

## RELIABILITY ANALYSIS USING MONTE CARLO SIMULATION AND BOUNDED HISTOGRAMS OF INPUT RANDOM VARIABLES

L. Václavek\*, P. Marek\*\*

**Summary:** *The subject of the paper is the probabilistic safety assessment of an unbraced steel frame containing leaning columns and exposed to several variable loads. Reliability analysis is based on the SBRA method, where direct Monte Carlo simulation technique and bounded histograms of input random variables are employed. The effect of various kinds of geometrical imperfections and variability of material properties are taken into consideration*

### 1. Úvod

Pravděpodobnost poruchy konstrukce či prvku je obecně ovlivňována náhodnými, statisticky nezávislými i závislými veličinami. Je-li odolnost např. konstrukce vyjádřena proměnnou  $R$ , účinek zatížení proměnnou  $S$ , pak není splněna podmínka spolehlivosti, je-li

$$Z = R - S = g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0, \quad (1)$$

kde  $Z$  je rezerva spolehlivosti,  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  je funkční závislost, která představuje výpočtový model a  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jsou náhodně proměnné vstupní veličiny. Při použití přímé simulace Monte Carlo je výše uvedená rovnice opakovaně řešena pro náhodně generované vstupní veličiny a pravděpodobnost poruchy potom vyjádřena jako poměr počtu simulací kdy  $Z < 0$  k celkovému počtu simulací. Vzhledem k tomu, že je nutno provést velký počet simulací, je uvedený postup umožněn až rozvojem výpočetní techniky v posledních letech.

V tomto příspěvku je postup demonstrován na příkladě ocelové konstrukce, s použitím metody SiBRA (Marek et al., 1995, 2001). Pozornost je věnována základním předpokladům a procesu pravděpodobnostního posudku.

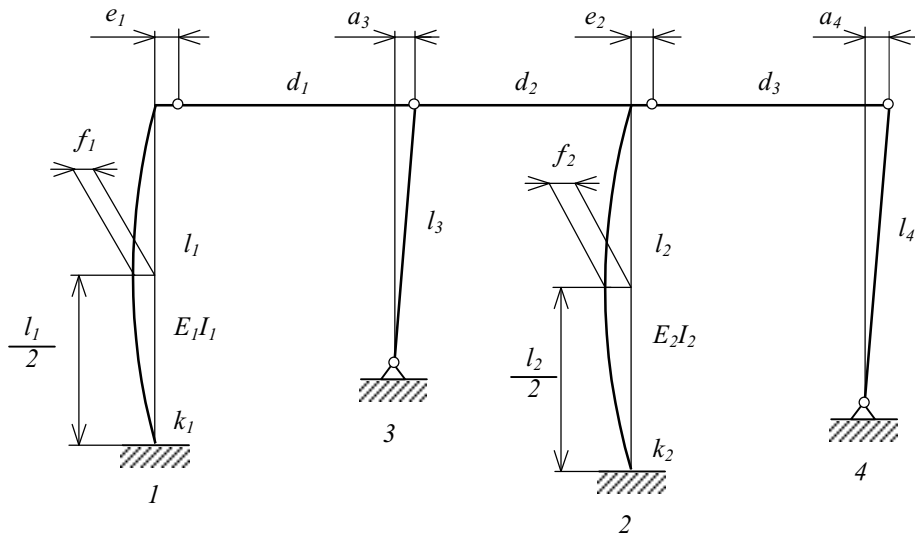
### 2. Ocelová konstrukce s vetknutými a opřenými sloupy

Rovinná konstrukce na obr.1 má dva vetknuté sloupy (jsou označeny 1,2) a dva připojené kyvné sloupy (označené 3,4), spojené nahoře kloubově třemi příčníky. Vetknuté sloupy o délkách  $l_1, l_2$  mají konstantní ohybové tuhosti  $E_1 I_1, E_2 I_2$ . Délky opřených (kyvných) sloupů

\*Ing. Leo Václavek, CSc., VŠB-Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti; 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: +420.597 324 555, fax: +420.596 916 490; e-mail: [leo.vaclavek@vsb.cz](mailto:leo.vaclavek@vsb.cz)

