

RESEARCH AND DEVELOPMENT OF DRIVE SYSTEMS AT INSTITUTE OF SOLID MECHANICS

C. Kratochvíl*, F. Procházka*, T. Březina*

Summary: *The problems of analysis, modeling and simulation of drive systems are solved on Institute of Mechanics of Solids for over 20 years. During that time period not only the solved problems changed but also the drive systems themselves and mainly the requirements on what to solve and how to do it. Today the drive systems is considered mainly as interactive systems containing a range of subsystems with different physical nature: mechanical (the basic ones), electrical or hydraulic, pneumatics and also electronic (control ones). Models of those complex systems can then be characterized as so called „purpose build and partially structured“. The models of those partial subsystems have its typical signs and properties, which can often essentially influence the dynamic properties and global system models behavior. The aim is to keep so called functional model purpose – in comparison with the real system, which does not necessarily mean that the model must contain all the function and signs. By contrast we suppose tha those function have its carrier, which in limit case can be represented by black box. The control of such systems the more and more often require use of intelligent control algorithms, based for example on genetic algorithms or artificial neural network.*

1. Úvod

Pohonové soustavy představují stále jednu z neaktuálnějších oblastí dynamiky strojů. A stejně jako v jiných oblastech dynamiky i zde se setkáváme s využíváním matematického modelování k ověřování dynamických vlastností reálných, nově navrhovaných, resp. inovovaných pohonových soustav při standartních, přechodových či poruchových stavech. Dovolíme si Vás seznámit s některými našimi zkušenostmi, které jsme získali v průběhu posledních 20 let, při řešení konkrétních problémů tzv. interaktivních pohonových soustav.

Pro interaktivní pohonové soustavy je charakteristické, že jsou složeny ze subsoustav různé fyzikální podstaty a pracují v prostředí, které velmi silně ovlivňuje dynamické charakteristiky globální soustavy. Jedním z markantních projevů je, že mají extrémně velký rozptyl vlastních čísel a zhoršené stabilitní vlastnosti. K řešení těchto problémů lze využít tzv. stiff algoritmů, pro které je typické rozšíření oblasti absolutní stability numerických řešení.

* Prof. Ing. Ctirad Kratochvíl, DrSc., VUT FSI Brno – Ústav mechaniky těles, Technická 2, 616 69 Brno. Centrum mechatroniky ÚT AVČR, pobočka Brno. Tel.: 541142853, e-mail: kratochvil@umt.fme.vutbr.cz
Ing. František Procházka, Ph.D., VUT FSI Brno – Ústav mechaniky těles, Technická 2, 616 69 Brno. Tel.: 541142888, e-mail: prochazka@umt.fme.vutbr.cz
RNDr. Ing. Tomáš Březina, CSc., VUT FSI Brno – Ústav automatizace a informatiky, Technická 2, 616 69 Brno. Centrum mechatroniky ÚT AVČR, pobočka Brno. Tel.: 541142885, e-mail: brezina@uai.fme.vutbr.cz

Návrhy řídicích subsoustav řízených interaktivních pohonových soustav jsou v mnoha případech komplikovány velkým množstvím parametrů, které je nutné současně sledovat, vyhodnocovat a případně ovlivňovat. To je jedna z příčin, která vede k využívání a vývoji inteligentních řídicích algoritmů na bázi umělých neuronových sítí či genetických (i jiných) algoritmů, přičemž se ukazuje, že tyto inteligentní algoritmy můžeme využít i pro identifikaci parametrů nebo pro komplexní návrhy pohonových soustav.

Naše zkušenosti ukazují, že k řešení aktuálních inženýrských problémů v oblasti vývoje, výzkumu, analýzy i návrhu pohonových soustav lze :

- výhodně využívat systémový přístup,
- modely pohonových soustav chápat jako interaktivní, účelové a částečně strukturované,
- stále častěji využívat tzv. modelování „ve variantách“.

Na mnoha konkrétních příkladech pak ukážeme výsledky, kterých lze s využitím výše uvedených doporučení dosáhnout.

2. Matematické formulace dynamických systémů

Pohonové soustavy budeme chápat jako účelové, částečně strukturované, interaktivní dynamické systémy, složené z podsystémů různé fyzikální podstaty. K jejich matematickému popisu můžeme využít různých matematických prostředků. Tak například u mechanických podsystémů využíváme k sestavení pohybových rovnic Lagrangeových rovnic druhého druhu, kdežto u elektrických subsystémů (lineárních) využíváme přenosových funkcí získaných aplikací Laplaceovy transformace, Z-transformace apod. Vytvořit konzistentní matematický popis globálního pohonu je v podstatě víceznačný a vůbec ne jednoduchý proces. Na základě našich dlouhodobých zkušeností doporučujeme využít k sestavení matematického modelu globální pohonové soustavy i jejich základních strukturálních částí stavových rovnic.

Stavovou rovnici v implicitním tvaru, která je v převážné většině případů nelineární, lze v maticovém vyjádření napsat ve tvaru

$$\mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

s počátečními podmínkami

$$\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}(t_{0+}) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

doplněné maticovou formulací tzv. *výstupní relace*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t], \quad (3)$$

která definuje výstupní veličiny na množině stavových veličin. Stavový vektor

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T, \quad \mathbf{x} \in X, \quad (4)$$

obsahuje složky tzv. *primárních veličin* a X je množina přípustných stavů. Vektor

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T \quad (5)$$

obsahuje derivace primárních veličin. Vektor

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t)]^T, \quad \mathbf{y} \in Y, \quad (6)$$

obsahuje výstupní veličiny a Y je množina přípustných výstupních veličin.

Pro čas t platí $t \in T$, kde T je časová množina. Prostor \mathbf{R}^n je n -rozměrný stavový prostor. Prvky stavového vektoru $\mathbf{x}(t)$ pak jsou řešením obecné Cauchyovy úlohy pro problém (1) s počátečními podmínkami (2).

Popis dynamického systému ve standartním explicitním tvaru představuje soustava maticových rovnic

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t], \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}(t_{0+}) = \mathbf{x}_0, \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t], \quad (8)$$

kde $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Převedení rovnice (1) do tvaru rovnice (7) není obecně snadnou záležitostí a v určitých případech není vůbec možné. Tuto skutečnost je vhodné uvážit již při počáteční formulaci výpočtového modelu.

O množinách relací ještě pojednáme podrobněji. Vstupní, resp. výstupní veličiny jsou obsaženy ve vstupním vektoru $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in U$, resp. $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in Y$, kde U , resp. Y jsou množiny přípustných vstupních, resp. výstupních veličin splňujících relace

$$U_R = \{ \mathbf{u} : \mathbf{u} : T \rightarrow U \}, \quad (9)$$

$$Y_R = \{ \mathbf{y} : \mathbf{y} : T \rightarrow Y \}. \quad (10)$$

Stav systému v každém časovém okamžiku $t \in T$ charakterizuje *stavový vektor* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in X$, přičemž platí :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t], \quad \mathbf{x} : T \rightarrow \mathbf{R}^n. \quad (11)$$

Výstupní relace obsahuje vektorovou funkci $\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t]$, která je pro $\mathbf{h} : T \times X \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ a pro $t \in T$, $\mathbf{x}(t) \in X$, $\mathbf{u}(t) \in U$ definována maticovou rovnicí

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t]. \quad (12)$$

Pokud jde o množinu zpětnovazebních funkcí, vycházíme ze skutečnosti, že pro většinu dynamických systémů je charakteristická existence uzavřených smyček v tzv. orientovaném grafu struktury. Připomeňme, že tzv. orientované relace jsou představovány transformací veličin vstupních na veličiny výstupní a respektují princip kauzality. Zpětnovazební smyčky pak realizují vzájemné interakce mezi vstupy a výstupy, typické pro řízené dynamické systémy.

Mezi další relace, užívané ve specifikacích obecných systémů i v modelech konkrétních technických soustav, patří také soustavy omezujících podmínek, které můžeme vyjádřit ve vektorovém tvaru

$$\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \geq \mathbf{0}, \quad (13)$$

kde $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ je vektorová funkce proměnných vektorů \mathbf{x} , \mathbf{y} a t . V systémovém pojetí modelování popisují tyto podmínky např. fyzikální omezení pohybu technických soustav.

Ve všech uvažovaných případech musíme výše uvedené rovnice doplnit vektory počátečních podmínek, musíme ověřit předpoklady řešení a prakticky ve všech případech můžeme tyto rovnice transformovat do stavového prostoru (vztahy (5) a (6)).

