

TO INFLUENCE OF GEAR BACKLASH AND DAMPING IN TOOTH SPACE ON DYNAMICS OF NONLINEAR PARAMETRIC SYSTEMS WITH KINEMATIC COUPLINGS

M. Hortel, A. Škuderová¹

Summary: *World state of the art of high-parametric light transmission systems with gear wheels of minimum dimensions of aeronautical and automotive industry leads to constructions with direct and split power flow. The gear backlash in spur gears and damping in tooth spaces significantly influences dynamic properties of such high-speed systems with kinematic couplings.*

1. K matematicko-fyzikálnímu modelu

Planetové diferenciální a pseudoplanetové soustavy s ozubenými koly a jejich zvláštní případy tvoří základní strukturu vysokoparametrických pohonových soustav, zejména v letecké a automobilní technice. Důležitou úlohu zde hrají z vnitřní dynamiky mimo jiné rázové jevy v záběru se nacházejícího ozubení, vzniklé většími dynamickými než staticko-elastickými deformacemi zubů a vliv tlumení jak ve fázi normálního či inverzního záběru ozubení, tak při průchodu oblastmi zubových vůlí, či montážních tolerancí, podmiňujících smontovatelnost celých planetových soustav.

Přesnější modelování takových převodových soustav vede, při hmotnostní diskretizaci jakož i vlivu výskytu slabých – analytických a silných – neanalytických nelinearit (vyvolaných existencí technologických zubových vůlí či montážními tolerancemi), parametrického a vnějšího buzení, na řešení nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic s časově variabilními koeficienty tvaru [1]

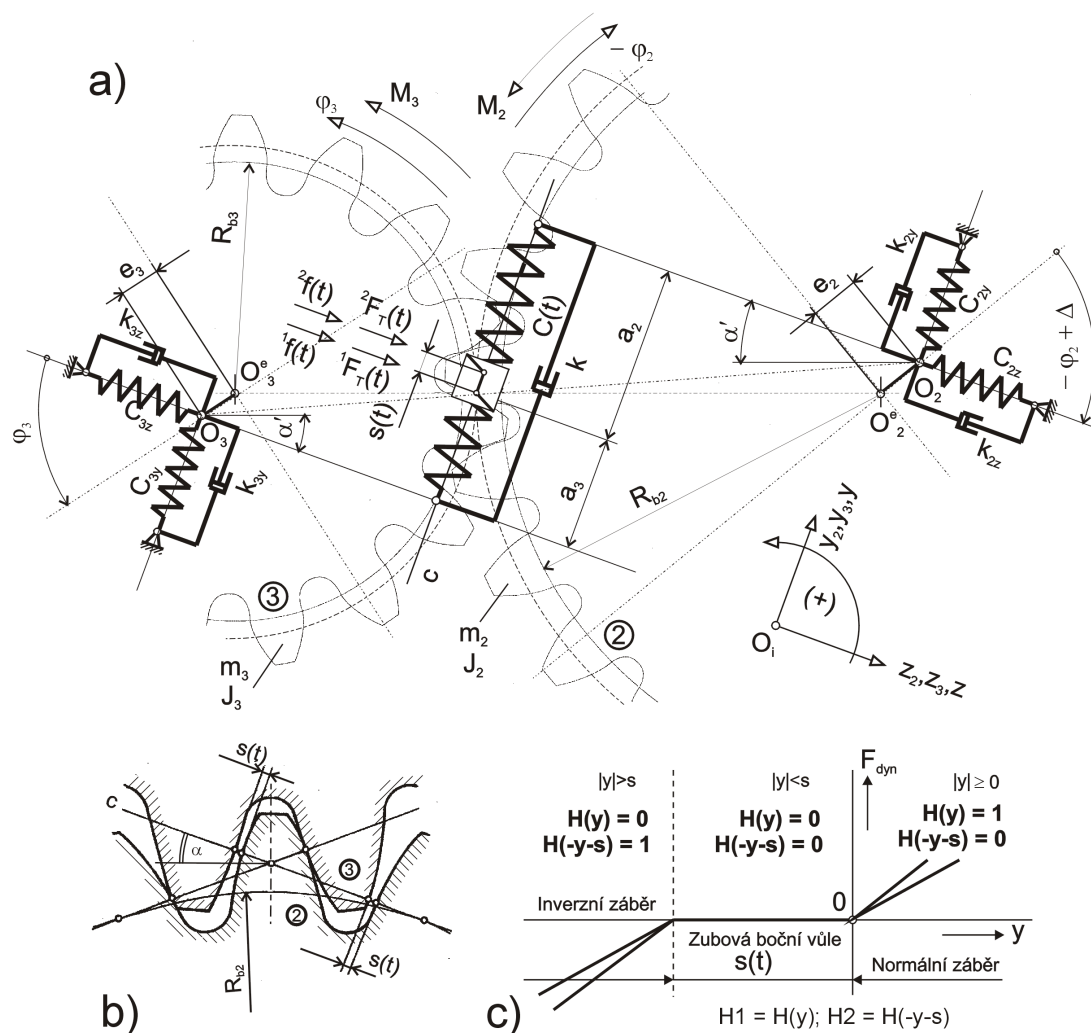
$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{v}'' +_1 \mathbf{K}(\beta, \delta_i, H_1, H_2) \mathbf{v}' + \sum_{K_1 > 1} K_1 \mathbf{K}(D, D_i, H_1, H_2) |\mathbf{w}'(\mathbf{v}')|^{K_1} \text{sgn } \mathbf{w}'(\mathbf{v}') \\ +_1 \mathbf{C}(\varepsilon, \kappa, Y_n, U_n, V_n, H_1, H_2, t) \mathbf{v} + \sum_{K > 1} K \mathbf{C}(I_n, \varepsilon, \kappa, H_1, H_2, t) \mathbf{w}^K(\mathbf{v}) \\ = \mathbf{F}(a_n, b_n, \bar{\varphi}, H_1, H_2, t), \end{aligned} \quad (1)$$

