ENGINEERING MECHANICS 2004
NATIONAL CONFERENCE
with international participation
Svratka, Czech Republic, 10 - 13 May 2004

OBJECTIVE TIME DERIVATIVE DEFINED AS COVARIANT DERIVATIVE

Z. Fiala[1]

Summary: *Choice of an objective time derivative is still an open problem, even in elasticity. A geometrically based approach, defining the time derivative as a covariant derivative in an appropriate nonlinear space - the infinite dimensional Riemannian manifold of deformation tensors, will be employed, and, via coordinate approach, the covariant derivative and its corresponding time derivative of an arbitrary tensor field will be explicitly expressed.*

1. Úvod

Přestože v literatuře existuje již celá řada definic objektivních časových derivací, jejich užití v teorii konečných deformací představuje stále otevřený problém, a to i pro elastické prostředí (Liu & Hong (1999)). Jedním z hlavních důvodů se jeví málo výstižný popis změn geometrie těles, ke kterým při konečných deformacích typicky dochází. Nová definice objektivní časové derivace, prezentovaná na minulé konferenci Inženýrské mechaniky 2003, vychází proto výhradně z geometrických úvah (Fiala (2003),(2004)). Na základě formulace kinematiky kontinua v rámci **Riemannovy geometrie nekonečně dimenzionální variety Riemannových metrik** ji lze definovat pomocí kovariantní derivace. Takto definovaná objektivní časová derivace byla zatím odvozena pouze pro kovariantní symetrické tenzorová pole druhého řádu. Cílem tohoto příspěvku je rozšířit její působnost i na ostatní tenzory této variety. S využitím vhodných souřadnic na nekonečně dimezionálním prostoru budou zároveň odvozeny její explicitní vzorce.

2. Prostor deformačních tenzorů

Mezi teorií malých a konečných deformací existuje jeden zásadní rozdíl: zatím co teorie malých deformací aproximuje skutečnou deformaci pomocí **infinitezimálních polí**, teorie konečných deformací ji popisuje přesně pomocí **difeomorfismů**. Vyjádříme-li deformaci kontinua přes pole posunutí: $x \equiv \Phi(X) = X + u(X)$, pak pro následnou posloupnost deformací $X \to x_1 \to x_2$ platí vztah: $x_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1(X) = \Phi_2(x_1) = \Phi_2(X + u_1(X)) = X + u_1(X) + u_2(X + u_1(X))$. V případě malých deformací můžeme zanedbat všechny členy druhého, i vyšších řádů, a výraz se zjednoduší na tvar $x_2 \approx X + u_1(X) + u_2(X)$. Deformace, původně

[1]RNDr. Z. Fiala, CSc.: Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV čR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9; tel.:+420.286882121, fax:+420.286884634; e-mail: fiala@itam.cas.cz

vyjádřená difeomorfismy, se tak nyní zjednodušeně popíše infinitezimálními poli posunutí. Vlastní difeomorfismus Φ se pak redukuje na identické zobrazení $x = \Phi_0(X) \approx X$, a stejně tak i deformační gradient $(\mathbf{F} \equiv) T\Phi = I + Tu \approx I$, což v důsledku neznamená nic jiného, než že odpovídající tenzory v referenční a aktuální konfiguraci jsou identické. To samozřejmě platí i pro metrické tenzory: $g \approx G$, kde G je metrický tenzor v referenční a g v aktuální konfiguraci. Linearizací obecného zobrazení Φ kolem identického zobrazení $\Phi_0(X) = x \approx X$ v bodě $x = \Phi_0(X)$ pak nahradíme difeomorfismy infinitezimálními poli $u(X)$, které v samotné teorii malých deformací dále vystupují už jen prostřednictvím infinitezimálních změn metriky $g = G$. Tuto infinitezimální variaci vyjadřují *tenzory přetvoření* $e \approx E$, $h \approx H$, zatímco pro *tenzory deformace* (3), (4) platí: $c^\flat \approx C^\flat$ a $b^\sharp \approx B^\sharp$. Při přechodu k malým deformacím se také redukuje *objektivní časová derivace* (6) na jednoduchou materiálovou časovou derivaci: $L_{\mathbf{F}} = \Phi_* \circ \partial \circ \Phi^* \approx \partial$. Proto zároveň platí: $\partial C^\flat = 2\partial E^\flat \approx 2d^\flat$ a $\partial B^\sharp = 2\partial H^\sharp \approx -2d^\sharp$. Více Fiala (2003),(2004).