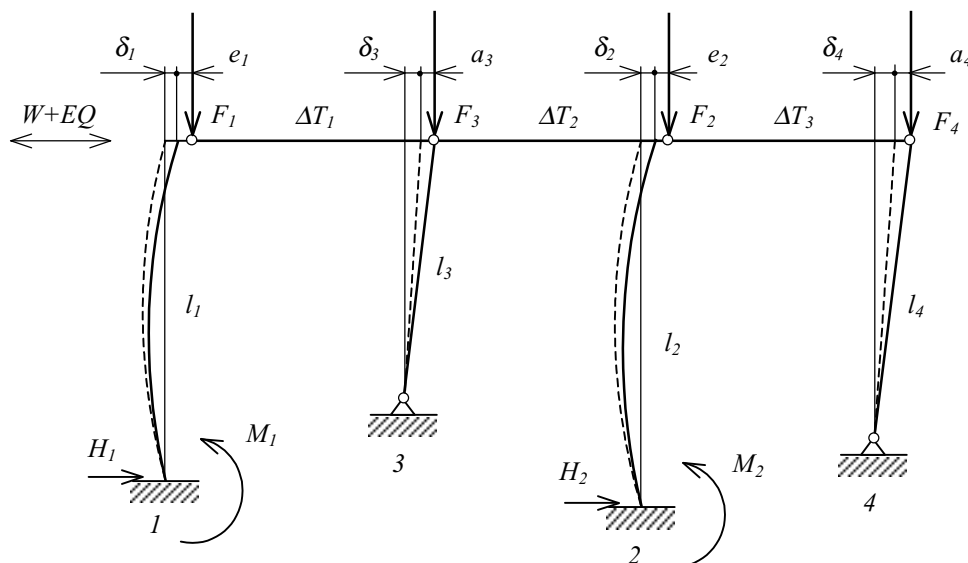
\*\* Prof. Ing. Pavel Marek, DrSc., Ústav teoretické a aplikované mechaniky AVČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9, tel. +420.283 882 462, e-mail: [marekp@itam.cas.cz](mailto:marekp@itam.cas.cz)

jsou  $l_3, l_4$  a délky příčníků  $d_1, d_2, d_3$ . Smontovaná nezatížená konstrukce vykazuje odchylky od geometricky ideálního tvaru. U vetknutých sloupů 1,2 to jsou počáteční zakřivení os sloupů, která jsou charakterizována výpočtovými hodnotami počátečních výchylek  $f_1, f_2$ , a excentricity  $e_1, e_2$  působících svislých zatížení. Imperfekce připojených kyvných sloupů (např. odchylky



Obrázek 1 Nezatížená konstrukce

svislosti, odchylky v uložení, excentricity v přípojích) jsou zahrnuty v odchylkách  $a_3, a_4$  horních kloubů sloupů (a rovněž působí vertikálních sil) od svislice vedené spodním uložení (kloubem), jak je vyznačeno v obr.1. Výše zmíněné odchylky a imperfekce jsou svojí podstatou náhodné veličiny a vykazují větší či menší proměnlivost. O modelování imperfekcí viz též např. (Teplý et al., 2002).



Obrázek 2: Zatížená konstrukce

Vetknutí sloupů 1, 2 jsou pokládána za flexibilní s tím, že platí lineární relace, zprostředkovaná koeficienty  $k_1, k_2$ , mezi momenty  $M_1, M_2$  zachycenými ve vetknutích sloupů a odpovídajícími natočenými vetknutých průřezů. Analýzou ocelových rámců z hlediska využití pracovního diagramu styčníků se zabývá např. Wald (2001). Klouby kyvných sloupů 3, 4 a klouby na horních koncích vetknutých sloupů 1, 2 momenty nezachycují.

Zatížení a přetvořený tvar konstrukce jsou vyznačeny na obr. 2. Na konstrukci působí vertikální síly  $F_1, F_2, F_3, F_4$  a horizontální síly  $W, EQ$ . Teplotní rozdíly jednotlivých příčníků vzhledem k montážní teplotě jsou  $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3$ .