kde \mathbf{v} je m -dimenzionální vektor pohybu soustavy a $\mathbf{w}^K(\mathbf{v})$ je K -tá mocnina vektoru \mathbf{v} , definovaná vztahem $\mathbf{w}^K(\mathbf{v}) = \mathbf{D}(\mathbf{w}(\mathbf{v}))\mathbf{w}^{K-1}(\mathbf{v})$, přičemž $\mathbf{D}(\mathbf{w}(\mathbf{v}))$ je diagonální matice, jejíž prvky na hlavní diagonále tvoří prvky vektoru $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{v}$. Dále je \mathbf{M} matice hmotnostních a setrvačných sil, ${}_1\mathbf{K}, K_1 \mathbf{K}$ matice lineárních resp. nelineárních tlumících sil, ${}_1\mathbf{C}(t), K \mathbf{C}(t)$ jsou matice kvazilineárních resp. nelineárních vratných sil a $\mathbf{F}(t)$ je vektor nepotenciálního vnějšího buzení s budícími složkami a_n, b_n a fázovým úhlem $\bar{\varphi}$. H_1, H_2

¹Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8; tel.: +420 266 053 803, fax: +420 285 864 695; e-mail: hortel@it.cas.cz; skuder@it.cas.cz

jsou Heavisideovy funkce umožňující v kompaktním tvaru vyjádřit pohyby – rázy jako důsledek silných neanalytických nelinearit, např. vliv technologických vůlí v ozubení, v normálním a inverzním záběru ozubení.

Příslušné lineární a nelineární součinitelé tlumení jsou značeny β, δ_i, D, D_i , lineární parametrické tuhostní funkce symboly Y_n, U_n, V_n a nelineární parametrické tuhostní funkce, tzv. *parametrické nelinearity*, symboly I_n . ε a κ jsou součinitelé trvání záběru a amplitudové modulace výsledné zubové tuhostní funkce ozubení ${}_1C(t)$. Derivace podle času t jsou značeny čárkami.



