

FAILURE PROBABILITY OF THE CERAMIC COMPONENT WITH MEASURED SHAPE DEFLECTION OF THE CONTACT CONES FOR THE RANDOM POSITION AGAINST THE COUNTERPART

V. Fuis^{*}

Summary: The paper deals with the problems of the failure probability of the ceramic part (ceramic ball with the cone hole). There are considered the macro and micro shape deflections of the contacted cone areas, the values are given from the 3D measured device IMS UMPIRE. The macro shape deflection is different conicity of the contacted parts, micro shape deflections are the local shape deflection which are added with the macro shape deflections. The problems of the stress and probability of failure are solved using computational modelling – stress states are calculated by FEM, failure probability is based on the Weibull weakest link theory. The failure probability of the ceramic part for the random position against the counterpart will be shown in the paper.

1. Úvod

Důvodem, proč se problematikou určení pravděpodobnosti porušení keramické koule zabývám, je fakt, že došlo k jejím destrukcím u nezanedbatelného počtu případů. Z předcházející analýzy vyplynulo, že podstatným faktorem, který výrazně ovlivňuje tahová napětí v kouli, jsou tvarové odchylky na samosvorném kuželovém spojení obou komponent. Tvarové odchylky jsou jednak na makroúrovni – různá kuželovitost spojovaných komponent, jednak odchylky na mikroúrovni, které jsou nasuperponované na makrotvarové odchylky. Velikosti obou těchto skupin tvarových odchylek kuželů byly změřeny na 3D měřícím zařízení IMS UMPIRE ve firmě vyrábějící keramickou komponentu – Saint Gobain Advanced Ceramics s.r.o. Příspěvek se zabývá tím, jak se změní napjatost a pravděpodobnost porušení keramické komponenty při náhodném nasazení těchto komponent v praxi, což je běžný způsob spojování. Z tohoto důvodu bude realizována sada výpočtů pro různou polohu keramické koule vůči protikusu.

Problematika posouzení pravděpodobnosti porušení libovolné komponenty z keramického materiálu se skládá ze dvou etap, první etapou je určení napjatosti, nejčastěji metodou konečných prvků, v tomto případě systémem ANSYS, v druhé fázi je třeba určit materiálové charakteristiky popisující chování keramického materiálu a posléze výpočet pravděpodobnosti porušení keramické komponenty, který vychází z Weibullovy teorie nejslabšího článku.

^{*} Ing. Vladimír Fuis, Ph.D: Centrum Mechatroniky – Sdružené pracoviště ÚT AV ČR a ÚMTMB FS VUT v Brně, Technická 2, 616 69, Brno, tel.: +420 541 142 891; fax.: +420 541 142 876; e-mail: fuis@umt.fme.vutbr.cz

2. Výpočtové modelování

Problém stanovení deformací a napjatosti (problém pružnosti) v keramické komponentě je přímým problémem, protože pro známou geometrii a topologii soustavy, pro známé zatížení,

vazby a materiálové vlastnosti prvků, se určují projevy soustavy, tedy zmíněná deformace a napjatost. Efektivní metodou řešení problému spolehlivosti výpočtové modelování ie v propojení s experimentem. Pro řešení deformačně napěťových stavů v keramické komponentě byla použita metoda konečných prvků, a to programový systém ANSYS 6.1. Vstupní veličiny do algoritmu výpočtového modelování deformace a napjatosti byly:

geometrické viz obr. 1, na němž je kromě prvků základních rozměrů analyzované soustavy znázorněny i makrotvarová odchylka. možné realizovat výpočtové Aby bylo modelování vlivu tvarových odchylek na kuželích spojovaných komponent, které má stochastický charakter, bylo realizováno měření těchto odchylek na měřícím zařízení IMS - UMPIRE. Kvalitu změřené stykové plochy obou kuželů je možno vyjádřit makroparametry (přímkovitostí, úhly sklonů površek kuželů. kruhovitostí v různých výškách kuželů) a mikroparametry (lokální mikronerovnosti povrchu). Z hlediska úhlů sklonů površek kuželů (kuželovitost) lze říci,