Na rozdíl od malých deformací se celý deformační proces, z hlediska teorie velkých deformací, přestává odehrávat již jen v jistém lineárním prostoru ($T\mathbf{M}$) a samotný rozdíl deformačního tenzoru v počátečním a koncovém stavu už nevystihuje celkový průběh deformace. Proto musí být deformační proces popsán ne tenzorovým polem přetvoření, ale trajektorií v nelineárním prostoru $\mathbf{M} = Met(R)$, t.j. **prostoru všech možných polí deformačního tenzoru** vzhledem k referenční konfiguraci R. Tuto skutečnost si jako první uvědomil Rougée (1997) a vyvodil z ní i první významné důsledky. Přechodem od lineárního prostoru k nelineárnímu ale vzniká zásadní problém: jak definovat derivaci! Řešení navržené Rougéem spočívá v geometrizaci prostoru $\mathbf{M}$, což mu umožňuje zavést paralelní přenos tenzorových polí (tedy způsob jak porovnávat tenzorové pole v různých bodech prostoru), a poté i kovariantní derivaci. Zavedením skalárního součinu na tečném prostoru $T\mathbf{M}$, odvozeného na základě kinematických důvodů (Rougée (1997)),

$$H^{1\flat} \cdot H^{2\flat}\big|_{C_t^\flat, X} = \frac{1}{4} B_t^{ik} B_t^{lj} H^1_{ij} H^2_{kl} \tag{1}$$

se varieta $\mathbf{M}$ stává Riemannovou varietou ($B^\sharp$ zde představuje asociovaný tenzor k pravému Greenovu-Cauchyho tenzoru $C^\flat$). Vzhledem k tomu, že Rougée se omezil pouze na jediný *bod* referenční konfigurace kontinua, jeho varieta je *6-dimenzionální.* Časovou derivaci pak definuje přirozeným způsobem jako specielní kovariantní derivaci. V tomto konečně dimenzionálním případě navíc ukázal, že jeho derivace je totožná se Zarembovou-Jaumannovou derivací.

Jakmile rozšíříme studium deformace na celou referenční konfiguraci, musíme také celý naznačený přístup poněkud modifikovat. Riemannovy metriky nyní představují tenzorová *pole* deformačních tenzorů na referenční konfiguraci (pravých Greenových-Cauchyho tenzorů $C^\flat$), a odpovídající Riemannova varieta $\mathbf{M}$ se tak stává *nekonečně dimenzionální.* Skalární součin na tečném prostoru $T\mathbf{M}$ definující "supermetriku" na varitě $\mathbf{M}$ pak musí zohledňovat "váhu" jednotlivých bodů (Fiala (2003),(2004); též (8)-(9)):

$$\langle H^{1\flat}, H^{1\flat} \rangle_{C_t^\flat} = \int_R H^{1\flat} \cdot H^{1\flat}\big|_{C_t^\flat, X}\, d\mathrm{VOL}_X(C_t^\flat) = \int_R \frac{1}{4} B_t^{ik} B_t^{lj} H^1_{ij} H^2_{kl} \sqrt{\det(C_t^\flat)}\, dX \tag{2}$$

Časová derivace získaná na základě této metriky pomocí kovariantní derivace už pak není Zarembovou-Jaumannovou derivací, ale představuje zcela **novou objektivní časovou**

derivaci (Fiala (2003),(2004)). Cílem této práce je rozšířit její působnost i na ostatní přípustná tenzorová pole, než jen kovariantní symetrické tenzorové pole druhého řádu, a to s využitím vhodných souřadnic na nekonečně dimenzionální varietě.

3. Objektivní časová derivace definovaná pomocí kovariantní derivace

Deformaci tělesa přesně popisuje difeomorfismus $\Phi : I \times R \to S$, t.j. dostatečněkrát diferencovatelné zobrazení, diferencovatelné včetně svého inverzního zobrazení. Symbol I představuje časový interval, a pomocí symbolů R a S budeme označovat deformační stav tělesa v referenční a aktuální konfiguraci. Velkým písmenem X dále označíme body referenční konfigurace R, a malým písmenem x body v aktuální konfiguraci S. Difeomorfismus Φ indukuje zobrazení **push-forward** Φ_* a **pull-back** Φ^* mezi odpovídajícími prostory tenzorů, která jednoduchým způsobem svazují deformační a napěťové stavy v referenční a aktuální konfiguraci: *popis deformace z hlediska referenční (aktuální) konfigurace lze získat z popisu deformace v aktuální (referenční) konfiguraci pomocí operace pull-back (push-forward)* (viz. Fiala (2000)).