Obr.1 a) Schema páru elasticky uložených kol,
 b) technologická boční zubová vůle,
 c) hodnoty Heavisideových funkcí v jednotlivých oblastech záběru ozubení.

Na příkladu zvláštního případu (1), tj. elasticky uloženého páru ozubených kol o šesti stupních volnosti [1] budíž vyšetřován relativní pohyb

$$y = R_{b3}\varphi_3 + R_{b2}\varphi_2 + y_3 - y_2 + e_3 \sin \varphi_3 - e_2 \sin(\Delta - \varphi_2) + {}^{1,2}f(t) \quad (2)$$

v záběru ozubení s rázy při předpětí ve směru záběrové přímky. Relativní pohyb je mírou dynamického zatěžování zubů, tj. $F_{dyn} = {}_1C(t)y(t)$. Pro $y_2 = y_3 = z_2 = z_3 = 0$, tj. při

absolutně tuhém uložení ozubených kol jakož i pro $e_2 = e_3 = 0$, tj. za předpokladu nulové házivosti roztečných kružnic, není zubová vůle

$$s(t) = -s_k + y_3(t) - y_2(t) + e_3 \sin \varphi_3 - e_2 \sin(\Delta - \varphi_2) \quad (3)$$

časovou funkcí, nýbrž konstantní hodnotou $s(t) := | -s_k | = konst.$ $^1f(t)$ představuje chybovou funkci, tj. výslednou odchylku od ideální evolventy boků zubů při normálním záběru, $^2f(t)$ pak při inverzním záběru a α je záběrový úhel. Fázový úhel mezi excentricitami je značen symbolem Δ .

2. Výpočet a analýza

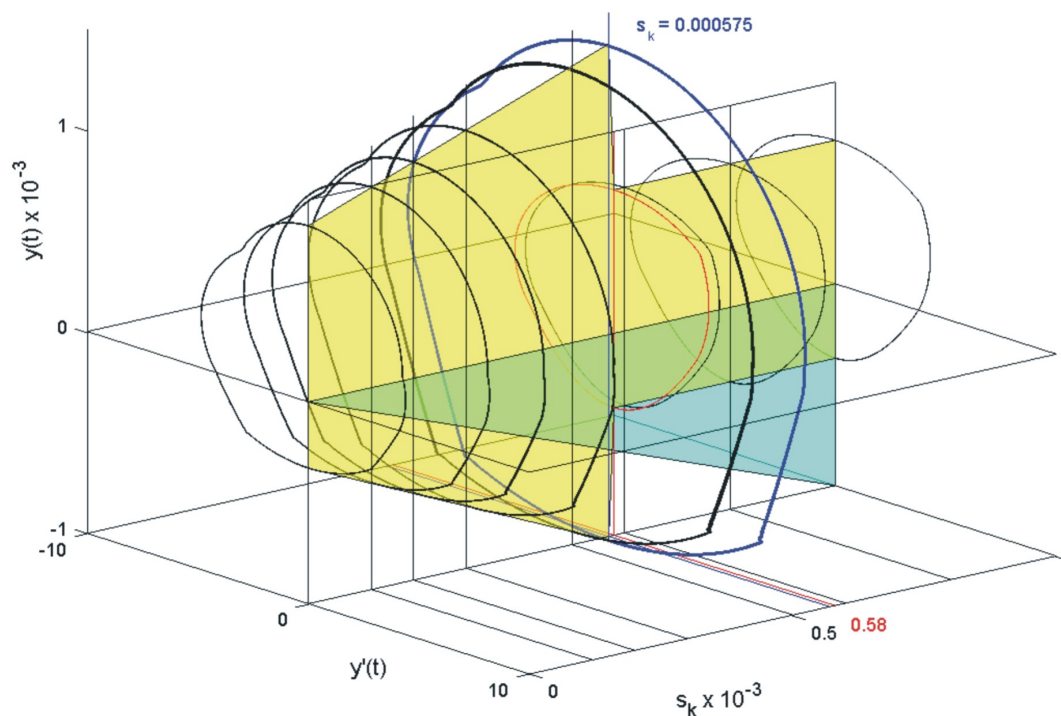
Dynamická analýza byla pro uvedený zvláštní případ elasticky uloženého soukolí provedena jednak analyticky, pomocí integrální metody a E.Schmidtovy metody rozštěpení jader [1], numericky pak pomocí numerické simulace v prostředí Matlab/Simulink [2].