Obr. 1 Schéma analyzované soustavy, uspořádané dle ISO 7206-5

že výrobní dokumentace dovoluje pouze variantu, u níž je vrcholový úhel kužele keramické komponenty (úhel α_K) větší než vrcholový úhel kužele protikusu (úhel α_P) – obr. 1, a kruhovitost jednotlivých řezů je nižší než 10 µm. Ukázka změřených tvarových odchylek od ideálního kuželového tvaru je znázorněna na rozvinutých kuželích na obr. 2. Tyto hodnoty byly použity jako vstupní geometrické hodnoty tvarů stykových kuželů do výpočtového modelování napjatosti a deformace. Z pohledu mikronerovností lze říci, že kužele keramické komponenty a protikusu obvykle vykazují tvarové odchylky ± 3 µm, ve výjimečných případech může tato odchylka nabývat podstatně vyšších hodnot, jak ukazuje obr. 2b (maximální hodnota odchylky činí 18 µm a je lokalizována v malé oblasti). Dále budou analyzovány tři páry (keramická koule a protikus), jejichž makroparametry stykových ploch jsou uvedeny v tab. 1.

 zatěžovací – pro analyzovanou soustavu je předepsaná norma pro její testování (ISO 7206-5) a podle této normy bude soustava zatěžována – obr. 1 – silové působení je liniové a působí na kružnici, přičemž směr zatížení je rovnoběžný s osou soustavy.



Obr. 2 Změřené tvarové odchylky od ideálního tvaru kužele pro jednotlivé komponenty

- vazbové z hlediska vazeb je spodnímu konci protikusu zamezen pohyb, vazba mezi koulí a protikusem je realizována kontaktem. Veličinou, která kvalitativně i kvantitativně ovlivňuje deformačně-napěťové stavy v kouli je hodnota součinitele tření *f* na stykové ploše. Na základě provedených analýz (Fuis, 2000), (Fuis, Janíček, 2001) byla u všech počítaných variant uvažována hodnota f = 0,15.
- materiálové materiál obou komponent je uvažován jako lineární izotropní kontinuum. Protikus je ocelový a ve výpočtu jsou uvažovány tyto konstitutivní charakteristiky: E = 210 GPa μ = 0,3. Materiál koule je keramika na bázi oxidu hlinitého Al₂O₃, u níž jsou uvažovány tyto konstitutivní charakteristiky E = 390 GPa, μ = 0,23.

Části analyzovaných párů	Kužel koule α_K	Kužel protikusu α_P	Odchylka kuželovitosti - α
Pár č. 1 – koule č. 1 / protikus č. 1	5° 46' 44''	5° 39' 24''	7' 20''
Pár č. 2 – koule č. 2 / protikus č. 2	5° 45' 20''	5° 40' 12''	5' 8''
Pár č. 3 – koule č. 3 / protikus č. 3	5° 46' 22''	5° 42' 35''	3' 47''

Tab 1. Makroparametry tvarových odchylek analyzovaných párů

Napjatost a spolehlivost keramické komponenty může být výrazně ovlivněna procesem montáže, při níž se do kuželového otvoru keramické koule vloží kužel ocelový, přičemž tento proces je náhodný z hlediska vzájemné polohy obou komponent vůči sobě (ve smyslu natočení koule okolo osy, definované úhlem β – obr. 3). Vzniká tedy otázka, jestli lokální tvarové odchylky kuželů nemohou při náhodném zkompletování vyvolat vysoká tahová napětí, která mohou snížit spolehlivost keramické komponenty. Z tohoto důvodu bude pro každý analyzovaný pár realizována sada výpočtů pro různou polohu obou komponent.



