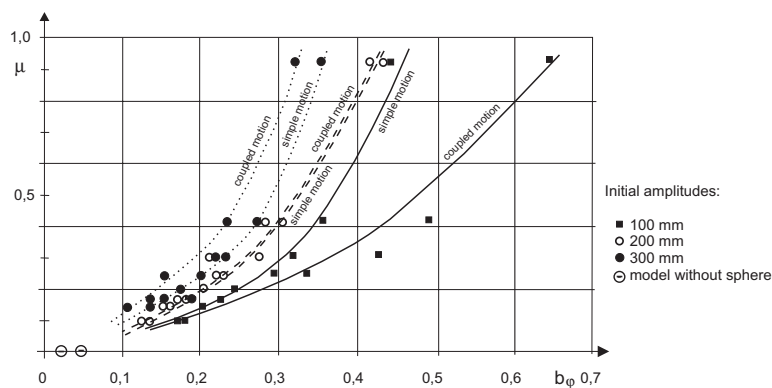
Stoupá-li tlumení až po jistou hranici, oblast nestabilní chaotické odezvy na deterministické buzení se zvětšuje. Nezdá se, že tato oblast se výrazně zvětší, uplatní-li se náhodné místo deterministického buzení. Nicméně existence oblasti chaotické odezvy působí ve prospěch konstrukce, neboť efektivní amplitudy odezvy za těchto okolností klesají vlivem rychlého růstu entropie hustoty pravděpodobnosti odezvy.

Na druhé straně je třeba jisté opatrnosti. Během laboratorních zkoušek se ukázala řada efektů typických pro různé kritické a postkritické jevy, které dosud nebyly teoreticky popsány a kvantifikovány.

4. Aplikace teorie a experimentální výsledky

Z laboratorních experimentů a z měření in situ vyplývají dva důležité poznatky, které nyní popíšeme.

Co se týká tlumení, logaritmický dekrement jakožto míra tlumení se nezdá příliš vhodný, neboť příliš neodpovídá nelineární povaze zkoumaného jevu. Avšak pro srovnání charakteru různých zkoumaných fyzikálních modelů se jeví být užitečný. Na obr. 3 je znázorněna hodnota logaritmického dekrementu b_φ modelu jakožto funkce poměru hmot $\mu = m/M$, viz (7c). Model byl rozkmitáván počáteční výchylkou z rovnovážné polohy. Křivky na tomto obrázku odpovídají několika různým počátečním výchylkám. Je zřejmé, že modelu bez koule odpovídá nejnižší hodnota útlumu přibližně 0.02 (bod na vodorovné ose $\mu = 0$), zatímco po přidání koule útlum stoupl na hodnoty 0.17-0.25 (body na vodorovné ose $\mu = 0.2$), to jest zhruba na osminásobek. S podobnými jevy se setkáváme i u konvenčních kyvadlových tlumičů. Podrobnosti je možné



Obrázek 3: Logaritmický dekrement b_{φ} v závislosti na poměru μ pro různé počáteční výchylky.

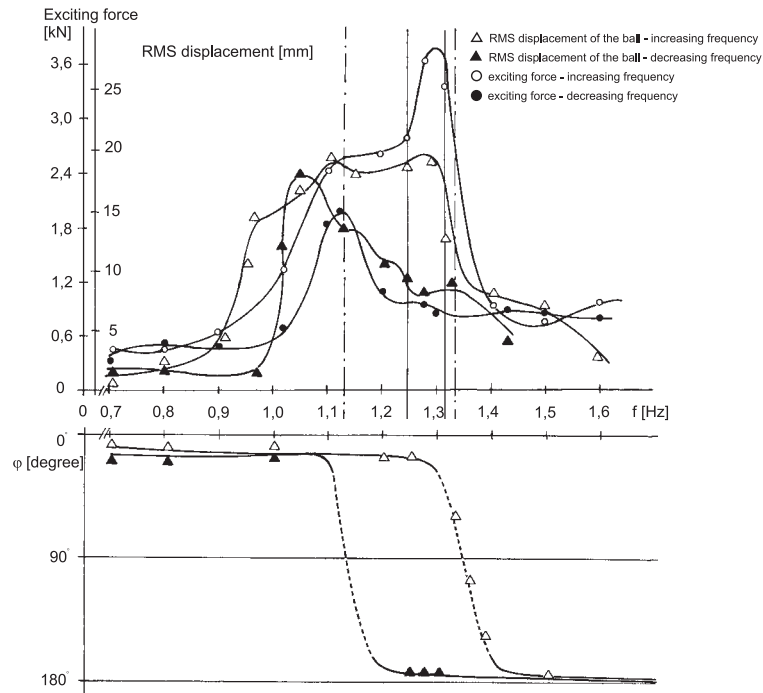
najít v práci, kterou uveřejnil Pirner (1994).