Krátce shrneme základní vztahy. Pro asociované tenzory k metrickým tenzorům G, g, v referenční a aktuální konfiguraci, definujeme:

$$C^\flat = \Phi^* g \qquad c^\flat = \Phi_* G \tag{3}$$

$$B^\sharp = \Phi^* g^\sharp \qquad b^\sharp = \Phi_* G^\sharp, \tag{4}$$

kde symboly $\sharp$, resp. $\flat$ označují odpovídající kontravariantní, resp. kovariantní tenzory. Zobrazení Φ tak vlastně představuje **izometrii** mezi dvěma 3-dimenzionálními Riemanovými varietami (S,g) a $(R,C^\flat)$, resp. $(S,c^\flat)$ a (R,G). Vzhledem k platnosti vztahu

$$g^\sharp g = i \qquad (\text{t.j. } g^{ia} g_{aj} = \delta^i_j)$$

platí také

$$B^\sharp C^\flat = I \quad (\text{t.j. } B^{ia} C_{aj} = \delta^i_j)\,,$$

kde i představuje identické zobrazení na prostoru tečných vektorů TS, a I identické zobrazení na prostoru tečných vektorů TR. Dále, pro asociované tenzory k **tenzoru rychlosti deformace** d platí vztahy

$$\Phi^* d^\flat = \frac{1}{2}\partial C^\flat \qquad \Phi^* d^\sharp = -\frac{1}{2}\partial B^\sharp, \tag{5}$$

ve kterých symbol ∂ reprezentuje obyčejnou časovou derivaci. Tyto vztahy jsou klíčové pro zavedení metriky do prostoru $\mathbf{M}$. Jejich analogií v aktuální konfiguraci jsou výrazy s Liovou derivací

$$L_{\mathbf{F}} g = 2d^\flat \qquad L_{\mathbf{F}} g^\sharp = -2d^\sharp, \tag{6}$$

která v tomto kontextu reprezentuje Oldroydovu objektivní časovou derivaci.

Protože deformační proces $C^\flat : I \to \mathbf{M}$ nyní chápeme jako trajektorii v prostoru polí deformačních tenzorů, můžeme definovat jak jeho rychlost $\partial C^\flat$, tak i zrychlení $\nabla_{\partial C^\flat} \partial C^\flat$, v rámci geometrie tohoto prostoru $\mathbf{M}$. Rychlosti $\partial C^\flat$, jako tečné vektory k prostoru $\mathbf{M}$, jinými slovy prvky tečného prostoru $T\mathbf{M}$, nám umožňují prostřednicvím vztahu (5) zavést na prostoru $T\mathbf{M}$ skalární součin, t.j. metriku na prostoru $\mathbf{M}$. Východiskem se stává definice skalárního součinu symetrických tenzorů druhého řádu v aktuální konfiguraci S, v bodě x, kterou lze vyjádřit pomocí stopy **tr** následovně

$$\mathbf{tr}(d^1 d^{2^T}) = g^{ik} g^{lj} d^1_{ij} d^2_{kl}\,, \tag{7}$$

a pro skalární součin tenzorových polí dostáváme

$$\langle d^{1\flat}, d^{2\flat}\rangle_g = \int_S \mathbf{tr}(d^1 d^{2^T}) \sqrt{\det(g)}\, dx\,. \tag{8}$$

Do prostoru $T\mathbf{M}$ pak skalární součin přeneseme pomocí operace pull-back

$$\langle \partial C^{1\flat}, \partial C^{2\flat}\rangle_{C_t^\flat} \equiv\ \Phi_t^*\Big(\langle d^{1\flat}, d^{2\flat}\rangle_g\Big)\,. \tag{9}$$

Výsledkem je vztah (2), a zmiňovaná "váha" příspěvků k integraci od jednotlivých bodů se objeví jen jako přirozený důsledek samozřejmého požadavku, aby skalární součin (8) byl nezávislý na svém zápisu v libovolném systému souřadnic.

Objektivní časovou derivaci libovolného tenzorového pole θ v aktuální konfiguraci S nyní můžeme definovat pomocí kovariantní derivace odpovídajícího tenzorového pole Θ v referenční konfiguraci R - uvažovaného však v prostoru $\mathbf{M}$ (viz.Apendix), podél vektoru rychlosti deformace $\partial C_t^\flat$, kterou následně vyjádříme v aktuální konfiguraci S pomocí operace push-forward Φ_*:

$$\frac{D}{Dt}\theta \equiv \Phi_{t*}\left(\frac{D}{Dt}\Theta\right), \quad \text{kde} \quad \frac{D}{Dt}\Theta \equiv \nabla_{\partial C_t^\flat}\Theta\,. \tag{10}$$

Protože tato kovariantní derivace má význam *rychlosti změny veličiny Θ v bodě X ve směru pohybu deformace, daném tečným vektorem $\partial C_t^\flat$*, tato definice objektivní časové derivace je přirozená a vyjadřuje přesně tu vlastnost objektivní časové derivace, která se od ní očekává.