### 3. Transformační model

Transformační model umožňuje vypočítat napěťovou a deformační odezvu konstrukce na vnější silové a teplotní zatížení. Pro potřeby této studie byl na základě teorie II.řádu (je respektován vliv posunů a pootočení na velikost silových veličin, zůstáváme v mezích lineární elasticity) sestaven model analytický. Byl vytvořen za předpokladu, že nedojde k vybočení prutů konstrukce z roviny zatížení. Dále se předpokládá dostatečně povolné narůstání vnějších silových účinků, a v důsledku toho i napětí a deformací, takže je možné zanedbat dynamické účinky. Případnou interakci mezi vzpěrem tenkostěnného tlačného prutu a lokálním boulením jeho stěn výpočtový model nezahrnuje. Rovněž není přímo zahrnut vliv možných zbytkových napětí na únosnost konstrukce. Vliv posouvající síly na deformaci sloupů je zanedbán. Podrobnosti k odvození transformačního modelu podobné konstrukce lze nalézt v příspěvku Václavek & Marek (2002) Pro horizontální přemístění  $\delta_1$  a  $\delta_2$  horních konců vetknutých sloupů 1 a 2 vyjde

$$\delta_1 = \frac{W + EQ + \sum_3^4 F_i \frac{a_i}{l_i} + \sum_1^2 \frac{F_i Z_i}{G_i l_i} + T}{\frac{F_1}{G_1 l_1} + \frac{F_2}{G_2 l_2} - \sum_3^4 \frac{F_i}{l_i}}, \quad (2)$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \sum_1^2 d_i \alpha_i \Delta T_i, \quad (3)$$

kde

$$T = \frac{F_3}{l_3} d_1 \alpha_1 \Delta T_1 - \frac{F_2}{G_2 l_2} \sum_1^2 d_i \alpha_i \Delta T_i + \frac{F_4}{l_4} \sum_1^3 d_i \alpha_i \Delta T_i, \quad (4)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  jsou součinitelé délkové tepelné roztažnosti materiálu příčníků. Další použitá označení jsou

$$G_j = \frac{tg(\omega_j l_j)}{P_j \omega_j l_j} - 1, \quad P_j = \left( 1 - \frac{F_j l_j}{k_j} \frac{tg(\omega_j l_j)}{\omega_j l_j} \right), \quad (5),(6)$$

$$Z_j = \left( \frac{1}{P_j \cos(\omega_j l_j)} - 1 \right) e_j + \frac{\pi}{\left( \frac{\pi}{\omega_j l_j} \right)^2 - 1} (G_j + 1) f_j, \quad (7)$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{F_j}{E_j I_j}}, \quad j=1,2. \quad (8)$$

Pro horizontální síly  $H_j$  a ohybové momenty  $M_j$  přenášené vetknutými sloupy 1,2 vyjde

$$H_j = \frac{\delta_j - Z_j}{G_j l_j} F_j, \quad M_j = F_j \left[ \delta_j \left( 1 + \frac{1}{G_j} \right) - \frac{Z_j}{G_j} + e_j \right], \quad j=1,2. \quad (9),(10)$$

#### 4. Vstupní hodnoty

Každá z vertikálních sil  $F_1, F_2, F_3, F_4$  je součtem stálého, dlouhodobého nahodilého a krátkodobého nahodilého zatížení. Extrémní hodnoty těchto zatížení jsou uvedeny v tabulce 1. Maximální velikost horizontální síly reprezentující účinek větru je  $W = 50 \text{ kN}$ . Horizontální síla  $EQ$  představuje účinek zemětřesení na konstrukci. Je odvozena od velikosti svislých sil působících na konstrukci v okamžiku zemětřesení. V této studii je použito  $EQ = 0.04 \sum F_i$ .

Tabulka 1 Extrémní hodnoty vertikálních sil

Síla	Extrémní amplitudy zatížení [kN]			Součet [kN]
	Stálé zatížení	Dlouhodobé nahodilé	Krátkodobé nahodilé	
$F_1$	200	50	50	300
$F_2$	400	150	150	700
$F_3$	200	100	200	500
$F_4$	100	100	100	300

Délky sloupů  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , mezní počáteční výchylky  $f_1, f_2$  zakřivených sloupů, krajní hodnoty excentricit  $e_1, e_2$  vertikálních sil  $F_1, F_2$  a imperfekcí  $a_3, a_4$  připojených kyvných sloupů jsou uvedeny v tabulce 2. Délky příčníků jsou  $d_1 = d_2 = d_3 = 10 \text{ m}$ .

Vetknutý sloup 1 je zhotoven z válcovaného profilu HE 280 B, sloup 2 z profilu HE 340 B. Nominální hodnoty průřezových charakteristik těchto profilů jsou: plocha průřezu  $A_1 = 1.31 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 1.71 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ; průřezový modul  $S_1 = 1.38 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ,  $S_2 = 2.16 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ; moment setrvačnosti k neutrální ose  $I_1 = 1.93 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $I_2 = 3.67 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ .

Poddajnost vetknutí sloupu 1 charakterizuje nominální hodnota koeficientu  $k_1 = 8 \times 10^7 \text{ Nm/rad}$ , vetknutí sloupu 2  $k_2 = 1.5 \times 10^8 \text{ Nm/rad}$ . Číselné hodnoty koeficientů  $k_1, k_2$  použité v této studii byly odhadnuty na základě srovnání s údaji v knize Haldar & Mahadevan

(2000). Nominální hodnota modulu pružnosti v tahu materiálu obou vetknutých sloupů je  $E_1 = E_2 = 2.1 \times 10^5 \text{ Mpa}$ .

Tabulka 2 Délky sloupů, extrémní hodnoty počátečních výchylek, excentricit a imperfekcí

Sloup číslo	Délka sloupu [m]		Zakřivení, počáteční výchylka [mm]		Excentricita síly [mm]		Imperfekce [mm]	
1	$l_1$	6	$f_1$	$\pm 20$	$e_1$	$\pm 30$		
2	$l_2$	7.6	$f_2$	$\pm 25$	$e_2$	$\pm 38$		
3	$l_3$	5.4					$a_3$	$\pm 27$
4	$l_4$	6					$a_4$	$\pm 30$

Rozsah teplotního rozdílu provozní teploty příčníků vzhledem k teplotě při montáži je  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T = (-20, +40^\circ\text{C})$ . Součinitel tepelné roztažnosti materiálu všech tří příčníků je  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

V tabulce 3 jsou uvedeny vstupní náhodné proměnné (celkem 30) a k nim jsou přiřazeny omezené bezrozměrné histogramy. Hodnota každé proměnné, která vstupuje v konkrétním simulačním kroku do výpočtu (při opakovaném řešení rovnice (1)), se vypočte jako součin její nominální hodnoty a náhodně proměnné, reprezentované odpovídajícím ohraničeným histogramem. S výjimkou zatížení  $EQ$  jsou vstupní náhodné veličiny vzájemně nezávislé. Zatížení  $EQ$  závisí na velikosti vertikálního zatížení konstrukce v okamžiku zeměřesení.

Tabulka 3 Přiřazení náhodných vstupních veličin a useknutých bezrozměrných histogramů

Náhodná vstupní proměnná (označení, charakteristika)		Histogram (Marek,..)	Náhodná vstupní proměnná (označení, charakteristika)		Histogram (Marek,..)
$F_1$	stálé zatížení	<b>Dead1</b>	$f_1$	zakřivení, sloup 1	<b>Normal5</b>
	dlouhodobé nahodilé zatíž.	<b>Long2</b>	$f_2$	zakřivení, sloup 2	<b>Normal5</b>
	krátkodobé nahodilé zatíž.	<b>Short2</b>	$e_1$	excentricita, sloup 1	<b>Normal5</b>
$F_2$	stálé zatížení	<b>Dead1</b>	$e_2$	excentricita, sloup 2	<b>Normal5</b>
	dlouhodobé nahodilé zatíž.	<b>Long2</b>	$a_3$	imperfekce, sloup 3	<b>Normal5</b>
	krátkodobé nahodilé zatíž.	<b>Short2</b>	$a_4$	imperfekce, sloup 4	<b>Normal5</b>
$F_3$	stálé zatížení	<b>Dead1</b>	$A_1$	průřez, sloup 1	<b>N1-04</b>
	dlouhodobé nahodilé zatíž.	<b>Long2</b>	$S_1$	modul průřezu, sloup 1	<b>N1-08</b>
	krátkodobé nahodilé zatíž.	<b>Short2</b>	$I_1$	mom.setrv., sloup 1	<b>N1-08</b>
$F_4$	stálé zatížení	<b>Dead1</b>	$I_2$	mom.setrv., sloup 2	<b>N1-08</b>
	dlouhodobé nahodilé zatíž.	<b>Long2</b>	$E_1$	Young, modul, sloup 1	<b>N1-15</b>
	krátkodobé nahodilé zatíž.	<b>Short2</b>	$E_2$	Young, modul, sloup 2	<b>N1-15</b>
$W$	zatížení větrem	<b>Wind1</b>	$k_1$	poddajn.vetkn., sloup 1	<b>N1-20</b>
$EQ$	zatížení zeměřesením	<b>Earth65</b>	$k_2$	poddajn.vetkn., sloup 2	<b>N1-20</b>
$\Delta T$	teplotní rozdíl	<b>Gamma08</b>	$FY$	mez kluzu, sloup 1	<b>A36-m</b>

