

OPTIMISATION OF THE PARAMETERS AT THE PASSAGE OF THE ROTOR THROUGH CRITICAL SPEED BY MEANS OF PROPER TUNING.**I. Ballo*, R. Chmúrny***

Summary: The contribution deals with a mathematical model of bending vibrations of a slender flexible rotor, excited by unbalance when passing the critical speed by means of its proper tuning. The maximal amplitude of bending vibrations at the passage depends on several parameters. The analysis of the mathematical model revealed a way of parameters selection to obtain minimal amplitude during the passage. The mathematical model of rotor vibrations is presented in an abridged manner only, because this problem was already discussed in detail on the "Inženýrská mechanika 2003" Conference.

1. Úvod

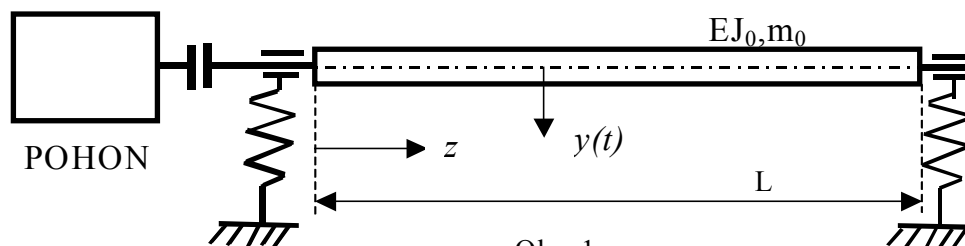
Predmetom príspevku je ohybové kmitanie pružného, pružne uloženého rotora o kruhovom priereze, konštantnom po celej dĺžke (obr. 1.) pri prechode cez kritické otáčky. Predpokladá sa pri tom, že pre obmedzenie výchylky rotora sa nevyužije prechod cez kritické otáčky pomocou dnes zväčša používanej zvýšenej rýchlosti prechodu, ale pomocou prelaďovania, t.j. zmeny vlastnej frekvencie ohybového kmitania tesne pred dosiahnutím kritických otáčok. Výhodou je, že takýto prechod možno uskutočniť pri výrazne nižšej zásobe výkonu poháňajúceho stroja, ako pri dnes používanom spôsobe.

Príspevok tesne nadväzuje na prezentáciu, prednesenú na konferencii "Inženýrská Mechanika 2003". Používa ten istý matematický model, ktorý je doplnený v časti, popisujúcej spôsob prelaďovania tesne pred dosiahnutím kritických otáčok. Podrobnejším prieskumom dejov pri prelaďovaní sa totiž ukázalo, že maximálna amplitúda ohybového kmitania závisí nielen na rýchlosti prelaďovania, ale aj na čase začiatku a konca prelaďovania. Podrobnejší popis týchto závislostí je ťažiskom tohto príspevku.

Ako sme spomenuli, matematický aparát, použitý v tejto práci, sme podrobne vyložili v príspevku na konferencii "Inženýrská mechanika 2003". Napriek tomu v tomto príspevku zopakujeme hlavné časti použitého matematického aparátu tak, aby príspevok bol v zásade prístupný aj čitateľovi, ktorý nie je oboznámený s prácou, prednesenou na spomínanej konferencii.

* Prof. Ing. Igor Ballo, DrSc., Ing. Rudolf Chmúrny, CSc., Ústav materiálov a mechaniky strojov SAV, Račianska 75, 831 02 Bratislava 3, Slovenská republika. Telefón: +421-2-59309410, +421-2-59309414. E-mail: ummsibal@savba.sk, ummschmu@savba.sk

2. Matematický model rotora



Obr. 1

Ohybové kmitanie pružného rotora, znázorneného na obr. č. 1., možno popísať maticovými rovnicami, odvodenými v práci [1], citovanej na konci príspevku:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_K + \mathbf{K}_X)\mathbf{x} = \varepsilon\Psi_X \quad (1a)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K}_K + \mathbf{K}_Y)\mathbf{y} = \varepsilon\Psi_Y \quad (1b)$$

V rovniciach (1) je \mathbf{M} štvorcová matica hmotnosti, tvaru:

$$\mathbf{M} = m_0[(X_i, X_j)] \quad (i,j=01,02,1,2,\dots,n) \quad (2a)$$

kde m_0 je intenzita hmotnosti rotora o konštantnom kruhovom priereze po celej dĺžke a $X_i(z)$ sú súradné funkcie dĺžkovej premennej z , popísané v cit. literatúre. Okrúhle zátvorky značia skalárny súčin súradných funkcií.