Na základě výsledků získaných v Apendixu (viz.(30)) a záměnou γ_{kl} za C_{kl}, γ^{ij} za B^{ij}, a V_{ab} za ∂C_{ab}, získáme pro vektorové U pole nad $\mathbf{M}$ (t.j. 2-kovariantní symetrické tenzorové pole na R) následující vztahy

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{Dt}U\right)_{mp} \equiv \left(\nabla_{\partial C_t^\flat} U\right)_{mp} &= \partial U_{mp} - \frac{1}{2}\left((\partial C_t)_{ma} B_t^{ab} U_{bp} + U_{ma} B_t^{ab} (\partial C_t)_{bp}\right) + \\ &+ \frac{1}{4}\left(B_t^{ab}(\partial C_t)_{ab} U_{mp} - B_t^{ab}(\partial C_t)_{bc} B_t^{cd} U_{da} (C_t)_{mp} + (\partial C_t)_{mp} B_t^{ab} U_{ab}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

a pro kovektorové Ω pole nad $\mathbf{M}$ (t.j. 2-kontravariantní symetrické tenzorové pole na R) (viz.(31)) vztahy

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{Dt}\Omega\right)^{ij} \equiv \left(\nabla_{\partial C_t^\flat}\Omega\right)^{ij} &= \partial\Omega^{ij} + \frac{1}{2}\left(\Omega^{ia}(\partial C_t)_{ab} B_t^{bj} + B_t^{ia}(\partial C_t)_{ab}\Omega^{bj}\right) - \\ &- \frac{1}{4}\left(\Omega^{ab}(\partial C_t)_{ab} B_t^{ij} - (C_t)_{ab}\Omega^{ab} B_t^{ic}(\partial C_t)_{cd} B_t^{dj} + B_t^{ab}(\partial C_t)_{ab}\Omega^{ij}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

Při odvození jsme využili platnost následujících vztahů

$$\frac{\delta U}{\delta(\partial C_t^\flat)} = \partial U \quad \text{a} \quad \frac{\delta \Omega}{\delta(\partial C_t^\flat)} = \partial \Omega \,.$$

Objektivní časovou derivaci *2-kovariantního symetrického tenzorového pole u* v aktuální konfiguraci S pak získáme pomocí operace push-forward na základě vztahu (11)

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{Dt}u\right)_{mp} &\equiv \left(\Phi_{t*}\left(\nabla_{\partial C_t^\flat} U\right)\right)_{mp} = \qquad (13)\\ &= (L_{\mathbf{F}}u)_{mp} - \left(d_{ma}g^{ab}u_{bp} + u_{ma}g^{ab}d_{bp}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{ab}d_{ab}u_{mp} - g^{ab}d_{bc}g^{cd}u_{da}d_{mp} + d_{mp}g^{ab}u_{ab}\right)\\ &= \left(\dot{u}^{ZJ}\right)_{mp} + \frac{1}{2}\left(g^{ab}d_{ab}u_{mp} - g^{ab}d_{bc}g^{cd}u_{da}d_{mp} + d_{mp}g^{ab}u_{ab}\right)\end{aligned}$$

a **objektivní časovou derivaci** *2-kontravariantního symetrického tenzorového pole* ω v aktuální konfiguraci S pak na základě vztahu (12)

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{Dt}\omega\right)^{ij} &\equiv \left(\Phi_{t*}\left(\nabla_{\partial C_t^\flat}\omega\right)\right)^{ij} = \qquad (14)\\ &= (L_{\mathbf{F}}\omega)^{ij} + \left(\omega^{ia}d_{ab}g^{bj} + g^{ia}d_{ab}\omega^{bj}\right) - \frac{1}{2}\left(\omega^{ab}d_{ab}g^{ij} - g_{ab}\omega^{ab}g^{ic}d_{cd}g^{dj} + g^{ab}d_{ab}\omega^{ij}\right)\\ &= \dot{\omega}^{ij} - (d+w)^{ia}g_{ab}\omega^{bj} - \omega^{ia}g_{ab}(d-w)^{bj} + \left(\omega^{ia}g_{ab}d^{bj} + d^{ia}g_{ab}\omega^{bj}\right) - \\ &\qquad -\frac{1}{2}\left(\omega^{ab}d_{ab}g^{ij} - g_{ab}\omega^{ab}g^{ic}d_{cd}g^{dj} + g^{ab}d_{ab}\omega^{ij}\right)\\ &= \left(\dot{\omega}^{ZJ}\right)^{ij} - \frac{1}{2}\left(\omega^{ab}d_{ab}g^{ij} - g_{ab}\omega^{ab}g^{ic}d_{cd}g^{dj} + g^{ab}d_{ab}\omega^{ij}\right)\end{aligned}$$

ZJ znamená Zarembovu-Jaumannovu derivaci. Zvolíme-li za 2-kovariantní symetrické tenzorové pole $C^\flat$ nebo $d^\flat$, pak platí

$$\frac{DC_t^\flat}{Dt} = \frac{3}{4}\partial C_t^\flat \qquad\qquad \frac{Dg}{Dt} = \frac{3}{2}d^\flat \qquad (15)$$

a analogicky pro 2-kovariantní symetrická tenzorová pole $B^\sharp$ a $d^\sharp$, modifikovaná tentokrát členem $\sqrt{C_t^\flat}$, s využitím (35) získáme

$$\frac{D}{Dt}\left(B_t^\sharp\sqrt{\det C_t^\flat}\right) = -\frac{3}{4}\partial B_t^\sharp\sqrt{\det C_t^\flat} \qquad\qquad \frac{D}{Dt}\left(g^\sharp\sqrt{\det g}\right) = -\frac{3}{2}d^\sharp\sqrt{\det g} \qquad (16)$$

Objektivní časovou derivaci *libovolného přípustného tenzorového pole* θ v aktuální konfiguraci S získáme analogickým postupem na základě obecného vztahu (32).