Při řešení konkrétních úloh se nelineární soustavy – i jejich matematické modely – často linearizují s využitím některých osvědčených metod. Alternativně se vyšetřují frekvenční přenosy energií mezi jednotlivými částmi interaktivních soustav (obecně různé fyzikální podstaty), včetně přenosů od/do okolí. Velké pohonové soustavy, charakterizované matematickými modely o mnoha stupních volnosti, se pak často redukuje na menší rozměry.

3. Pohybové rovnice pohonových soustav a jejich transformace do stavového prostoru

Předpokládejme, že pohonná soustava je tvořena především mechanickým a elektrickým subsystémem, doplněnými algoritmizovanými množinami požadavků řízení a technologie. Obecně jsou tyto subsystémy vyjádřeny pomocí algebraických a diferenciálních rovnic různého typu a jejich analytické řešení v této podobě je prakticky nemožné.

Tak například jsou mechanické subsystémy obecně popsány (po vhodné diskretizaci prostoru) soustavou obyčejných diferenciálních rovnic typu

$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{Q}(t), \quad (14)$$

kde $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ je v případě pohonových soustav zpravidla vektor relativních úhlových výchylek a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ je vektor zobecněných budících sil (momentů), který lze rozdělit na účinky v mechanickém subsystému $\mathbf{Q}_m(t)$, na účinky v elektrickém subsystému $\mathbf{Q}_e(t)$ a na poruchové složky $\mathbf{Q}_p(t)$, tedy

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_m(t) + \mathbf{Q}_e(t) + \mathbf{Q}_p(t). \quad (15)$$

Při formulování lineárního, resp. linearizovaného matematického modelu pohonové soustavy využíváme zpravidla zápisu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) - \mathbf{f}_n(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (16)$$

kde vektorová funkce $\mathbf{f}_n(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ soustřeďuje nelinearity závislé na řešení, které můžeme považovat v mnoha případech za aditivní šum.

Na rovnici (16) již lze formálně snadno aplikovat Newmarkovu metodu a získat vektor odezev iteračním řešením nebo lze tuto rovnici transformovat do stavového prostoru, a to pomocí následující substituce

$$\mathbf{x}(t) = [\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t)]^T, \quad (17)$$

čímž rovnice (16) získá tvar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad (18)$$

tj. soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, obecně nelineárních, přičemž pro jednotlivé matice platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ je transformace vektorové funkce $\mathbf{Q}(t) - \mathbf{f}_n(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ po aplikaci substituce (17). V případě lineárních modelů je $\mathbf{f}_n(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ a další výpočty se výrazně zjednoduší.

Doplníme-li soustavu (18) rovnicí pro dynamickou charakteristiku hnacího motoru, pak dostaneme jednoduchý matematický model elektromechanické soustavy, který může poskytnout překvapivě dobré výsledky. S použitím dalších, relativně jednoduchých zpětnovazebních podmínek, lze získat matematický model řízení interaktivní pohonové soustavy.

4. Výběr integračních metod

Řešení soustavy rovnic (18), které popisuje chování pohonové soustavy ve stavovém prostoru, je nutno v převážné většině případů získat numerickou integrací příslušné soustavy rovnic, proto si stručně charakterizujeme problematiku numerického řešení pro systémy obyčejných diferenciálních rovnic, splňujících náročné podmínky, které vyplývají

- z existence tzv. *silných nelinearit* v mechanickém, elektrickém či jiném subsystému,
- z existence stochastických složek v buzení (případně v parametrech), výrazných nespojitostí, případně rázů,
- z prioritního významu simulace přechodových dějů (provozní, havarijní apod.),
- z požadavku na tzv. komplexní řešení problémů, především s uvážením vzájemných interakcí mezi jednotlivými subsystémy různé fyzikální povahy, vnějších interakcí atd.

Naše zkušenosti potvrdily očekávanou skutečnost, že uvedené komplexní pojetí vede k řešení problémů s výrazně odlišnými časovými konstantami u jednotlivých subsystémů, tak např. u elektromechanických pohonů se časová konstanta mechanického a elektrického subsystému lišily až o šest řádů. Standartní explicitní integrační formule (Eulerova, Runge-Kutta, Adams-Moultonova aj.) nejsou pro simulaci těchto problémů vhodné, a to nejen s ohledem na extrémní časové nároky, ale i s ohledem na jejich sklon k numerické nestabilitě, která vyplývá z toho, že mají uzavřenou a omezenou oblast absolutní stability. Tyto problémy lze odstranit, aplikujeme-li při integraci pohybových rovnic tzv. *stiff algoritmy*.

Základem numerické simulace na matematickém modelu dynamického systému je nalezení numerického řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, splňujícího podmínky definované na začátku tohoto odstavce. Při aplikaci *stiff algoritmů* využijeme velmi dobrých stabilitních vlastností těchto metod v kombinaci s vhodnou strategií řízení délky integračního kroku. Nelineární systém

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &\equiv \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), & t \in I = \langle t_0, t_f \rangle, \\ \mathbf{x}(t=t_0) &= \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, & I \in \mathbf{R}^1, \quad w \in \mathbf{N}, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &\in \mathbf{R}^w, & \mathbf{f}: I \times \mathbf{R}^w \rightarrow \mathbf{R}^w, \end{aligned} \tag{19}$$

nazveme tuhým (stiff) na intervalu I , jestliže $\forall t \in I$ vlastní čísla

$$\{ \Omega_i(t) \mid \Omega \in C, i = 1, 2, \dots, w \},$$

Jacobiho matice

$$\mathbf{J}_f = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_w}{\partial x_1} & \frac{\partial f_w}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_w}{\partial x_w} \end{bmatrix},$$

splňuje následující podmínky :

- $\operatorname{Re}(\Omega_i(t)) < 0, i = 1, 2, \dots, w,$
- $S \gg 1$, kde veličina S je dána výrazem : $S = \frac{\max[\operatorname{Re}(\Omega_i(t))]}{\min[\operatorname{Re}(\Omega_i(t))]}, i = 1, 2, \dots, w.$

Jak vyplývá z definice, v případě nelineárního systému závisí vlastní čísla $\Omega_i(t)$ Jacobiho matice \mathbf{J}_f na vektoru řešení $\mathbf{x}(t)$. Tuhost systému je tedy určena jak fyzikální podstatou modelu, tak také závislosti na jeho řešení.

Pro nelineární systém (19) lze také vyjádřit hodnotu Lipschitzovy konstanty L

$$L = \sup_{\forall t, N \in D} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right\| \geq \sigma(\mathbf{J}_f) \gg 1, \quad (20)$$

kde $\sigma(\mathbf{J}_f)$ reprezentuje spektrální poloměr Jacobiho matice \mathbf{J}_f . Ze vztahu (20) vyplývá, že *tuhost* lze interpretovat jako špatnou podmíněnost funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Podle vztahu (20) je tuhý systém charakteristický vysokou hodnotou Lipschitzovy konstanty, tj. $L \gg 1$.

Základní podmínkou stability pro číslicovou simulaci na matematickém modelu dynamického systému (18), resp. (19) můžeme vyjádřit pomocí relace

$$h \cdot \omega_i \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, w, \quad (21)$$

kde : h je krok numerické simulace ($h > 0$),

ω_i je i -té vlastní číslo matice systému,

Ω je oblast absolutní stability numerické metody.

Pro stiff-metody je charakteristické, že oblast absolutní stability zahrnuje velkou část roviny komplexních čísel

$$C^- = \{ h \cdot \omega \mid \operatorname{Re}(h \cdot \omega) < 0 \}.$$

Při výběru vhodných numerických metod se například osvědčil přístup, který je založen na testování numerických algoritmů na konkrétních typech diferenciálních rovnic. Výsledkem těchto testovacích studií je vzájemné porovnání vybraných numerických metod, stanovení jejich efektivnosti a použitelnosti pro konkrétní specifické aplikace. Ukázalo se ovšem, že zatímco pro řešení lineárních diferenciálních rovnic je uvedený postup vhodný, při řešení soustav nelineárních diferenciálních rovnic tomu tak vždy není.