Matica \mathbf{K}_K je štvorcová matica, popisujúca ohybovú tuhosť samotného rotora. Jej štruktúra je:

$$\mathbf{K}_K = EJ_0[(X_i'', X_j'')] \quad (i,j=01,02,1,2,\dots,n) \quad (2b)$$

kde EJ_0 je intenzita ohybovej tuhosti rotora a X_i'' sú druhé derivácie súradných funkcií podľa premennej z .

Matice $\mathbf{K}_X, \mathbf{K}_Y$ sú štvorcové matice, popisujúce lineárne časti tuhosti podoprení koncov rotora v smere x a y . Majú tvar:

$$\mathbf{K}_X = M_1\lambda_1^2 \begin{bmatrix} \gamma_{0x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \gamma_{Lx} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_Y = M_1\lambda_1^2 \begin{bmatrix} \gamma_{0y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \gamma_{Ly} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix} \quad (2c,d)$$

kde γ_{0x}, γ_{0y} sú pomerné bezrozmerné lineárne časti tuhostí podoprení ľavého konca rotora v oboch kolmých smeroch, zatiaľčo γ_{Lx}, γ_{Ly} sú analogické tuhosti podoprení pravého konca rotora. Súvis s rozmerovými lineárnymi tuhosťami α_{ij} a bezrozmernými je evidentný: $\alpha_{ij} = M_1\lambda_1^2 \cdot \gamma_{ij}$. V tomto vzťahu značí λ_1 prvú vlastnú frekvenciu proste podopreného nosníka a M_1 modálnu hmotnosť, prislúchajúcu k λ_1 .

Zložky vektorov \mathbf{x}, \mathbf{y} sú premenné funkcie v čase, ktoré stoja v predpokladaných riešeniach pri súradných funkciách v oboch kolmých smeroch.

Vektory $\varepsilon\Psi_X, \varepsilon\Psi_Y$ obsahujú nelineárne zložky tuhostí podoprení na oboch koncoch rotora v oboch kolmých smeroch (F_{xN}, F_{yN}), ďalej členy, reprezentujúce vonkajšie lineárne tlmenie ohybového kmitania rotora v oboch kolmých smeroch ($\frac{b}{m_0} M \dot{x} + \frac{b}{m_0} M \dot{y}$) a budiace členy, zapríčinené nevyváženosťou rotora ($C \cos \varphi, S \sin \varphi$). Všetky tieto členy pokladáme za malé, čo vyjadruje t.zv. malý parameter ε . Ich konkrétny tvar je nasledujúci:

$$\varepsilon\Psi_X = -F_{xN} + \dot{\varphi}^2 (C \cos \varphi - S \sin \varphi) + \dot{\varphi} (S \cos \varphi + C \sin \varphi) - \frac{b}{m_0} M \dot{x} \quad (2e)$$

$$\varepsilon\Psi_Y = -F_{yN} + \dot{\varphi}^2 (S \cos \varphi + C \sin \varphi) + \dot{\varphi} (-C \cos \varphi + S \sin \varphi) - \frac{b}{m_0} M \dot{y} + G \quad (2f)$$

V predošlých rovniciach značí:

φ - pootočenie rotora okolo osi z

b - súčiniteľ lineárneho tlmenia

C, S - vektory, ktorých zložkami sú skalárne súčiny funkcií premennej z , vyjadrujúcej nevyváženosť rotora v oboch kolmých smeroch a súradných funkcií.