4. Závěr

V příspěvku byla na základě vhodných souřadnic zavedených do nekonečně dimenzionální Riemannovy variaty deformačních tenzorů **M** odvozena objektivní časová derivace libovolného přípustného tenzorového pole. Pro 2-kovariantní a 2-kontravariantní symetrická tenzorová pole byly odvozeny i explictní vzorce. V prvním případě tak byl jen jiným způsobem odvozen vztah (13), již dříve získaný v práci Fiala (2003),(2004).

Výsledky této práce lze stručně shrnout takto:

(i) Nová objektivní časová derivace modifikuje na základě geometrických důvodů Zarembovu-Jaumannovu časovou derivaci. Rozdíl mezi ní a Zarembovou-Jaumannovou derivaci není ve způsobu odvození, ale v tom, zda při jejím odvozování uvažujeme deformaci tělesa v jediném bodě (Zarembova-Jaumannova derivace), nebo zda uvažujeme deformaci tělesa jako celek (nová derivace). Formálně je tento rozdíl obsažen v nepřítomnosti, resp. přítomnosti členu $\gamma^{\frac{1}{2}}$, nebo $\sqrt{C^\flat}$, ve výrazu pro supermetriku (17) a (18), nebo (2). Jeho absence (viz.(1)) vede na Zarembovu-Jaumannovu derivaci, zatímco v důsledku jeho přítomnosti (viz.(2)) se při jejím odvozování objeví dodatečné členy, a dostáváme tak novou objektivní časovou derivaci.

(ii) Číselné koeficienty u vztahů (15) a (16) souvisí s dimenzí referenčního prostoru R. Vzhledem k tomu, že pole rychlosti tenzoru deformace d, resp. $\partial C^\flat$, jsou časově závislá vektorová pole, je nutné přejít od 3D prostoru k (1+3)D časoprostoru (Abraham, Marsden & Ratiu (1988), pp.245-247). Výraz $\mathbf{tr}(g^{ia}g_{aj})$ pak nebude roven 3, ale 4, a vztahy (15), (16) už budou přesně korespondovat s příslušnými časovými derivacemi v referenční konfiguraci, a Lieovými derivacemi (6) v aktuální konfiguraci.

(iii) Celá koncepce nekonečně dimenzionálních Riemannových variet Riemannových metrik, v rámci které byla nová objektivní časová derivace odvozena, nabízí i další možnosti: Využít pro popis procesu deformace vlastnosti zakřivení prostoru $\mathbf{M}$ (Freed & Groisser (1989)), nebo souvislosti logaritmického tenzoru přetvoření s geodetikami (Rougée (1997)).

Appendix: Geometry of the manifold of Riemannian metrics

Let R denote a 3-dimensional Riemannian manifold, γ a Riemannian metric (i.e. a 2-covariant symmetric tensor field on R), and $\mathbf{M}$ a set of all possible metrics γ on R. The set $\mathbf{M}$ is a manifold, and being endowed with a scalar product on its tangent space $T\mathbf{M}$ (see (2)):

$$\langle H^{1\flat_\gamma}, H^{2\flat_\gamma}\rangle_\gamma = \int_R \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}\gamma^{ik}\gamma^{lj}H^1_{ij}H^2_{kl}\,dX = \int_R \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}\gamma^{i(k}\gamma^{l)j}H^1_{ij}H^2_{kl}\,dX \tag{17}$$

it becomes even an infinite dimensional Riemannian manifold (Freed & Groisser (1989), Gill-Medrano & Michor (1991) and Kriegel & Michor (1997)). Symbol γ stands also for $\gamma = \det(\gamma_{ij})$, and $\gamma^{i(k}\gamma^{l)j} = \frac{1}{2}(\gamma^{ik}\gamma^{lj} + \gamma^{il}\gamma^{kj})$. Even though $\mathbf{M}$ is an infinite dimensional Riemannian manifold, still a great deal of usual Riemannian geometry on the finite dimensional manifold can be directly carried over to the manifold $\mathbf{M}$. Based on the coordinates in 3-dimensional space R, compatible coordinates on the infinite dimensional manifold $\mathbf{M}$ can be introduced, and its Riemannian geometry, via the properties of the supermetric defining this geometry, explicitly studied.

Let $\gamma_{ij}(X)$ are the components of a metric field in a coordinate system of R. Then we can consider the set of the 6 functions $\{\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\}$ as coordinates in $\mathbf{M}$.