Vliv velikosti vůle s_k v záběru ozubení na relativní pohyb $y(t)$ v záběru ozubení byl sledován nejprve na soustavě páru kol s čelním přímým ozubením, buzené pouze parametrickou výslednou tuhostní funkcí $C(t)$ v záběru ozubení, s uvažováním tření v záběru ozubení, bez excentricit e_j ($j = 2, 3$) kol a bez tlumení v oblasti zubové vůle, tj. lineární tlumení v zubové mezeře $k_{1m} = 0$, kubické tlumení v zubové mezeře $k_{3m} = 0$, pouze s lineárním disipativním tlumením $k_1 > 0$ v záběru ozubení. Tuhost v uložení kola 3 je srovnatelná s výslednou tuhostí v záběru ozubení, tuhost v uložení kola 2 je předpokládána řádově 10^4 x vyšší, tj. blíží se absolutně tuhému uložení. Řešená soustava má šest stupňů volnosti.

Výsledky numerické simulace v páté otáčce soukolí jsou uvedeny v souřadnicovém systému $\{y'; y; s_k\}$ na obr.2, kde s_k představuje velikost konstantní technologické boční vůle v záběru ozubení a modrou barvou je v obrázku vyznačena oblast, v níž dochází ke ztrátě kontaktu boků zubových profilů – k pohybu v oblasti zubové vůle. Velikost skutečné vůle v záběru ozubení je však ovlivněna pohyby y_j středů O_j kol podle vztahu (3).

Jak je z obr.2 patrné, s rostoucí hodnotou konstantní technologické boční vůle $s_k \in \langle 0; 0.000575 \rangle$ v záběru ozubení vzrůstá prakticky lineárně i velikost relativního pohybu $y(t)$ i jeho rychlosti $y'(t)$ v záběru ozubení. S dalším nepatrným vzrůstem velikosti s_k na hodnotu $s_k = 0.00058$ nastává "skokem" zmenšení relativního pohybu $y(t)$ i jeho rychlosti $y'(t)$ a dále se pro hodnoty $s_k \in \langle 0.00058; 0.001 \rangle$ již neprojeví v dynamickém chování řešené soustavy změny, jak je vidět i ze žlutě vyznačeného řezu $\{y; s_k\}$ pro $y' = 0$. To je způsobeno jednak převažujícím dvoupárovým záběrem ozubení, jednak absencí inverzních záběrů v ozubení a prodloužením časových intervalů při průchodech boků zubových profilů oblastí vůle, kdy nedochází k parametrickému buzení.

Na obr.2a jsou postupně pro tři hodnoty konstantní technologické boční zubové vůle $s_k = 0.00057; 0.000575; 0.00058$ uvedeny fázové roviny $\{y'; y\}$ relativního pohybu v záběru ozubení v páté otáčce soukolí a pro poslední dvě periody záběrové frekvence ω_c v této otáčce časové průběhy relativního pohybu $y(t)$, jeho rychlosti $y'(t)$, zubové vůle $s(t)$ a parametrické budící složky od výsledné tuhostní funkce v okamžité oblasti záběru ozubení $C(t) * (H1 + H2)$. Ve fázových rovinách relativního pohybu $y(y')$ jsou barevně vyznačeny jednotlivé oblasti záběru ozubení: modrou barvou normální záběr ozubení, červeně inverzní záběr a zeleně oblast ztráty kontaktu zubových profilů, tj. pohyb v oblasti