Obr. 3 Znázornění různé polohy koule vůči protikusu definované úhlem ß

Pevnostní chování keramického materiálu lze nejčastěji popsat Weibullovým pravděpodobnostním modelem, který vychází z teorie "nejslabšího článku". Nejjednodušší Weibullův model určující pravděpodobnost porušení keramické komponenty uvažuje při výpočtu pouze jedno hlavní napětí (Bush, 1993) a je definován vztahem, který je upraven pro vstupní hodnoty získané metodou konečných prvků:

$$P_{f} = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_{i} - \sigma_{u}}{\sigma_{o}}\right)^{m} \Delta V_{i}}, \sigma_{i} \ge \sigma_{u}, \tag{1}$$

kde: n – počet prvků, na něž je rozdělena analyzovaná koule metodou konečných prvků, ΔV_i – objem i-tého prvku, σ_i – první hlavní napětí (σ_1) působící v objemu ΔV_i , σ_u - napětí, pod jehož

hodnotou nedochází k porušení materiálu, σ_o - normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu, m - Weibullův modul. Hodnoty m, σ_u , σ_o je možné považovat za materiálové charakteristiky, které se určují statistickým zpracováním výsledků zkoušek 3– bodového nebo 4-bodového ohybu sady zkušebních vzorků. V praxi se často používá konzervativního výpočetního postupu, u kterého se uvažuje, že napětí $\sigma_u = 0$ MPa, tedy na porušení tělesa mají vliv všechna tahová napětí σ_1 . Tím přejde 3-parametrický model na model 2-parametrický. Hodnota Weibullova modulu m souvisí s rozptylem hodnot pevnosti; nízká hodnota m znamená široký interval hodnot pevnosti a tím i větší pravděpodobnost výskytu "slabého článku" a obráceně.

Existují i modely uvažující při výpočtu pravděpodobnosti porušení vliv všech tří hlavních napětí (McLean, Hartsock, 1991) . Vliv ostatních hlavních napětí (σ_2 , σ_3) na výslednou pravděpodobnost porušení roste s hodnotou Weibullova modulu *m* a s hodnotami napětí σ_2 a σ_3 . U analyzované keramické koule jsou hodnoty σ_{2max} cca 30% σ_{1max} , a hodnoty σ_{3max} cca 8% σ_{1max} (Fuis 2000) hodnota Weibullova modulu je poměrně nízká (m = 3,2, viz dále). Z tohoto důvodu je tedy možné vliv zbývajících dvou hlavních napětí zanedbat a realizovat výpočtové modelování pravděpodobnosti porušení analyzované koule podle vztahu (1).

Z analýzy výsledků ze zkoušek 3-bodovým ohybem vyplývá, že nejlepší soulad experimentálně získaných dat pravděpodobnosti porušení s teoretickými hodnotami je pro případ $\sigma_u = 250$ MPa (Fuis V., 2000). Zbývající materiálové parametry jsou m = 3,2 a $\sigma_o = 238$ MPa.m^{3/3,2}.

3. Výsledky výpočtového modelování napjatosti

V keramické kouli vzniká v průběhu zatěžování trojosá napjatost. Z hlediska spolehlivosti keramické komponenty, která je zhotovena z křehkého materiálu, jsou nejvýznamnější tahová napětí. Z tohoto důvodu jsou dále analyzována pouze extrémní tahová napětí. Průběhy maximálních hodnot tahových napětí v keramické komponentě (σ_{max}) v závislosti na velikosti zatížení koule jsou znázorněny na obr. 4. Hodnoty σ_{max} pro daný pár a různou polohu koule vůči protikusu (různou hodnotu uhlu β) vytvářejí na obr. 4 pás závislostí, jehož šířka, resp. výška se v průběhu zatěžování mění a souvisí s velikostí rozptylu hodnot σ_{max} . Pro srovnání byla modelována i varianta, která uvažuje pouze odchylku od nominální kuželovitosti a je v grafech znázorněna čárkovaně a označena VAR.KUZ.

Z analýzy závislostí na obr. 4 vyplývá, že v průběhu zatěžování je patrná jedna oblast oblast A. Oblast A je u páru č.1 a č.2 na začátku zatěžování, kdy dochází ke kontaktu na velmi malé oblasti a nárůst σ_{max} je výrazný. Tato oblast se také vyznačuje nízkou hodnotou rozptylu hodnot σ_{max} . U páru č.3 je situace odlišná v tom, že výrazná lokální tvarová odchylka keramické komponenty zvětšuje oblast A, a to ze stejného důvodu jako u páru č.1 a č.2 (kontakt na velmi malé oblasti). Po zvětšení kontaktní plochy (mimo oblast A) dochází k téměř lineárnímu nárůstu hodnot σ_{max} s tím, že se s rostoucím zatížením mírně zvětšuje i jejich rozptyl. Zvětšování rozptylu hodnot σ_{max} je způsobeno tím, že hodnota σ_{max} může být ovlivněna více lokálními tvarovými odchylkami, protože je větší i kontaktní plocha.