Nechť s a r jsou přirozená čísla, tj. $\{s, r\} \in \mathbf{N}$, kde \mathbf{N} je množina přirozených čísel. Potom obecný nelineární systém obyčejných diferenciálních rovnic řádu r ($r > 2$) o domenzi s ($s > 1$), definovaný na intervalu $I \equiv \langle t_0, t_f \rangle$, zní :

$$\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(r-1)}), \quad (22)$$

s vektory počátečních podmínek

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \ddot{\mathbf{x}}(t_0) = \ddot{\mathbf{x}}_0, \dots, \mathbf{x}^{(r-1)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(r-1)}, \quad (23)$$

kde t_0 je počáteční a t_f koncový bod časového intervalu řešení. Ve formulích (22) a (23) označují $\mathbf{x}^{(r)}$, $\mathbf{x}^{(r-1)}$, ..., \mathbf{x} s -dimenzionální reálné normované vektory

$$\{\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r-1)}, \dots, \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\} \in \mathbf{R},$$

řešení a jejich derivací a $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(r-1)})$ označuje nelineární vektorovou funkci pravých stran soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (22). Řešením soustavy (22), řádu (r) a dimenze (s) pak je každá vektorová funkce $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, která je r -krát diferencovatelná a splňuje relaci (22) pro počáteční podmínky (23) a pro $t \in I \equiv \langle t_0, t_f \rangle$. Z hlediska existence a jednoznačnosti řešení předpokládáme, že

- funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(r-1)})$ je definována a je spojitá na intervalu $I \equiv \langle t_0, t_f \rangle$ pro libovolné konečné hodnoty komponent vektorů \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$, ..., $\mathbf{x}^{(r-1)}$,
- funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(r-1)})$ splňuje tzv. Lipschitzovu podmínku vzhledem k vektorovým argumentům \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$, ..., $\mathbf{x}^{(r-1)}$.

Při numerickém řešení matematických modelů pohonových soustav, popsanych rovnicemi (22) a při počátečních podmínkách (23), jsme se zaměřili na třídu lineárních implicitních více-krokových metod, které splňovaly požadované vlastnosti z hlediska stability a porovnávali jsme je se standardní explicitní metodou Runge-Kutta 4.řádu s automatickou změnou integračního kroku dle Richardsonovy strategie. Jednalo se o následující metody :

- Skupina s -úrovňových semi-implicitních metod řádu $r = 3$:
 - Calahanova metoda ($s = 2$, $r = 3$),
 - Michelsonova metoda ($s = 3$, $r = 3$).
- Skupina implicitních metod :
 - A-stabilní Crank-Nicholsonova metoda 2.řádu (lichoběžníková),
 - Exponenciálně fittovaná Brandonova metoda.

Výsledky, získané pomocí výše uvedených numerických metod, však vždy nesplnily naše očekávání a vyskytly se problémy, pokud analyzovaná soustava měla větší počet stupňů volnosti. Proto jsem se zaměřili na využití programových souborů SADYS, MATLAB+Simulink a v poslední době získáváme také nadějně výsledky pomocí ryze matematického programu MathCAD Professional.

5. Ukázky řešení na konkrétních příkladech

V této kapitole si ukážeme výsledky numerických řešení soustavy rovnic, popisujících chování stejnosměrného elektrického motoru s cizím buzením, přičemž byly uvažovány jak změny magnetického toku v důsledku poruchových složek napětí na cívce cizího buzení, tak také poruchové složky napájecího napětí kotvy a zatěžujícího momentu. Výsledky řešení jsou prezentovány pomocí grafického zobrazení, kde na x-ovou osu vynášíme poruchovou složku úhlové rychlosti motoru a na y-ovou osu pak poruchovou složku hnacího momentu motoru. Zde budou uvedeny pouze výsledky získané pomocí programového souboru MathCAD, přičemž výsledky, které byly získány jinými programovými soubory (SADYS, Simulink), budou předvedeny na konferenci.

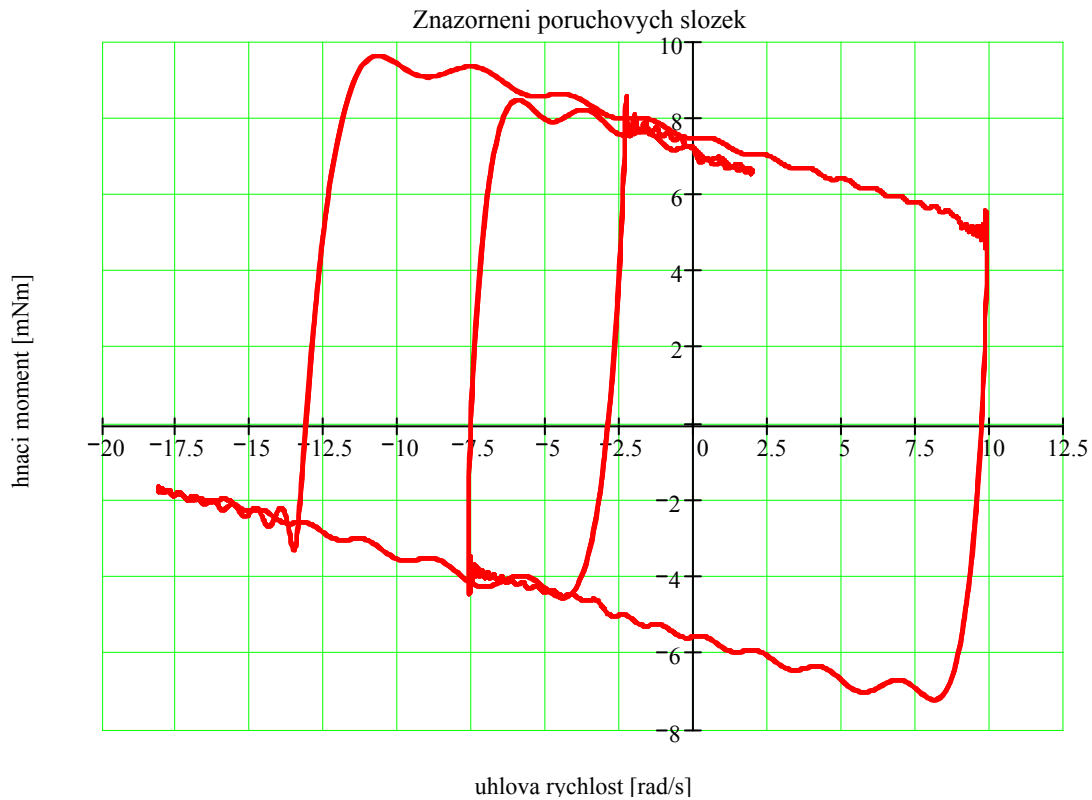
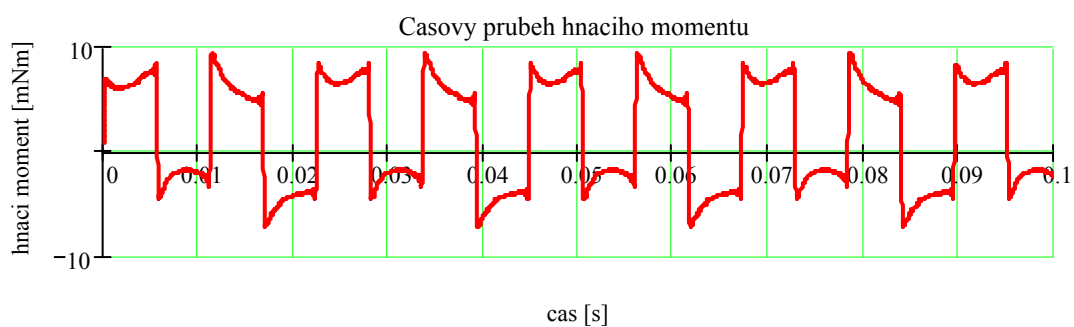
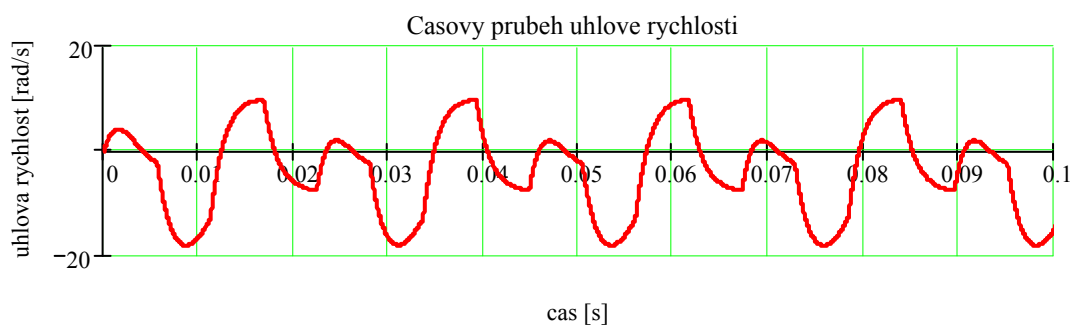
Při vyšetřování chování stejnosměrného elektrického motoru s cizím buzením byly poruchové složky vyjádřeny pomocí Fourierových řad se třiceti členy, kde poruchové složky napětí na kotvě a na cizím vinutím byly uvažovány ve tvaru obdélníkových pulsů rozdílných velikostí a frekvencí a vzájemně fázově posunutých o 180° , přičemž vzájemný poměr frekvencí poruchových složek napětí na kotvě a na cizím vinutí byl roven poměru celých kladných čísel. Poruchová složka zatěžujícího momentu měla frekvenci rovnu polovině frekvence poruchové složky napětí na kotvě, přičemž časový průběh poruchové složky zatěžujícího momentu byl uvažován v několika různých variantách, a to :