Sústavu rovníc (1) sme riešili pomocou teórie malého parametra [2]. Vychádzali sme z predpokladu, že v nerozrušenej sústave (t.j. pre $\varepsilon = 0$) nie sú splnené podmienky pre vznik vnútornej rezonancie, čo umožňuje použiť jednofrekvenčné riešenie úplnej sústavy. Toto riešenie sme zostrojili pre okolie 1. vlastnej uhlovej frekvencie nerozrušenej sústavy v oboch kolmých smeroch ω_{1x}, ω_{1y} a má tvar:

$$x(t) = w_{1x} a_R \cdot \cos \psi_R \quad (3a)$$

$$y(t) = w_{1y} a_I \cdot \sin \psi_I \quad (3b)$$

$$\psi_R = \omega \cdot t + \mathcal{G}_R \quad \psi_I = \omega \cdot t + \mathcal{G}_I \quad (3c,d)$$

kde w_{1x}, w_{1y} sú vlastné vektory, prislúchajúce k vlastným uhlovým frekvenciám ω_{1x}, ω_{1y} .

$a_R, a_I, \mathcal{G}_R, \mathcal{G}_I$ sú v nerozrušenej sústave integračné konštanty, v úplnej sústave sú to nové premenné času. Takto rovnice (3) možno pokladať za transformačné rovnice k novým premenným $a_R, a_I, \mathcal{G}_R, \mathcal{G}_I$. Pripojíme k nim ďalšie dve:

$$\dot{x}(t) = -w_{1x} a_R \cdot \omega_{1x} \cdot \sin \psi_R \quad (4a)$$

$$\dot{y}(t) = +w_{1y} a_I \cdot \omega_{1y} \cdot \cos \psi_I \quad (4b)$$

Dosadením rovníc (3) a (4) do (1), dostaneme sústavu rovníc pre nové premenné času $a_R, a_I, \mathcal{G}_R, \mathcal{G}_I$:

$$-\dot{\mathcal{G}}_R = \frac{1}{M_{1x} \omega_{1x}} w_{1x}^T \cdot \varepsilon\Psi_X \cdot \sin \psi_R \quad (5a)$$

$$+\dot{\mathcal{G}}_I = \frac{1}{M_{1y} \omega_{1y}} w_{1y}^T \cdot \varepsilon\Psi_Y \cdot \cos \psi_I \quad (5b)$$

$$-a_R \cdot \dot{\mathcal{G}}_R = a_R (\omega - \omega_{1x}) + \frac{1}{M_{1x} \omega_{1x}} w_{1x}^T \cdot \varepsilon\Psi_X \cdot \cos \psi_R \quad (5c)$$

$$-a_I \cdot \mathcal{G}_I = a_I (\omega - \omega_{1y}) + \frac{1}{M_{1y} \omega_{1y}} \mathbf{w}_{1y}^T \cdot \mathcal{E} \Psi_Y \cdot \sin \psi_I \quad (5d)$$

Rovnice (5) sú už v t.zv. štandardnom tvare a veličiny M_{1x}, M_{1y} sú modálne hmotnosti, prislúchajúce k 1. vlastným frekvenciám ω_{1x}, ω_{1y} , nerozrušenej sústavy v oboch smeroch.

Pretože predmetom tejto práce sú dynamické deje pri rozbehu a dobehu rotorov, treba k rovniciam (5) pripojiť ešte rovnicu, popisujúcu zmenu uhlovej rýchlosti. Vyplýva z bilancie momentov k ose z. jej odvodenie bolo popísané v [1]:

$$\begin{aligned} I \mathcal{G} = & L(\omega) - H(\omega) + M_{xy} (\omega_{1y}^2 - \omega_{1x}^2) a_R a_I \cos \psi_R \sin \psi_I + \frac{M_{xy}}{M_{1x}} a_I \mathbf{w}_{1x}^T \cdot \mathcal{E} \Psi_X \sin \psi_I - \\ & - \frac{M_{xy}}{M_{1y}} a_R \mathbf{w}_{1y}^T \cdot \mathcal{E} \Psi_Y \cos \psi_R + \omega^2 \{ a_I \sin \psi_I \cdot \mathbf{w}_{1y}^T \cdot (\mathbf{S} \sin \varphi - \mathbf{C} \cos \varphi) + \\ & + a_R \cos \psi_R \mathbf{w}_{1x}^T (\mathbf{C} \sin \varphi + \mathbf{S} \cos \varphi) \} + a_R \cos \psi_R \cdot \mathbf{w}_{1x}^T \mathbf{G} \end{aligned} \quad (5e)$$