Instead of using one single index {A} for each couple of indices {ij}, we will still stick to the latter. In these coordinats, the components of the **supermetric** are as follow:

$$G^{ijkl} = \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}\gamma^{i(k}\gamma^{l)j} \ , \tag{18}$$

for its inverse

$$G_{klmp} = 4\gamma^{-\frac{1}{2}}\gamma_{k(m}\gamma_{p)l} \ , \tag{19}$$

and it holds

$$G^{ijab}G_{abkl} = \delta_k^{(i}\delta_l^{j)} \ , \quad \text{where} \quad \delta_k^{(i}\delta_l^{j)} = \frac{1}{2}\left(\delta_k^i\delta_l^j + \delta_k^j\delta_l^i\right) = \delta_{(k}^i\delta_{l)}^j \ . \tag{20}$$

As the points of $\mathbf{M}$ are the 2-covariant symmetric tensor fields on R, they are also **vector fields** U over $\mathbf{M}$. For the assotiated covector field $U^{\flat_G}$ over $\mathbf{M}$ and the assotiated tensor field $U^{\sharp_\gamma}$ on R (i.e. 2-contravariant symmetric tensor field) the following relation holds

$$(U^{\flat_G})^{ij} = G^{ijkl}U_{kl} = \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}\gamma^{i(k}\gamma^{l)j}U_{kl} = \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}(U^{\sharp_\gamma})^{ij}$$

$$\text{i.e.} \quad U^{\flat_G} = \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}U^{\sharp_\gamma} \tag{21}$$

The similar applies for a **covector field** Ω over $\mathbf{M}$, which, from the perspective of R, is a 2-contravariant symmetric tensor on R. Now, for the assotiated vector field $\Omega^{\sharp_G}$ on $\mathbf{M}$ and the assotiated tensor field $\Omega^{\flat_\gamma}$ on R (i.e. 2-covariant symmetric tensor field) again the similar relation applies

$$(\Omega^{\sharp_G})_{kl} = G_{klmp}\Omega^{mp} = 4\gamma^{-\frac{1}{2}}\gamma_{k(m}\gamma_{p)l}\Omega^{mp} = 4\gamma^{-\frac{1}{2}}(\Omega^{\flat_\gamma})_{kl}$$

$$\text{i.e.} \quad \Omega^{\sharp_G} = 4\gamma^{-\frac{1}{2}}\Omega^{\flat_\gamma} \tag{22}$$

The vector fields over $\mathbf{M}$ make up the tangent space $T\mathbf{M}$ of the manifold $\mathbf{M}$, and the covector fields its dual - the cotangent space $T\mathbf{M}^*$. A general **$(p$-$q)$-tensor field** over $\mathbf{M}$ is defined in a similar way as in the finite dimensional case: it is a point of $\mathbf{T}_q^p = \mathbf{T}^p \otimes \mathbf{T}_q = = T\mathbf{M} \otimes \cdots \otimes T\mathbf{M} \otimes T\mathbf{M}^* \otimes \cdots \otimes T\mathbf{M}^*$.

Now we can proceed to establish Christoffel symbols

$$\Gamma^{ijklab} = \frac{\partial G^{klab}}{\partial \gamma_{ij}} - \frac{\partial G^{ijkl}}{\partial \gamma_{ab}} + \frac{\partial G^{abij}}{\partial \gamma_{kl}} \tag{23}$$

$$\Gamma^{ijkl}_{mp} = \frac{1}{2}G_{mpab}\Gamma^{ijklab} = \frac{1}{2}G_{mpab}\left(G^{klab,ij} - G^{ijkl,ab} + G^{abij,kl}\right), \tag{24}$$

where $G^{ijkl,ab} = \partial G^{ijkl}/\partial\gamma_{ab}$. Carrying out all the necessary calculations, and taking into account defintion of the determinant

$$\gamma = \det(\gamma_{ij}) = \sum_\epsilon \epsilon_\pi \gamma_{1\pi(1)} \cdots \gamma_{n\pi(n)} \ ,$$

which implies

$$\sum_a \gamma_{am}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_{ap}} = \gamma\delta_m^p \quad \text{and therefore} \quad \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_{mp}} = \gamma^{mp} \ , \tag{25}$$

one obtains the relation

$$\frac{\partial G^{ijkl}}{\partial \gamma_{mp}} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \gamma_{mp}}\left[\gamma^{\frac{1}{2}}\gamma^{i(k}\gamma^{l)j}\right] = \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \gamma^{i(k}\gamma^{l)j}}{\partial \gamma_{mp}} + \frac{1}{8}\gamma^{i(k}\gamma^{l)j}\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_{mp}} =$$

$$= \frac{1}{4}\gamma^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial \gamma^{i(k}\gamma^{l)j}}{\partial \gamma_{mp}} + \frac{1}{2}\gamma^{i(k}\gamma^{l)j}\gamma^{mp}\right].$$