Na modelu se zkoumal rovněž vliv náklonu na účinnost tlumiče. K tomuto náklonu dochází pootočením mísy tlumiče kolem vodorovné osy, které souvisí s vodorovným vychýlením konstrukce. Zkoumaly se extrémně nepříznivé stavy, kdy frekvence výchylek konstrukce byla blízká vlastní frekvenci valivého pohybu koule uvnitř mísy. Žádný z těchto stavů však nevedl k viditelnému snížení účinnosti či jiným nebezpečným stavům.

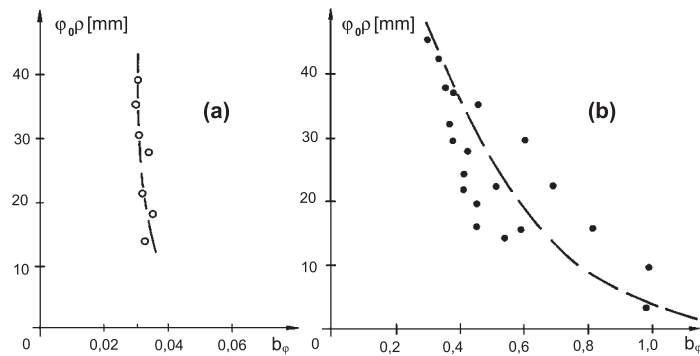
Funkce a účinnost kulového tlumiče kmitání již byla detailně popsána (Pirner & Fischer, 2000). Nyní popíšeme laboratorní experimenty. Mísa byla upevněna na desku spočívající na devíti ocelových koulích, které umožňují její pohyb nezávisle ve dvou vodorovných souřadnicích, to jest zavádět kinematické buzení v jedné nebo ve dvou kolmých složkách. Budící síly se zaváděly jedním (jedno-osové buzení), resp. dvěma (dvou-osové) válci MTS prostřednictvím ramen s klouby. Buzení se zavádělo za podmínek řízeného posuvu. Vnášený posuv měl konstantní amplitudu v oboru frekvencí $\omega \in (4.40 \div 9.40 \text{ s}^{-1})$. Tomu odpovídala proměnná amplituda budící síly v závislosti na frekvenci. Byly provedeny dvě serie experimentů. První se týkala varianty s gumovou výstelkou mísy a druhá serie pracovala s mísou bez této povrchové úpravy.

Při buzení harmonickou silou se budící frekvence pohybovala v pásmu $\omega \in (4.40 \div 9.40 \text{ s}^{-1})$ po krocích $\Delta\omega = 0.5$, a v rezonanční oblasti po krocích $\Delta\omega = 0.25$. V každém kroku probíhal ustálený proces 30 vteřin, přechod z jedné frekvence do sousední včetně utlumení přechodového procesu 15 vteřin. Průchod uvedeným frekvenčním pásmem naznačenou strategií probíhal postupně pro sedm amplitud výchylky desky s mísou v oboru 1 mm až 7 mm . Na obr. 4 jsou jako příklad (amplituda výchylek desky $u_o = 4 \text{ mm}$) znázorněny rezonanční křivky koule m v závislosti na frekvenci budící síly, resp. budící výchylky, za podmínek, kdy mísa není opatřena výstelkou (další grafy se týkají varianty s výstelkou). Z obr. 4 je patrný rovněž fázový posuv výchylky koule a mísy ve směru buzení, a to pro rostoucí a klesající frekvenci buzení, viz dolní část obr. 4. Jsou zřetelné dva přeskoky fázového posuvu (náhlé stoupnutí, resp. pokles) v oboru $(0 - 2\pi)$ v okolí frekvence odpovídající nejvyšším hodnotám budící síly.

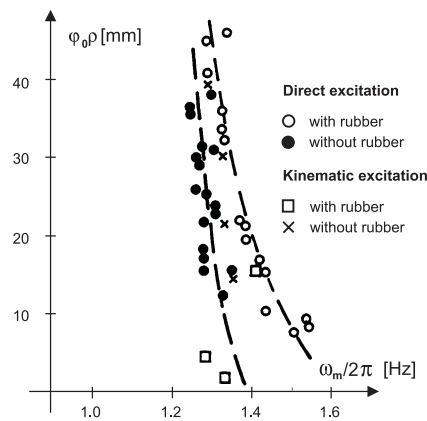
Pohyb koule, ačkoli byla buzena prostřednictvím mísy důsledně v jednom směru, obsahoval počínaje jistou frekvencí a amplitudou buzení významnou složku odezvy kolmou na směr buzení. Tento složitý 3D pohyb se objevoval zejména v případě varianty bez výstelky. Spektrum výchylek obsahuje výrazné špičky mimo budící frekvenci obzvláště při buzení mimo vlastní frekvence a odpovídající spíše násobkům vlastních frekvencí linearizovaného systému. To lze považovat za další důkaz vysoké nelinearity systému, která se projevuje existencí superharmonik. Z uvedených vlastností je rovněž zřejmé, že v soustavě probíhají silné autoparametrické procesy, viz