Obecně lze říci, že velikost oblasti A závisí na velikosti jak makrotvarových odchylek definované úhlem α (pro pár č.1 je oblast A větší než pro pár č.2, protože α (pár č.1) > α (pár č.2)), tak i mikrotvarových odchylek – viz pár č.3. Mimo oblast A je sklon závislostí pro



Obr. 4 Průběh maximálních tahových napětí v keramické komponentě závislosti na zatížení pro: a) pár č.1; b) pár č.2 ; c) pár č.3

všechny uvažované páry stejný a je ovlivněn velikostí součinitele tření f (s rostoucí hodnotou f roste odpor vůči zasouvání protikusu do koule a tím se zmenšuje i sklon závislosti σ_{max} na F (Fuis, Janíček, 2003). Hodnoty rozptylu hodnot σ_{max} jsou závislé na rozložení lokálních tvarových odchylek.

Ze srovnání výsledků výpočtového modelování pro varianty s mikronerovnostmi a bez mikronerovností (VAR. KUZ) vyplývá, že pro varianty VAR. KUZ vykazují σ_{max} nižší hodnoty, přičemž platí, že čím jsou mikronerovnosti větší, tím je větší posun závislosti VAR.KUZ od pásu závislostí s mikronerovnostmi, jak ukazuje obr. 4 pro napětí $\sigma_{max} = \sigma_u =$ 250 MPa.

4. Výsledky výpočtového modelování pravděpodobnosti porušení

Průběh pravděpodobnosti porušení, který lze považovat za kvantifikátor spolehlivosti keramické komponenty, je v závislosti na silovém zatížení pro dva uvažované páry (koule a protikus) znázorněn na obr. 5. Poněvadž pro použitý keramický materiál je charakteristické 3-parametrické Weibullovo rozdělení pevnosti charakterizované výše uvedenými materiálovými charakteristikami bude nenulová pravděpodobnost porušení keramické komponenty (P_f) vypočtena, až při zatížení, které vyvolá v keramické komponentě tahové napětí vetší než σ_u = 250 MPa. Z toho tedy vyplývá, že oblast A v průbězích napětí na obr. 4 neovlivní průběhy P_f, což znamená, že závislosti P_f budou vytvářet určitý pás, jehož šířka bude odpovídat šířce pásu pro příslušný pár na obr. 4.

5. Shrnutí výsledků a diskuze

Bylo realizováno výpočtové modelování napjatosti a pravděpodobnosti porušení keramické komponenty s kuželovým otvorem, do něhož byl vložen protikus, a následně byla soustava zatěžována dle ISO 7206-5. Byly uvažovány tvarové odchylky na kuželových kontaktních plochách obou komponent. Z hlediska velikosti tvarových odchylek je možné analyzované páry rozdělit do tří skupin podle velikosti změřených tvarových odchylek:

- první skupina dvojice s malými tvarovými odchylkami (do $\pm 1,5 \mu$ m)
- druhá skupina dvojice s tvarovými odchylkami (od \pm 1,5 do \pm 5 μ m) pár č.1;
- třetí skupina dvojice, v nichž jedna komponenta vykazovala tvarové odchylky přesahující $\pm 5 \mu m$, což je mezní hodnota daná výkresovou dokumentací pár č.2.

Z analýzy výsledků výpočtového modelování vyplývá, že:

- pro dvojice ze skupiny s malými tvarovými odchylkami vykazovaly hodnoty σ_{max} i pravděpodobnost porušení úzký pás v závislosti na zatížení (rozptyl cca 10 25 MPa pro dané zatížení), což je způsobeno tím, že kontaktní plochy jsou od začátku zatěžování velké a rozložení kontaktního tlaku relativně rovnoměrné.
- pro dvojice se středními tvarovými odchylkami byla šířka pásu větší než pro předcházející skupinu (rozptyl cca 40 60 MPa pro dané zatížení). Velký rozptyl hodnot σ_{max} je způsoben tím, že při různě počáteční poloze koule vůči protikusu se do kontaktu dostávají různé tvarové odchylky kuželových ploch koule a protikusu a tím se zvyšuje i rozptyl



Obr. 5 Průběh pravděpodobnosti porušení keramické komponentě v závislosti na zatížení pro a) pár č.1; b) pár č.2

napětí σ_{max} . Velikosti kontaktních ploch jsou různé a závisí na aktuální poloze tvarových odchylek.