- jednocestně usměrněný sinusový signál (ustálená odezva je uvedena na obr.1),
- dvojcestně usměrněný sinusový signál (ustálená odezva je uvedena na obr.2),
- lichoběžníková křivka (ustálená odezva je uvedena na obr.3),
- lichoběžníkový impuls (ustálená odezva je uvedena na obr.4),
- obdélníková křivka (ustálená odezva je uvedena na obr.5),
- obdélníkový impuls (ustálená odezva je uvedena na obr.6),
- trojúhelníková křivka (ustálená odezva je uvedena na obr.7),
- trojúhelníkový impuls (ustálená odezva je uvedena na obr.8).

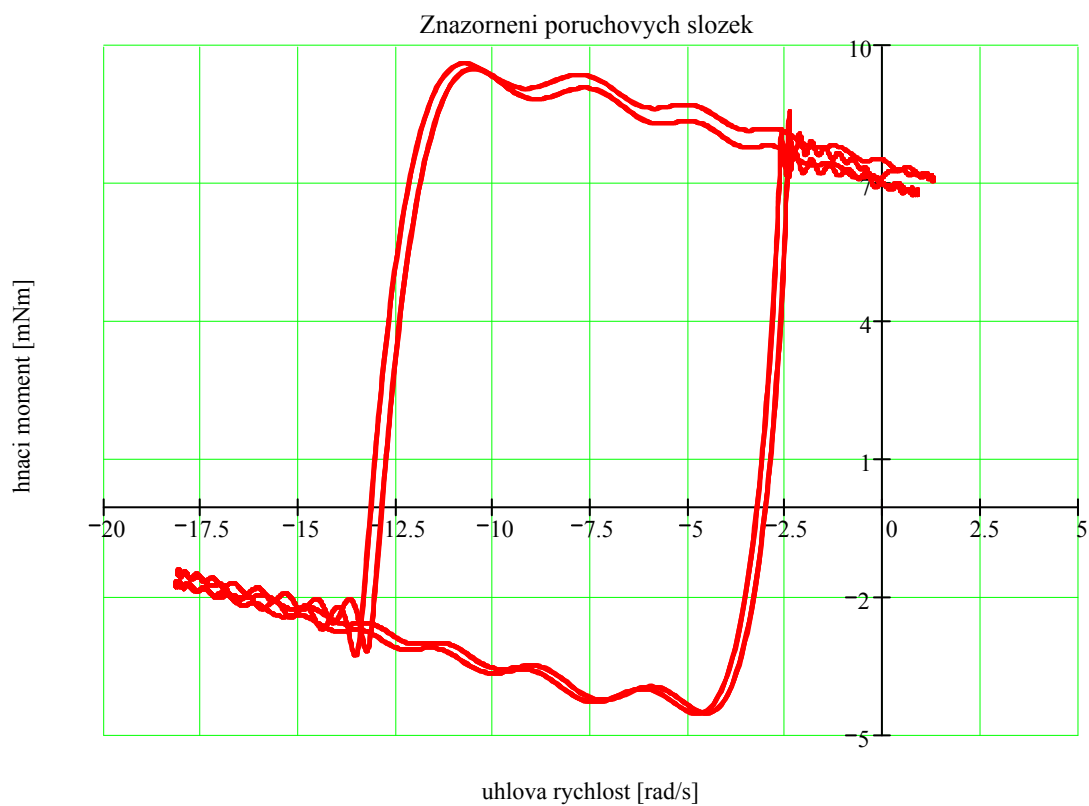
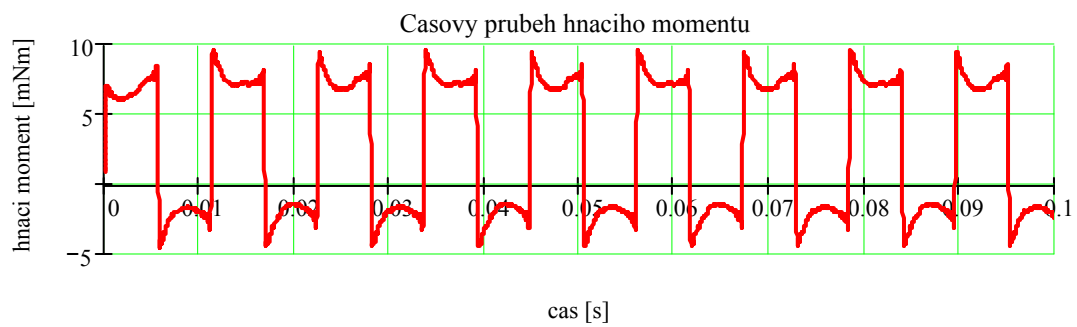
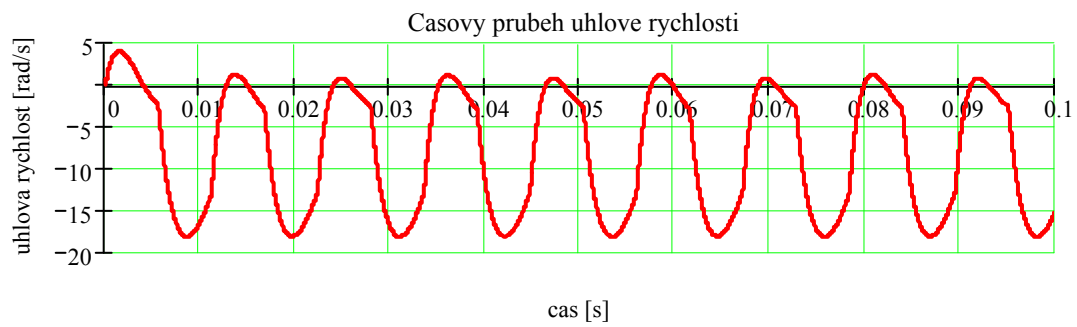
Parametry vyšetřované pohonové soustavy se stejnosměrným elektrickým motorem s cizím buzením byly následující : Moment setrvačnosti $I = 10^{-6} \text{ kg m}^2$. Zatěžující moment pracovního stroje byl uvažován v následujícím tvaru

$M_Z(\omega) = M_T + (M_N - M_T) \left(\frac{\omega}{\omega_N} \right)^X$, přičemž