Making use of the relation $\gamma^{ia}\gamma_{aj} = \delta^i_j$, from which we infer

$$\frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial \gamma_{kl}} = -\gamma^{ia}\frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial \gamma_{kl}}\gamma^{bj} \quad \text{and therefore} \quad \frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial \gamma_{kl}} = -\gamma^{ia}\delta^{(k}_a\delta^{l)}_b\gamma^{bj}\,, \tag{26}$$

one obtains all the terms for the relation (24) in the form

$$G_{mpab}G^{klab,ij} = \gamma_{m(a}\gamma_{b)p}\left[\frac{\partial \gamma^{k(a}\gamma^{b)l}}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{1}{2}\gamma^{k(a}\gamma^{b)l}\gamma^{ij}\right]$$

$$G_{mpab}G^{ijkl,ab} = \gamma_{m(a}\gamma_{b)p}\left[\frac{\partial \gamma^{i(k}\gamma^{l)j}}{\partial \gamma_{ab}} + \frac{1}{2}\gamma^{i(k}\gamma^{l)j}\gamma^{ab}\right]$$

$$G_{mpab}G^{abij,kl} = \gamma_{m(a}\gamma_{b)p}\left[\frac{\partial \gamma^{a(i}\gamma^{j)b}}{\partial \gamma_{kl}} + \frac{1}{2}\gamma^{a(i}\gamma^{j)b}\gamma^{kl}\right]$$

Finaly, summing all these three terms together, the **Christoffel symbols** take the form

$$\Gamma^{ijkl}_{mp} = \frac{1}{2}G_{mpab}\Gamma^{ijklab} = -\delta^{(i}_{(m}\gamma^{j)(k}\delta^{l)}_{p)} + \frac{1}{4}\left(\delta^{(k}_m\delta^{l)}_p\gamma^{ij} - \gamma^{i(k}\gamma^{l)j}\gamma_{mp} + \delta^{(i}_m\delta^{j)}_p\gamma^{kl}\right) \tag{27}$$

Having established the Christoffel symbols, the **covariant derivative** is defined for all the tensors fields over the manifold $\mathbf{M}$. For vector U and covector Ω fields over $\mathbf{M}$, the covariant derivative along an arbitrary vector V can be expressed as

$$(\nabla_V U)_{mp} = \left(U_{mp}{}^{,kl} + \Gamma^{ijkl}_{mp}U_{ij}\right)V_{kl} = U_{mp}{}^{;kl}V_{kl} \tag{28}$$

$$(\nabla_V \Omega)^{ij} = \left(\Omega^{ij,kl} - \Gamma^{ijkl}_{mp}\Omega^{mp}\right)V_{kl} = \Omega^{ij;kl}V_{kl} \tag{29}$$

After expanding the covariant derivative into components, one readily obtains

$$(\nabla_V U)_{mp} = \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_{mp} - \tag{30}$$

$$-\frac{1}{2}\left(V_{ma}\gamma^{ab}U_{bp} + U_{ma}\gamma^{ab}V_{bp}\right) + \frac{1}{4}\left(\gamma^{ab}V_{ab}U_{mp} - \gamma^{ab}V_{bc}\gamma^{cd}U_{da}\gamma_{mp} + V_{mp}\gamma^{ab}U_{ab}\right),$$

where $\left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_{mp} \equiv \frac{d}{dq}\,U_{mp}\left(\gamma + qV\right)\big|_{q=0}$

and

$$(\nabla_V \Omega)^{ij} = \left(\frac{\delta \Omega}{\delta V}\right)^{ij} + \tag{31}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Omega^{ia} V_{ab} \gamma^{bj} + \gamma^{ia} V_{ab} \Omega^{bj}\right) - \frac{1}{4}\left(\Omega^{ab} V_{ab} \gamma^{ij} - \gamma_{ab} \Omega^{ab} \gamma^{ic} V_{cd} \gamma^{dj} + \gamma^{ab} V_{ab} \Omega^{ij}\right),$$

$$\text{where } \left(\frac{\delta \Omega}{\delta V}\right)^{ij} \equiv \frac{d}{dq}\, \Omega^{ij}\left(\gamma + qV\right)\Big|_{q=0}$$

For a general $(p$-$q)$-tensor field Θ over $\mathbf{M}$, the covariant derivative reads

$$(\nabla_V \Theta)^{ij...nm}{}_{op...rs} = (\Theta^{ij...nm}{}_{op...rs}{}^{,kl} + \Gamma^{abkl}_{op} \Theta^{ij...nm}{}_{ab...rs} + ... + \Gamma^{abkl}_{rs} \Theta^{ij...nm}{}_{op...ab} - \tag{32}$$

$$- \Gamma^{ijkl}_{ab} \Theta^{ab...nm}{}_{op...rs} - ... - \Gamma^{nmkl}_{ab} \Theta^{ij...ab}{}_{op...rs}) V_{kl} = \Theta^{ij...nm}{}_{op...rs}{}^{;kl} V_{kl}$$