V rovnici (5e) značí I moment zotrvačnosti rotora k ose z, $L(\omega)$ je priebeh poháňajúceho a $H(\omega)$ priebeh brzdiaceho momentu, pôsobiaceho na rotor. M_{xy} je modálna hmotnosť, prislúchajúca k 1. vlastnej frekvencii v smere x a y. Pre zjednodušenia výkladu pri znázorňovaní výsledkov výpočtov, zavedieme ešte veličinu $S(\omega)$ vzťahom:

$$I \mathcal{G} = L(\omega) - S(\omega) \quad (5f)$$

O poháňajúcom momente $L(\omega)$ budeme ďalej predpokladať, že je lineárne závislý na uhlovej rýchlosti otáčania rotora a jeho hodnota je daná rovnicou:

$$L(\omega) = L_0 - l_{c0} \cdot \omega \quad (5g)$$

Sústava rovníc (5) definuje päť neznámych funkcií času $a_R, a_I, \mathcal{G}_R, \mathcal{G}_I, \omega$. Tieto neznáme funkcie sme vypočítali pomocou metódy priemerovania [1].

3. Prechod rotora cez kritické otáčky zmenou tuhostí podoprení

V tejto časti práce zostavíme rovnice, ktoré popíšu zmenu lineárnej časti tuhostí podoprení konečnou, danou rýchlosťou. Samotný prechodový dej, ktorý pri tom nastane, budeme sledovať v ďalšej časti.

Pre definíciu zmien pomerných tuhostí γ_{ij} sú určujúce nasledujúce údaje. Je to uhlová rýchlosť otáčania rotora ω_{xz}, ω_{yz} , kedy sa začne meniť tuhosť podoprenia v smere x a y, podobne ω_{xk}, ω_{yk} , udáva koniec zmeny v oboch smeroch. Ďalej γ_{ijz} je začiatková hodnota tuhostí a γ_{ijk} konečná hodnota. Pre názornosť zavedieme ešte pomer týchto hodnôt:

$$q \gamma_{ij} = \gamma_{ijk} / \gamma_{ijz} \quad (i = 0, L; j = x, y). \quad (6)$$

Pre lepšiu prehľadnosť dejov, ktoré vzniknú pri prechode rotora cez kritické otáčky pri súčasnom znižovaní tuhostí podoprení jeho koncov, zobrazíme výsledky pomocou grafov. pre názornosť výkladu obmedzíme sa iba na vodorovný smer (smer x) Pri zostrojovaní grafov použijeme nasledujúce pomerné veličiny:

$$\omega_{xz} = \kappa_{xz} \cdot \omega_{1x} \quad \omega_{xk} = \kappa_{xk} \cdot \omega_{1x} \quad (7a,b)$$

V grafoch sa sústreďíme na maximálnu hodnotu amplitúd, ktorá sa dosiahne pri prechode cez kritické otáčky v rozličných režimoch prechodu. V tejto súvislosti zavedieme nasledujúce označenia:

A_{Rst} - maximálna amplitúda pri prechode cez kritické otáčky bez preladovania, pri minimálnom poháňajúcom momente, zabezpečujúcom prechod cez kritické otáčky

A_{R+} - maximálna amplitúda pri rozbehu zvýšenou rýchlosťou, alebo pri preladovaní.

$\frac{L_0 \cdot \omega_{1x}^2}{I}$ - pomerný začiatočný výkon poháňajúceho stroja

$\frac{S_m \cdot \omega_{1x}^2}{I}$ - pomerná hodnota veličiny $S(\omega)$ pri $\omega = \omega_{1x}$. Je ovplyvnená najmä veľkosťou tlmiacej konštanty b .