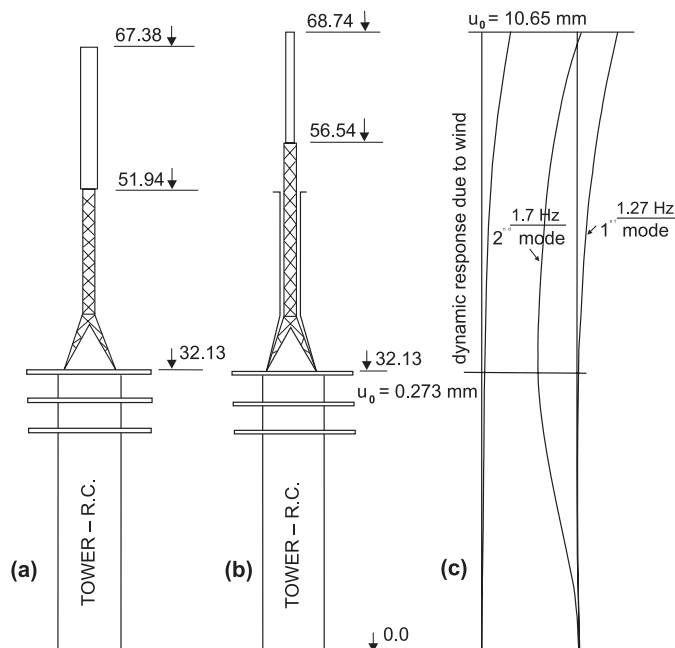
Obrázek 4: Experimentální rezonanční křivky budící síly a odezvy koule



Obrázek 5: Závislost logaritického dekrementu b_φ na amplitudě $\varphi_0 \cdot \rho$ výchylky koule m



Obrázek 6: Závislost vlastní frekvence ω_φ na amplitudě $\varphi_0 \cdot \rho$ výchylky koule m



Obrázek 7: TV věže, jejich dva nejnižší vlastní tvary a amplitudy kmitání vybuzeného větrem

např. Tondl (1997), nebo monografie Tondl et al. (2000). Poloha bifurkačního bodu, kdy odezva ztrácí semitriviální charakter je tím více neurčitá, čím výrazněji se uplatní imperfekce povrchu mísy. To je v případě varianty bez gumové výstelky.

Závislost logaritmického dekrementu útlumu a amplitudy výchylky mísy $\varphi_o \cdot \rho$ je znázorněna na obr. 5, zatímco závislost vlastní frekvence koule pohybující se v ocelové míse bez výstelky a s výstelkou na amplitudě výchylky $\varphi_o \cdot \rho$ je vykreslena v obr. 6.

5. Praktická realizace

Kulový tlumič byl v nedávné době použit na dvou TV věžích v České republice s cílem potlačit větrem buzená kmitání konstrukce (obr. 7a, 7b). Obě zkoumané věže měly dominantní vlastní frekvence před instalací tlumiče $\omega_{(1)} = 7.98s^{-1}$, $\omega_{(2)} = 10.68s^{-1}$ (přibližně stejné v obou případech). Vlastní tvary a amplitudy kmitání při větru o rychlosti $8 - 15m/s$ jsou vykresleny na obr. 7c. Amplituda odezvy na vrcholu věže je $10.65mm$ a v místě betonového ochozu $0.273mm$.

Kulový tlumič před montáží je patrný z fotografie na obr. 8. Nejdůležitější výsledky, které dokumentují účinnost tlumiče v bezrozměrných hodnotách, jsou uvedeny v tab. 1. Účinnost byla vyhodnocena pro nejdůležitější frekvenční pásma s použitím záznamů dlouhodobých měření in situ. Pro hodnocení účinnosti tlumiče byly zavedeny následující parametry:

$$\varepsilon_x = \frac{f \cdot G_x(f)}{\sigma_x^2} ; \quad \varepsilon_y = \frac{f \cdot G_y(f)}{\sigma_y^2} \quad (f = \omega/2\pi)$$

$G_x(f)$, or $G_y(f)$ – spektrální hustota výchylky vrcholu věže ve směrech x, y ;

σ_x^2 , or σ_y^2 – Střední kvadratická odchylka výchylky vrcholu věže ve směrech x, y ;