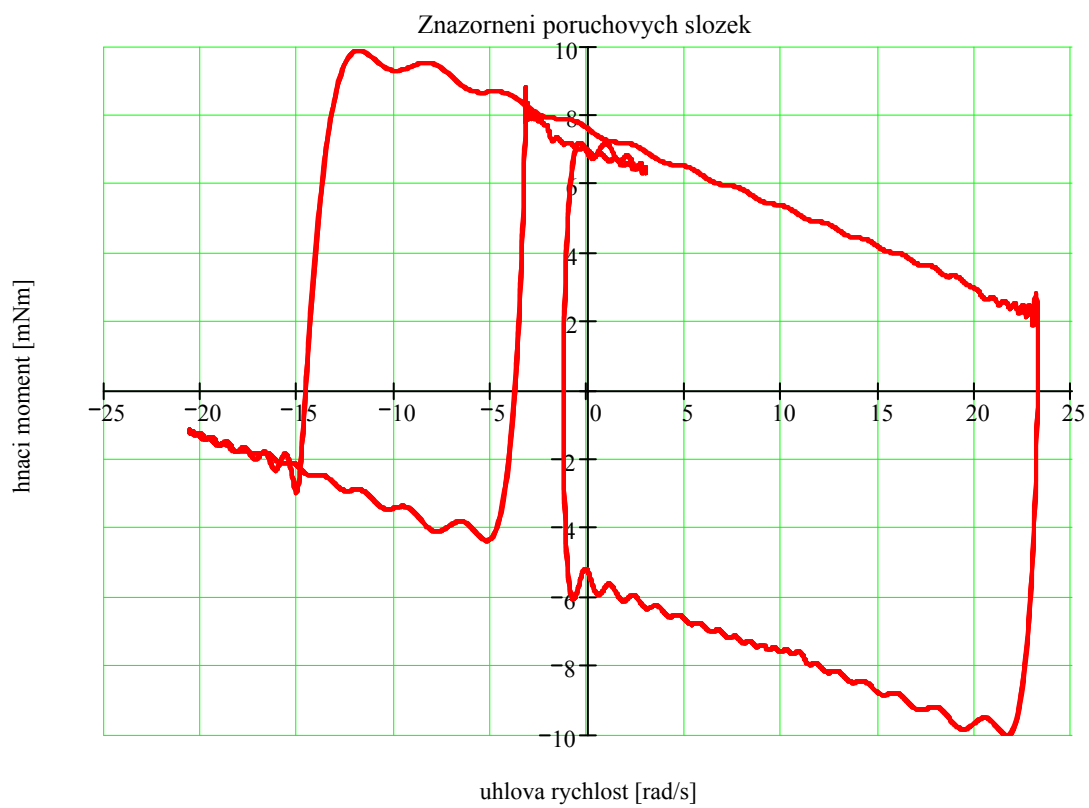
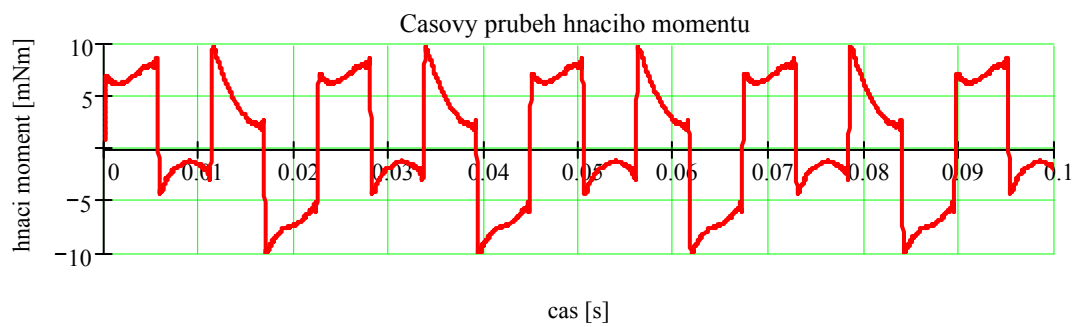
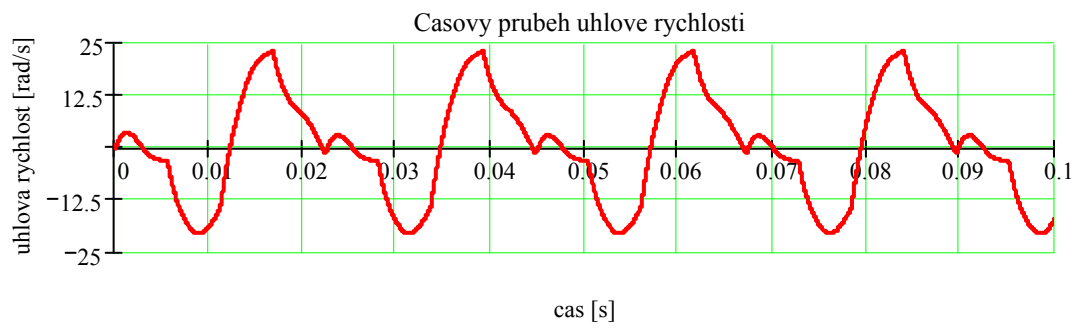
$X = 2$, $M_T = 0,0001 \text{ Nm}$, $M_N = 0,075 \text{ Nm}$, $\omega_N = 500 \text{ rad s}^{-1}$, amplituda poruchové složky zatěžujícího momentu $m_Z = 0,01 \text{ Nm}$ a její frekvence $\omega_Z = \omega_0 = 280,906 \text{ rad s}^{-1}$, kde ω_0 je úhlová rychlost pohonové soustavy v rovnovážném stavu. Odpor a indukčnost cizího vinutí $R_A = 8 \Omega$, $L_A = 0,0005 \text{ H}$. Indukčnost a odpor kotvy $L_A = 0,0003629 \text{ H}$, $R_A = 5,33 \Omega$. Magnetický tok při úplném nasycení $\phi_{max} = 0,04 \text{ Wb}$, magnetizační charakteristika byla aproximována rovnicí $\phi(i_F) = \phi_{max} (1 - e^{-0,75 i_F})$. Stejnosměrná hodnota napětí cizího vinutí $U_F = 20 \text{ V}$, frekvence a amplituda poruchové složky $\omega_F = 842,719 \text{ rad s}^{-1}$, $u_F = 1 \text{ V}$. Stejnosměrná hodnota napětí kotvy $U_A = 20 \text{ V}$, frekvence a amplituda poruchové složky $\omega_A = 516,812 \text{ rad s}^{-1}$, $u_A = 1 \text{ V}$.



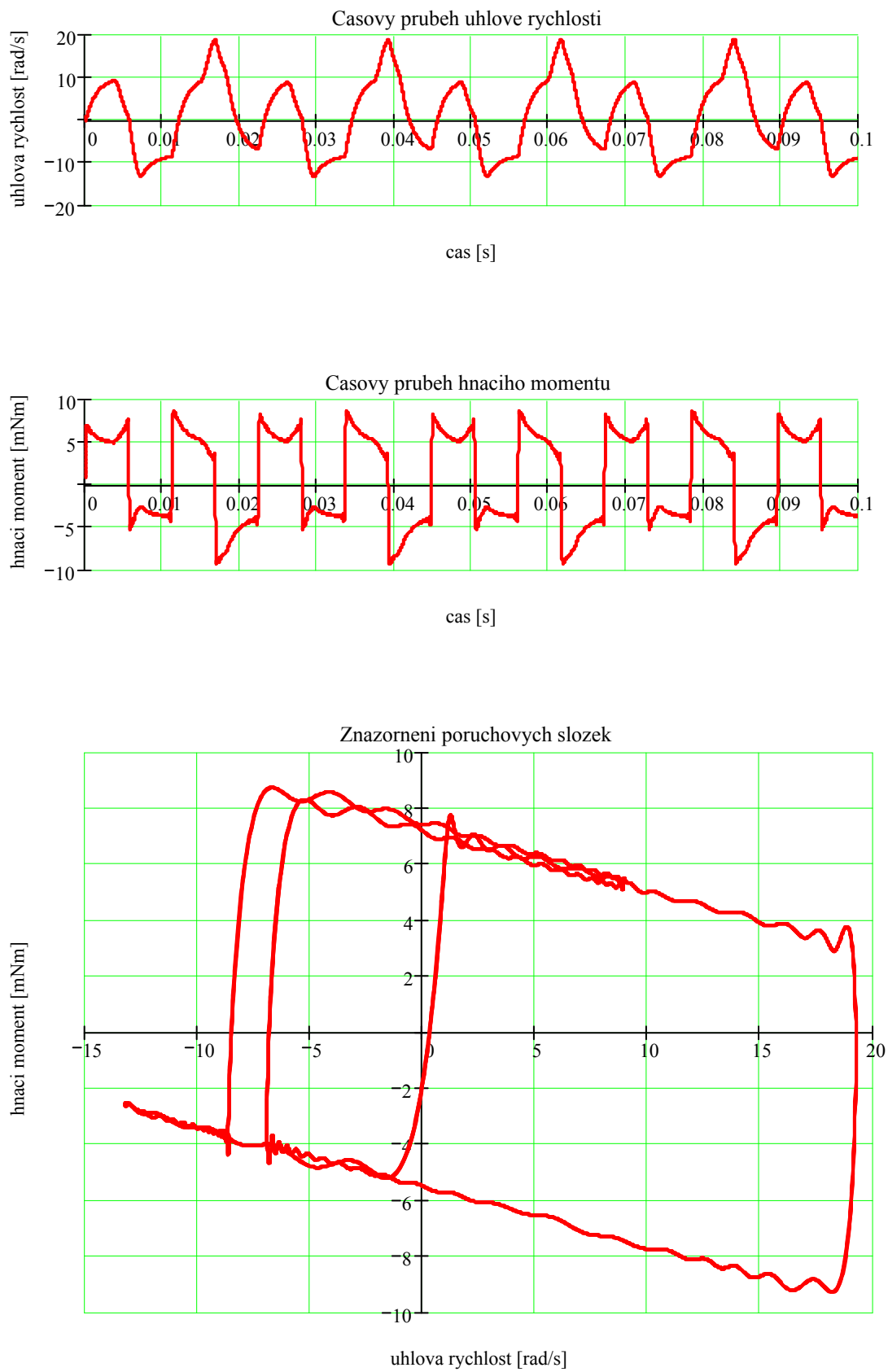
Obr.1. Odezva na jednocestně usměrněný sinusový signál.