4. Číselné výsledky a ich zhodnotenie

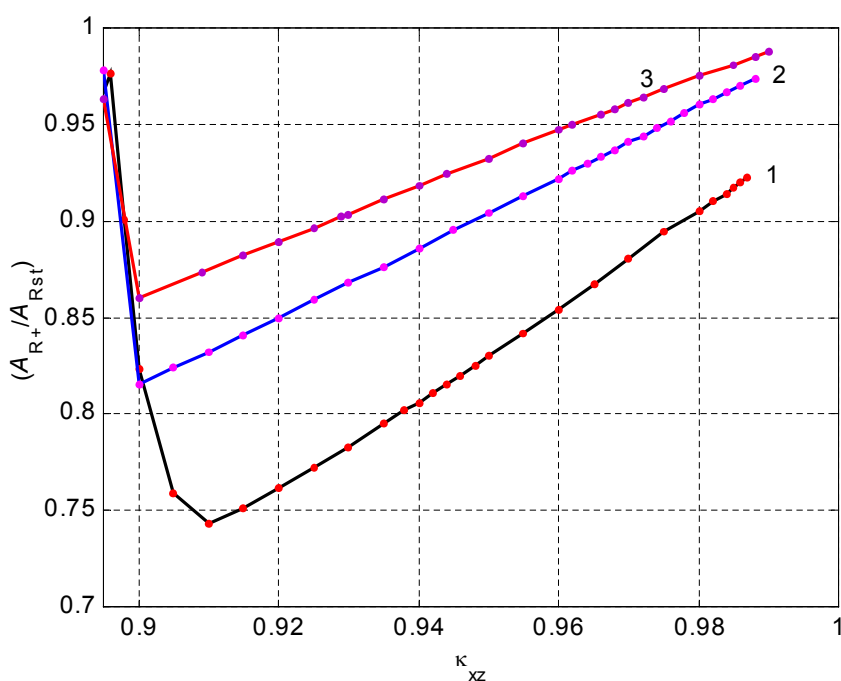
Číselné výsledky, vyplývajúce z riešenia matematického modelu, popísaného v predošlých častiach, zobrazíme pomocou grafu (Obr.2), na ktorom budú maximálne hodnoty amplitúd v pomernej forme, ktoré možno dosiahnuť pomocou preladovania. O poháňajúcom momente predpokladáme, že je najmenší, ktorý ešte zabezpečí prechod cez kritické otáčky pri konštantnom S_m , zodpovedajúcom tlmiacej konštanty $b=200$ Nms.. Pokles tuhosti počas preladovania bude daný pomerom $q\gamma_{0x} = q\gamma_{Lx} = 0,7$.

V grafe sú vynesené tri krivky, pre rozličnú dĺžku preladovania. Sú označené číslicami, ktorých význam je nasledujúci:

Krivka č. 1 zodpovedá dĺžke preladovania $\kappa_{xk} - \kappa_{xz} = 0,01$

2 0,02

3 0,03



Obr. 2

Ako vidno z grafu na obrázku č. 2, veľkosť maximálnej amplitúdy pri prechode cez kritické otáčky pomocou preladovania výrazne závisí od doby začiatku preladovania a dosiahne minimálnu hodnotu, ak začiatok preladovania (pre nastavené parametre) bude približne pri uhlovej rýchlosti rotora $\omega \approx 0,9\omega_{1x}$. Vidieť ďalej, že veľkosť minimálnej hodnoty závisí na trvaní preladovania, danom rozdielom $\kappa_{xk} - \kappa_{xz}$ a je najnižšia, ak sa preladovanie uskutoční najväčšou rýchlosťou.

5. Záver

V práci sme sa venovali niektorým vlastnostiam dynamického deja, ktorý nastane pri prechode pružného štíhleho rotora, poháňaného zdrojom o konečnom výkone, cez kritické otáčky. Ukázalo sa, že účinnosť takéhoto prechodu závisí okamžiku začiatku preladovania a na jeho trvaní.

6. Literatúra

- [1] Ballo I., Chmúrny R. (2003) Passage of Flexible Slender Rotor Through Critical Speed. In: *Proc. Engineering Mechanics 2003, National conference with international Participation, Svatka, May 12-15, 2003*, Paper no 106.
- [2] Mitropolskij Ju. A. (1964) *Problamy Asimptotičeskoj Teorii Nestacionarnych kolebanij*. Izdatel'stvo Nauka, Moskva.