In particular, for the supermetric, i.e. 2-covariant symmetric tensor field G over $\mathbf{M}$, the covariant derivative equals zero

$$(\nabla_V G) = 0 \qquad \left(\nabla_V G^{\sharp}\right) = 0, \tag{33}$$

and therefore for any vector field V the following relations apply

$$\left(\nabla_V U^{\flat_G}\right) = (\nabla_V U)^{\flat_G} \qquad \left(\nabla_V \Omega^{\sharp_G}\right) = (\nabla_V \Omega)^{\sharp_G}. \tag{34}$$

For a function f over $\mathbf{M}$, the covariant derivative means

$$\nabla_V f = \frac{\delta f}{\delta V} \equiv \frac{d}{dq}\, f\left(\gamma + qV\right)\Big|_{q=0}.$$

In particular, one obtains (see (25))

$$\nabla_V \gamma = \frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} V_{ab}$$

and

$$\nabla_V \left(\gamma^{\frac{1}{2}} \Omega\right) = \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\nabla_V \Omega + \frac{1}{2} \Omega \gamma^{ab} V_{ab}\right). \tag{35}$$

Remark 1: A natural class of supermetrics on $\mathbf{M}$ first emerged from the structure of the constraints of general relativity (DeWitt (1967)). A general form, dependent only on γ itself, and not on derivatives of γ, has been explicitely given by

$$G^{ijkl} = \frac{1}{\alpha} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\gamma^{i(k} \gamma^{l)j} + \beta \gamma^{ij} \gamma^{kl}\right),$$

$$G_{klmp} = \alpha \gamma^{-\frac{1}{2}} \left(\gamma_{k(m} \gamma_{p)l} - \frac{\beta}{1 + 3\beta} \gamma_{kl} \gamma_{mp}\right).$$

For $\alpha = 1$ and $\beta = -1$, this is precisely the DeWitt metric. Our metric (2), (17) is characterized by $\alpha = 4$ and $\beta = 0$.

Remark 2: In case one drops the component $\gamma^{\frac{1}{2}}$, the Christoffel symbols surprisingly do not depend on β (Schmidt (1990)).

5. Poděkování

Příspěvek byl připraven v rámci výzkumného záměru AV0Z2071913, za podpory grantu GA ČR 103/03/0581, GA ČR 106/03/0582 a projektu AV ČR K1010104.

6. Literatura

Abraham, R., Marsden, J. E. & Ratiu, T. S. (1988) *Manifolds, tensor analysis, and applications*, in: Applied Mathematical Sciences 75, Springer-Verlag

DeWitt, B. S. (1967) Quantum theory gravity I. The canonical theory, *Rhysical Rewiew*, 160, 1113-1148

Fiala, Z. (2001) Theory of finite deformations and differential geometry, in: *Euromech Colloquium 430: Formulations and constitutive laws for very large strains*, (J.Plešek ed), Prague 2000, 37-51

Fiala, Z. (2003) Large deformation - large amount of unknown, in: *Engineering Mechanics 2003* (J.Náprstek & C.Fischer eds), Svratka 2003, 74-75

Fiala, Z. (2004) Time derivative obtained by applying Riemannian manifold of Riemannian metrics to kinematics of continua, *C. R. Mecanique*, 332(2), 97-105

Freed, D. S. & Groisser, D. (1989) The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and its quotient by the diffeomorphism group, *The Mitchigan Mathematical Journal*, 36, 323-344
http://projecteuclid.org/Dienst/Repository/1.0/Disseminate/euclid.mmj/1029004004/body/pdf

Gill-Medrano, O. & Michor, P. W. (1991) The Riemannian manifold of all Riemannian metrics, *The Quarterly Journal of Mathematics* 42, 183-202
http://www.mat.univie.ac.at/~michor/rie-met.ps

Kriegel, A. & Michor, P. W. (1997) *The convenient setting of global analysis*, in: Math. Surveys Monographs, Vol.53, American Mathematical Society, Par. 45, Chapter IX, 487-497
http://www.ams.org/online_bks/surv53/

Liu, Ch-S. & Hong, H-K. (1999) Non-oscillation criteria for hypoelastic models under simple shear deformation. *J.Elast.*, 57, 201-241

Rougée, P. (1997) *Mécanique des grandes transformations*, in: Mathématique & Applications 25, Springer-Verlag

Schmidt, H-J. (1990) The metric in the superspace of Riemannian metrics and its relation to gravity, in: *Differential Geometry and its Applications* (J.Janyska & D.Krupka eds), Brno 1989, World Scintific PC Singapore, 405-411; arXiv: gr-qc/0109001