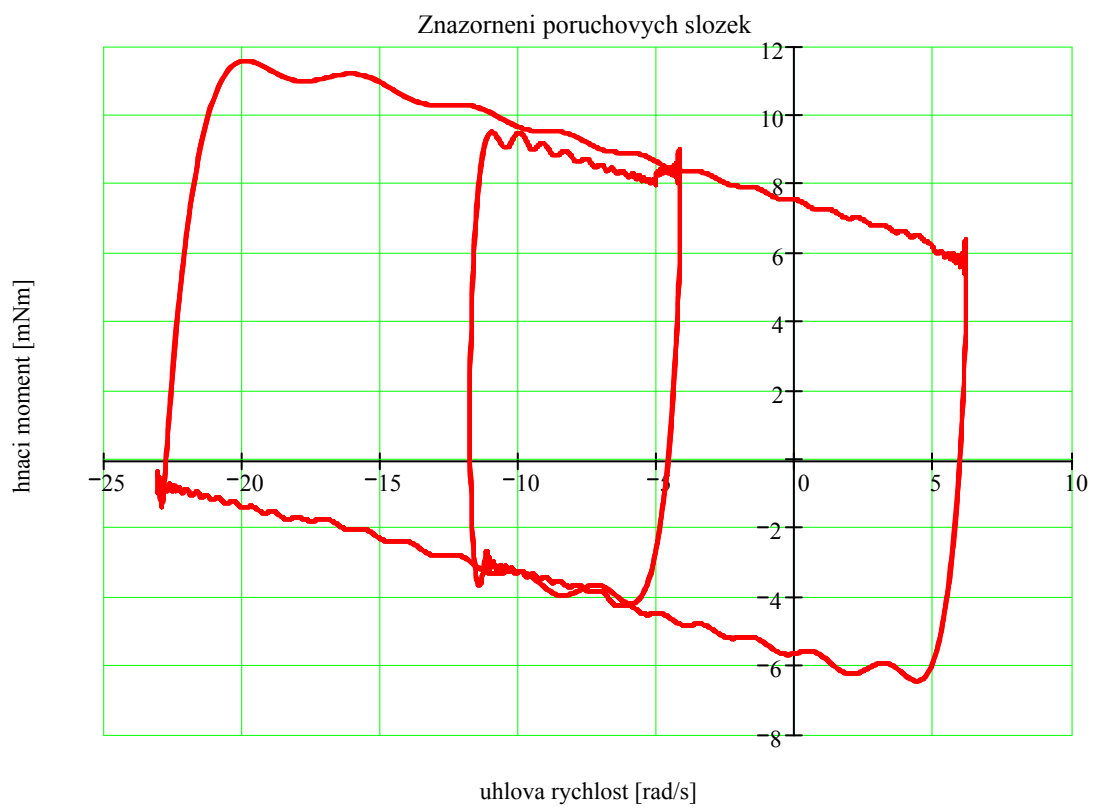
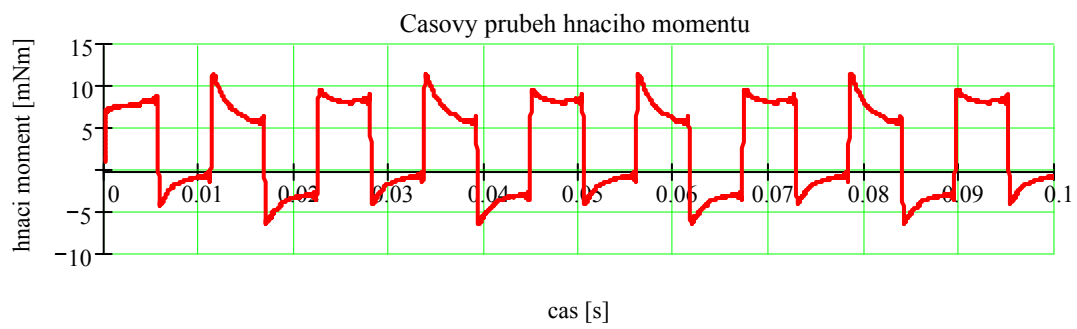
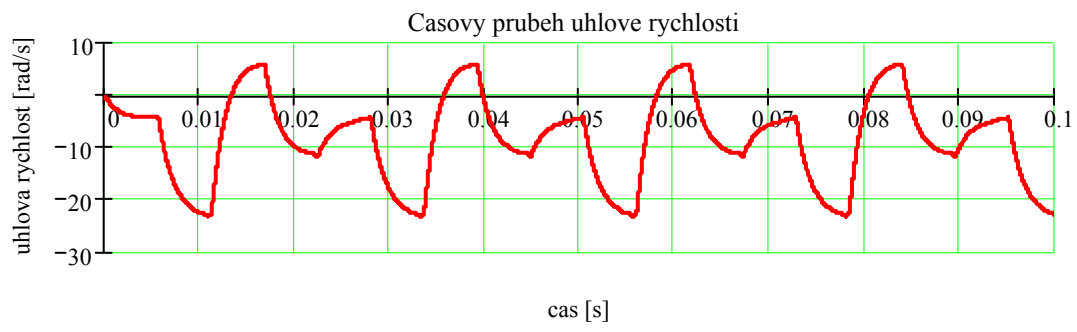
Obr.2. Odezva na dvojcestně usměrněný sinusový signál.



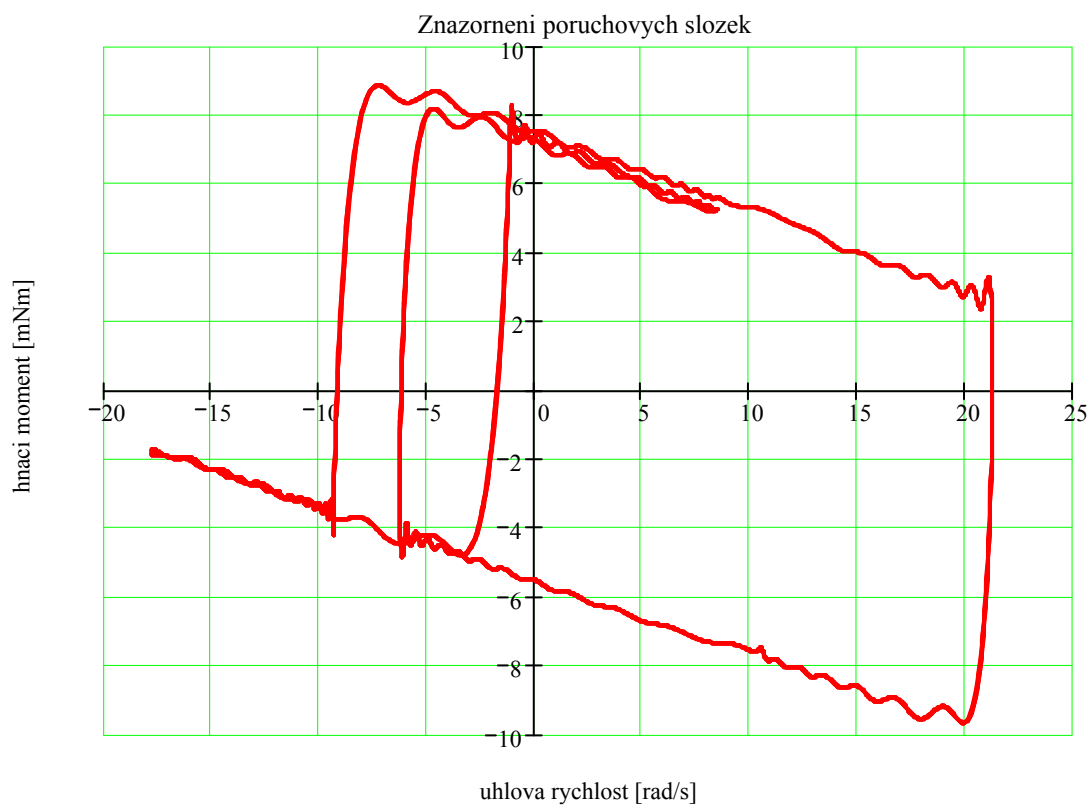
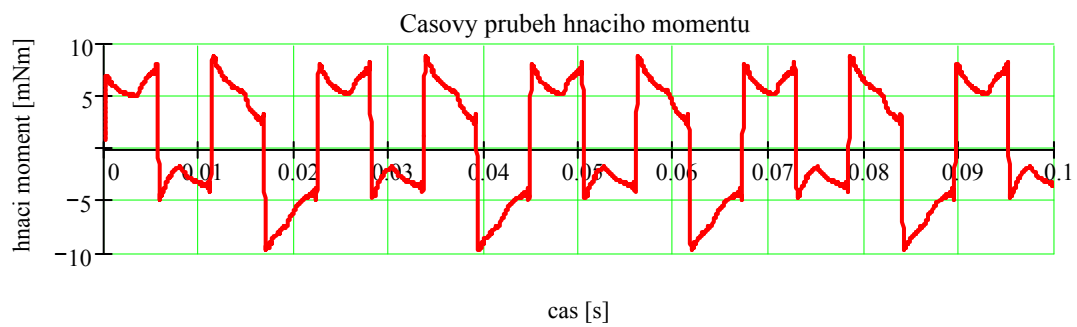
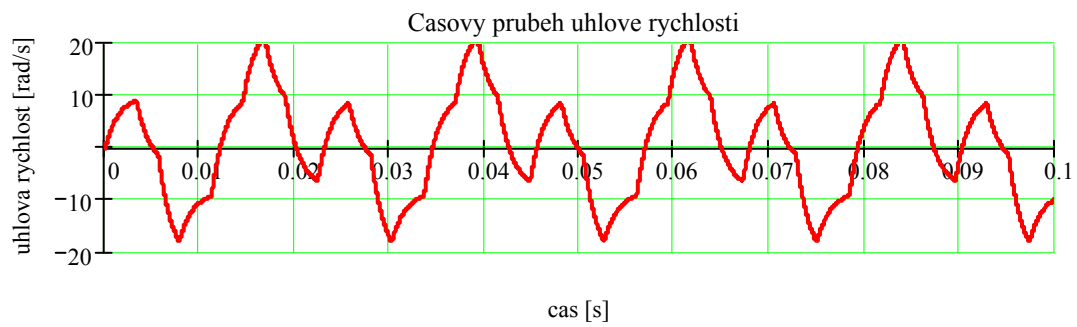
Obr.3. Odezva na lichoběžníkovou křivku.