Obrázek 8: Kulový tlumič určený pro TV věž

Tabulka 1: Účinnost kulového tlumiče

Frekvence [Hz/s^{-1}]	bez tlumiče		s tlumičem		poměr s/bez tlumiče	
	X	Y	X	Y	X	Y
0.90/5.65	0	0.0948	0	0.2031	-	2.14
1.27/7.98	19.064	3.279	0.271	0	0.0142	-
1.70/10.68	0	7.382	0	0.466	-	0.0632

$$X = f \cdot G_x(f) / \sigma_x^2; \quad Y = f \cdot G_y(f) / \sigma_y^2$$

Měřítka odezvy je zavedeno jako poměr hodnot $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ platných pro stav bez tlumiče (sloupce 2, 3) a s tlumičem (sloupce 4, 5). Sloupce 6, 7 reprezentují poměr hodnot bez tlumiče / s tlumičem v příslušných směrech. Obzvláště ze sloupců 6, 7 je vidět vysoká účinnost instalovaného kulového tlumiče.

6. Závěr

V práci byla popsána funkce tlumiče kmitání založeného na valení koule v kovové míse opatřené tenkou povrchovou vrstvou gumy. Matematický popis pohybu této silně nelineární soustavy vychází z Lagrangeových rovnic druhého druhu. Rozsáhlý numerický rozbor ukazuje, že nelineární charakter soustavy, který činí rezonanční křivky výrazně závislými na amplitudě buzení, vede k lepší účinnosti tlumiče ve srovnání s přibližně lineárními mechanismy. Nelineární povaha soustavy s nejednoznačnými oblastmi je důvodem ke vzniku chaotických oblastí v určitých frekvenčních pásmech, což dále zvyšuje účinnost tohoto tlumiče následkem vyšších ztrát energie. Laboratorní testy kulového tlumiče s mísou bez a s gumovou výstelkou ukázaly řadu aspektů funkce tlumiče v reálných poměrech. Především prokázaly pozitivní vliv gumové výstelky na účinnost tlumiče. Na základě teoretického rozboru, laboratorních zkoušek a měření in situ lze konstatovat, že kulový tlumič je jednoduché téměř bezúdržbové a levné zařízení s velmi malými svislými rozměry. Tyto jeho vlastnosti jej činí velmi vhodným pro praktické použití obzvláště v případech, kdy na konstrukci působí širokopásmové náhodné buzení a k dispozici je velmi málo

místa. Praktické zkušenosti plně potvrzují tyto závěry.

Z těchto experimentů vyplynula řada dalších výsledků týkajících se procesů ztráty stability, přechodu do postkritických stavů a podmínek případné restabilizace. Tyto jevy prozatím zůstaly bez patřičného teoretického popisu a posouzení jejich vlivu na celkovou účinnost tlumiče, což stimuluje v současnosti intenzivní teoretický výzkum v této oblasti. Jeho cílem je hlavně prozkoumat postkritické stavy, bifurkační body a odpovídající přechodové stavy, které ovlivňují procesy vlastního tlumení. Ukazuje se, že v tomto směru hraje velkou úlohu náhodné zejména parametrické buzení, jakož i náhodné imperfekce povrchu mísy i koule.

7. Poděkování

Práce vznikla za podpory grantu GAČR 103/02/0020. Text byl upraven pomocí procesoru \LaTeX .

8. Literatura

- Hamel, G. (1978) *Theoretische Mechanik*. Springer, Berlin.
- Náprstek, J. & Pirner, M. (2002) Non-linear behaviour and dynamic stability of a vibration spherical absorber, in: *Proc. 15th ASCE Engineering Mechanics Division Conference* (A. Smyth et al. eds). Columbia Univ., New York, 2002, 10 pp. CD ROM.
- Pirner, M. (1994) Dissipation of kinetic energy of large-span bridges. *Acta Technica, CSAV*, Vol 39, pp 407-418.
- Pirner, M. & Fischer, O. (2000) The development of a ball vibration absorber for the use on towers. *Jour.Int.Assoc.for Shell and Spatial Structures*, Vol 41, No.2, pp 91-99.
- Tondl, A. (1997) To the analysis of autoparametric system. *Z. Angew. Math. Mech.*, vol 77, no 6, pp 407-418.
- Tondl, A., Ruijgrok, T., Verhulst, F. & Nabergoj, R. (2000) *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dodatek I. Označení

- M, C – hmota a tuhost vyjadřující dynamické vlastnosti konstrukce (bez tlumiče);
- R, r – poloměr mísy a poloměr koule m
- m – hmotnost koule m ;
- J – moment setrvačnosti koule m ;
- b_u, b_φ – koeficienty útlumu (logartmické dekrementy);
- $G_x(f), G_y(f)$ – výkonová spektrální hustota výchylky vrcholu věže ve směrech x, y ;
- σ_x^2, σ_y^2 – střední kvadratická výchylka vrcholu věže ve směrech x, y ;
- ω, f – kruhová frekvence [s^{-1}] a frekvence [Hz] ($\omega = 2\pi \cdot f$)