## 5. Posudek pravděpodobnosti poruchy

Při stanovení pravděpodobnosti poruchy je aplikována metoda SBRA. Pomocí přímé simulace metodou Monte Carlo je programem M-Star™ (viz Marek et al., 1995, 2001) vyhodnocena funkce spolehlivosti (1) (vzhledem k referenční hodnotě únosnosti resp. použitelnosti konstrukce) a stanovena pravděpodobnost překročení referenční úrovně.

### 5.1 Posudek únosnosti

Únosnost konstrukce je posouzena vzhledem k vyčerpání pružné oblasti působení kritického (vetknutého) průřezu sloupu  $I$  (kratší z obou vetknutých sloupů). Programem M-Star™ je za použití analytického transformačního modelu (tj. rovnic (2),...(10)) analyzována funkce spolehlivosti  $SF = R-Q$ , kde  $R$  je hodnota meze kluzu  $FY$ , odpovídající vlastnostem materiálu sloupu  $I$ , daná histogramem A36-m (viz Marek et al., 1995, 2001) a  $Q$  je extrémní napětí ve vetknutí od ohybového momentu a normálové síly. Vypočtené hodnoty pravděpodobnosti poruchy  $P_f$  (překročení meze kluzu v krajním vlákně vetknutého průřezu) jsou

$$P_f = 0.000014 \quad \text{obvyklá úroveň spolehlivosti,}$$

$$P_f = < 1 \times 10^{-7} \quad \text{zvýšená úroveň spolehlivosti, nebyl uvažován vliv zemětřesení.}$$

Počet simulačních kroků byl v obou případech 2000000.

### 5.2 Posudek použitelnosti

Použitelnost konstrukce je vztažena k hodnotě  $\delta_{tol} = 40\text{mm}$  vodorovného přemístění horního konce sloupu  $I$ . Programem M-Star™ je analyzována funkce použitelnosti  $SF = \delta_{tol} - \delta$ . Vypočtené hodnoty pravděpodobnosti poruchy  $P_f$  (překročení přípustného přemístění) jsou

$$P_f = 0.633 \quad \text{překročena snižená úroveň spolehlivosti,}$$

$$P_f = 0.050 \quad \text{obvyklá úroveň spolehlivosti, nebyl uvažován vliv zemětřesení.}$$

Počet simulačních kroků byl v obou případech 500000.

## 6. Závěr

Pravděpodobnostní posudek metodou SBRA dovoluje určit výslednou pravděpodobnost poruchy při respektování značně různorodých náhodně proměnných veličin (na straně odolnosti i na straně účinků zatížení) ovlivňujících výslednou pravděpodobnost  $P_f$ . Navržený postup dovoluje sledovat vliv jednotlivých náhodných veličin na spolehlivost konstrukce a vytváří předpoklady k podrobnější citlivostní analýze.

Spolehlivost je z hlediska bezpečnosti a použitelnosti vyjádřena porovnáním výsledných pravděpodobností poruchy  $P_f$  s návrhovými pravděpodobnostmi  $P_d$ , uvedenými v normě ČSN 73 1401-1998 (Příloha A).

## 7. Poděkování

Príspevek byl vypracován s podporou Grantové agentury České republiky, viz projekty GAČR 103/01/1410 a 105/01/0783.

## 8. Literatura

- Haldar, A. & Mahadevan, S. (2000) *Reliability Assessment using Stochastic Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Marek, P., Guštar, M. & Anagnos, T. (1995) *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*. CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida.
- Marek, P., Brozetti, J. & Guštar, M. (2001) *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Background, Exercises and Software*. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague
- Václavek, L. & Marek, P. (2002) SBRA-Based Reliability Assessment of an Unbraced Frame with Leaning Columns. *Engineering Mechanics*, Vol.9, No.6, pp. 393-406
- Teplý, B., Kala, J., Kala, Z. & Škaloud, M. (2002) Soudobé možnosti analýzy tenkostěnných ocelových prvků. *Časopis Konstrukce*, 5/2002, str.20-23.
- Wald, F. (2001) Analýza konstrukce s polotuhými styčníky. *Ocelové konstrukce*, 1/2001, str.46-49.