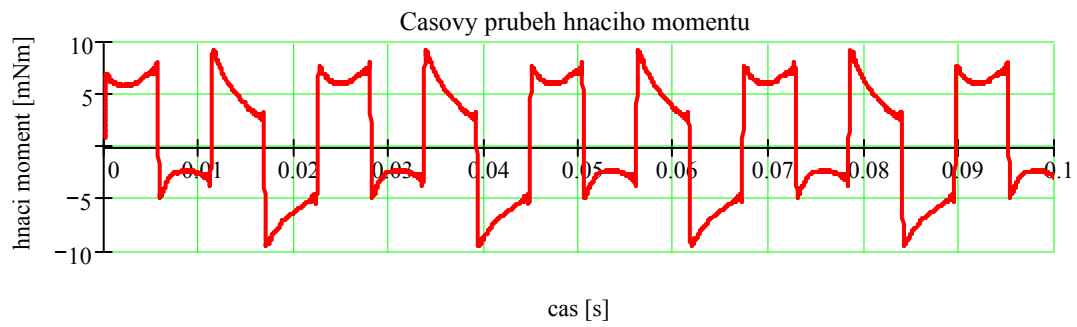
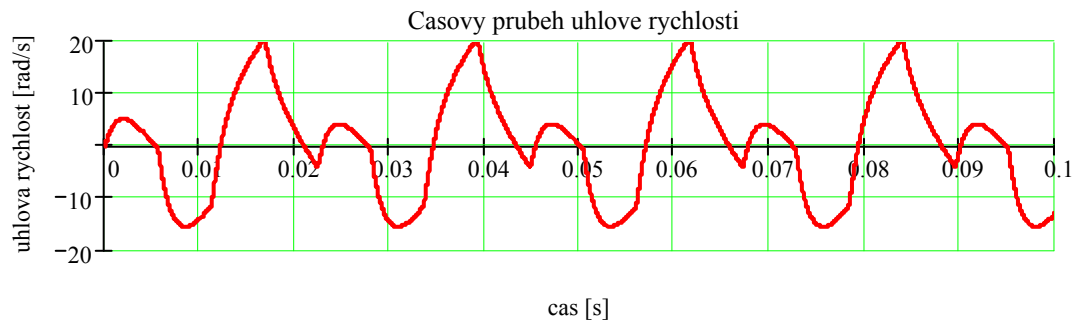
Obr.4. Odezva na lichoběžníkový impuls.



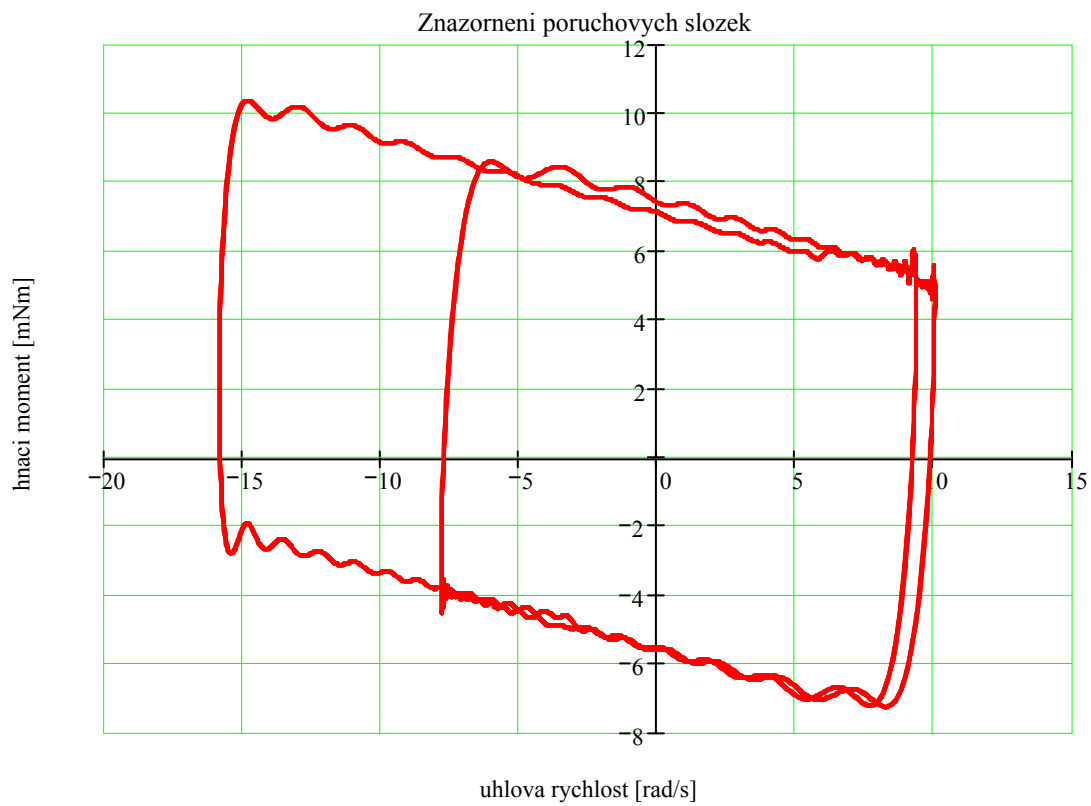
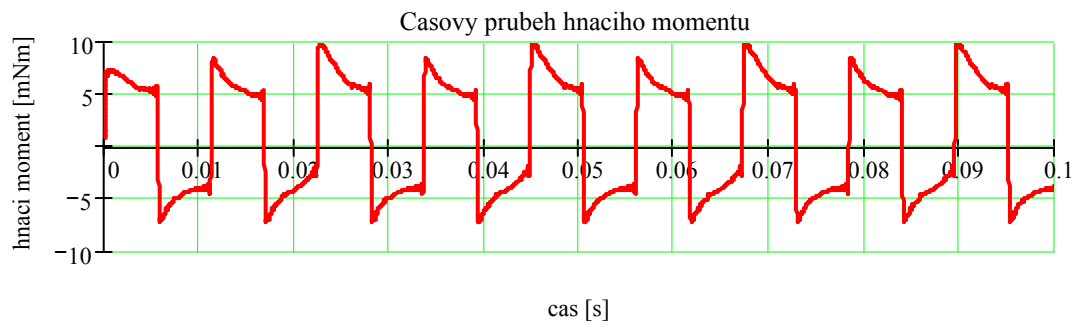
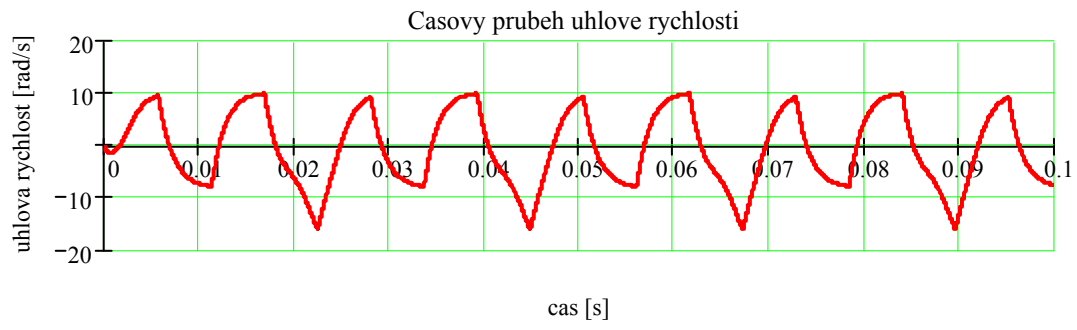
Obr.5. Odezva na obdélkovou křivku.