- pro třetí skupinu je charakteristický malý rozptyl hodnot napětí σ_{max} a to z toho důvodu, že od začátku zatěžování dochází ke kontaktu vždy na stejných tvarových odchylkách při libovolné počáteční poloze koule vůči protikusu, hodnoty napětí σ_{max} jsou ovlivněny pouze těmito "velkými" tvarovými odchylkami a rozptyl hodnot napětí σ_{max} je proto malý.

Z analýzy jednotlivých křivek σ_{max} je možné určit oblasti počáteční vzájemné polohy koule vůči protikusu, které vykazují nízkou resp. vysokou hodnotu σ_{max} .

Pro posouzení vlivu mikrotvarových odchylek, které jsou nasuperponovany na makrotvarovou odchylku kvantifikovanou úhlem kužele protikusu a koule, byla uvažována i varianta bez mikrotvarových odchylek. Ze srovnání pásu hodnot napětí σ_{max} a křivky σ_{max} pro variantu bez mikrotvarových odchylek vyplývá, že se rostoucí velikostí mikrotvarové odchylky roste i posun mezi pásem hodnot napětí σ_{max} a křivkou.

Z hlediska pravděpodobnosti porušování lze konstatovat, že pásy hodnot P_f v závislosti na zatížení vykazují přibližně stejnou šířku jako odpovídající pásy hodnot σ_{max} . Nejvýraznější rozdíly v průbězích P_f pro různou počáteční polohu koule vůči protikusu jsou pro nízké hodnoty P_f. Tvar a poloha křivek P_f v závislosti na zatížení jsou výrazně ovlivněny materiálovými parametry keramického materiálu.

6. Závěr

Výpočtovým modelováním bylo prokázáno, že charakter a velikost tvarových odchylek na kuželové stykové ploše mezi keramickou koulí a protikusem výrazně ovlivňují charakter a velikost napětí v keramické komponentě a tím i hodnotu pravděpodobnosti porušování její soudržnosti. Neznalost tohoto vlivu může vést k nepředvídaným lomům keramických koulí a tím ovlivnit jejich důvěryhodnost. Kromě výpočtového modelování bylo realizováno i modelování experimentální (měřily hodnoty obvodových přetvoření na vnější kulové ploše keramické koule). Výsledky výpočtového modelování byly následně srovnávány s výsledky z experimentů. Z uvedeného srovnání výsledků vyplývá dobrý soulad mezi získanými údaji viz (Fuis, Janíček, 2003).

7. Poděkování

Uvedená práce byla podporována grantem GA 101/01/P039 a záměrem MŠMT 262100001 a MŠMT 262100024.

8. Literatura

Bush, D. R. (1993) Designing Ceramic Components for Structural Applications. *Journal of Materials Engineering and Performance*, Volume 2, ASM International pp. 851-862.

Fuis,V. (2000) Napjatostní a spolehlivostní analýza keramické hlavice kyčelní endoprotézy. Vědecké spisy VUT v Brně, edice PhD Thesis, sv. 34, Brno.

Fuis,V.; Janíček,P. (2001) Stress and reliability analysese of ceramic femoral heads with axisymmetric production inaccuracies. Proceedings of the International Federations for Medical & Biological Engineering ISSN 1680-0737 Part II pp.632-635.

Fuis, V.; Janíček, P. (2003) Behaviour of the Hip Joint Endoprosthesis Ceramic Head with Manufacturing Inaccuracies under ISO 7206-5 Loading. *Engineering Mechanics*, Vol. 10, No. 5, pp. 399-411.

McLean, A. F.; Hartsock, D. L. (1991) *Engineered materials handbook*, Volume 4, Ceramics and Glasses. ASM International, pp. 676-689.