Obr.6. Odezva na obdélnikový impuls.



Obr.7. Odezva na trojúhelníkovou křivku.



Obr.8. Odezva na trojúhelníkový impuls.

6. Závěr

Ve svém příspěvku jsme se pokusili ukázat některé způsoby řešení problémů výpočtové analýzy dynamických soustav, především soustav pohonů. Řešené problémy byly ve většině případů interaktivní povahy, analyzované soustavy byly složeny z dílčích subsoustav různé fyzikální podstaty a navíc měly různě složité struktury. Vedle mechanických či elektrických základních struktur, tu byly řídicí subsoustavy elektronické, navíc různé úrovně, pomocné subsoustavy pak byly hydraulické nebo pneumatické. Současně se objevily i další komplikace např. zahrnutí vlivu oteplení vysokovýkonných elektromotorů na jejich charakteristiky. To vše nás vedlo k důslednému využití systémového přístupu při formulaci konkrétních problémů a k využívání izomorfních a homomorfních technik při sestavování účelových a částečně strukturovaných matematických modelů pohonových soustav, které byly posléze řešeny na více úrovních složitosti, resp. komplexnosti.

Takto vytvořené modely, zahrnující v mnoha případech i vlivy technologie pracovního procesu, vlivy okolního prostředí i vlivy nadřazeného řízení, obsahovaly řadu těžkostí a problémů. Ty vyplývají jednak z rozdílných vlastností dílčích strukturálních částí, jednak z naší neznalosti a nešikovnosti. Při výpočtech jsme postupně přešli od „klasických“ numerických integračních metod ke „stiff metodám“ a nakonec k programovým souborům Sadys, Dynast, Matlab+Simulink a v současné době zkoušíme MathCAD. Právě posledně jmenovaný programový soubor umožňuje získat velmi zajímavé výsledky, jak je patrné z příkladů uvedených v příspěvku. Tyto metody nám umožňují vypočítat nejen základní charakteristiky, jako jsou spektra vlastních frekvencí a tvarů vlastních kmitů, spektra vedlejších rezonancí nebo přenosové či impulzní funkce, ale umožňují řešit i tzv. „vnitřní“ dynamiku odezvoových procesů, především přechodové děje a sledovat jejich průběhy ve fázové rovině. Na základě těchto analýz pak lze velmi dobře sledovat i vlivy působení řídicích substruktur, včetně vlivů jednotlivých parametrů řízení, na průběhy přechodových procesů, například při řazení jednotlivých rychlostních stupňů u pohonů s proměnlivými převody, umožňují identifikaci špičkových hodnot zatěžujících momentů nebo deformací, umožňují detailně sledovat působení parazitních procesů na rovnoměrnost chodu, stabilitu řídicích účinků atd. To vše nám umožňuje modelovat dynamické vlastnosti pohonových soustav již ve stadiu jejich projektování a umožňuje provádět paralelně řady výpočtů a vybírat nejvhodnější – modelování „ve variantách“. Výsledkem pak je podstatné zrychlení vývojových prací.

Podrobnější poznatky o výše naznačených problémech lze pak nalézt v publikacích, zařazených na konci příspěvku v seznamu použité literatury.

7. Seznam použité literatury

- [1] Knudson, W.C.; Suria Kumar, G.V.: Explicit time integration operators for nonlinear structural dynamics. SFB 64, Universität Stuttgart, 51/1979.
- [2] Kratochvíl, C.; Kalous, J. a další: Některé problémy dynamiky řízených systémů pohonů. Závěrečná zpráva, SPZV č. 14-9/90, Brno, 1990.
- [3] Studénka, V.; Kratochvíl, C.; Havlíček, J.: Algoritmy diskrétního řešení diferenciálních rovnic s aplikací na číslicovou simulaci dynamických systémů. Výzkumná zpráva, SPZV č.III-4-1/0503, Brno, 1990.

- [4] Kratochvíl, C.: Computing analysis of dynamic properties of electromechanical drive systems. *Advanced in mechanics*, vol.14, No.1, p.p. 47-74, 1991.
- [5] Kratochvíl, C.: A contribution to the problem of dynamic analysis of electro-mechanical drive systems. *Mech. Mach. Theory*, Vol. 27, No.3, p.p. 343-348, Pergamon Press, 1992.
- [6] Kratochvíl, C.; Kotek, V.; Heriban, P.: Contribution to modeling and analysis of dynamic properties of gears. *Gearing and transmissions*, No.1, p.p. 15-23, 1994.
- [7] Kratochvíl, C.; Kotek, V.; Heriban, P.: Simulation of drive systems using multipole modeling. *Zeszyty naukowe Politechniki Slaskiej, Seria: Mechanika*, Z.121, p.p. 159-164, Gliwice, Poland, 1995.
- [8] Kolektiv autorů: *Mechatronics systems I*. Research report No. VS96122/I, FSI TU Brno, 1996.
- [9] Kalous, J.; Kratochvíl, C.: Computer-aided modeling of interference effects in electromechanical driving systems. *Proc. of the XII. conf. Computational mechanics '96*, TU Plzeň, Perning, 1996.
- [10] Kratochvíl, C.; Kotek, V. a další: Modelling and analysis of dynamic properties of drive systems with gears. *Proc. of the 1999 ASME Design engineering technical conferences*, september 1999, No. DETC 99/VI/B-8362, Las Vegas, Nevada, 1999.
- [11] Kratochvíl, C.; Kalous, J.; Kotek, V.: Contribution to mathematical modelling of drive parasitic vibrations. *Proc. of Colloquium Dynamic of Machines 2000*, IT ASCR Prague, p.p. 117-120, 2000.
- [12] Procházka, F.: Vliv dynamických charakteristik motorů na stabilitu rovnovážných stavů nelineárních pohonových soustav. In. *Sborník konference Interakce a zpětné vazby '99*, Praha, listopad 23-24, 1999, str.197-207.
- [13] Procházka, F.: Asymptotic stability of automatic regulation of dynamic systems. In. *Sborník konference Dynamika strojů 2002*, Praha, únor 5-6, str.153.
- [14] Procházka, F.: Diagram řešení-větvení rovnovážných stavů v bifurkačních bodech a jejich klasifikace. *Inženýrská mechanika*, ročník 8, č. 3, 2001.
- [15] Procházka, F.: Hopfova bifurkace rovnovážných stavů pohonových soustav. In. *Sborník konference Inženýrská mechanika 2002*, Svratka, květen 13-16, str.241.
- [17] Procházka, F.: Použití věty o centrální varietě k vyšetřování rovnovážných stavů nelineárních dynamických soustav. *Inženýrská mechanika*, ročník 8, č. 4, 2001.
- [18] Procházka, F.: Stabilita a bifurkace rovnovážných stavů nelineárních dynamických systémů. *Disertační práce*. VUT FSI Brno, 2002.
- [20] Procházka, F.; Kratochvíl, C.: Úvod do matematického modelování pohonových soustav. *Monografie*. CERM, 2002. ISBN 80-7204-256-4.

Poděkování : Práce, na jejichž základě byl vypracován tento příspěvek, byly podpořeny Výzkumným záměrem MŠMT č. MSM 262100024.