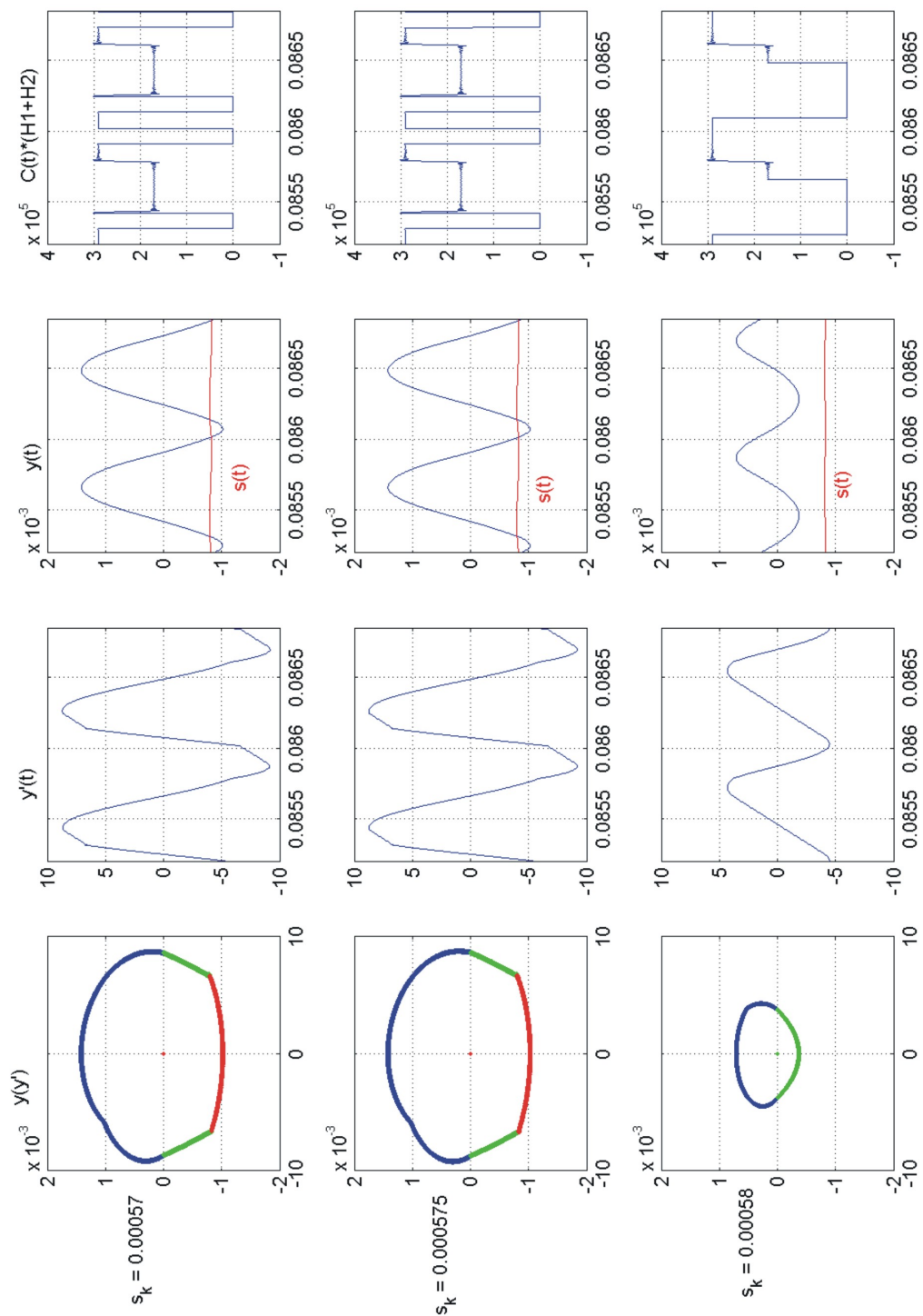


Obr.2. Závislost relativního pohybu $y(t)$ na velikosti technologické boční zubové vůle s_k v záběru ozubení nekonzervativní soustavy ozubených kol, buzené pouze parametricky a netlumené v oblasti zubové vůle.

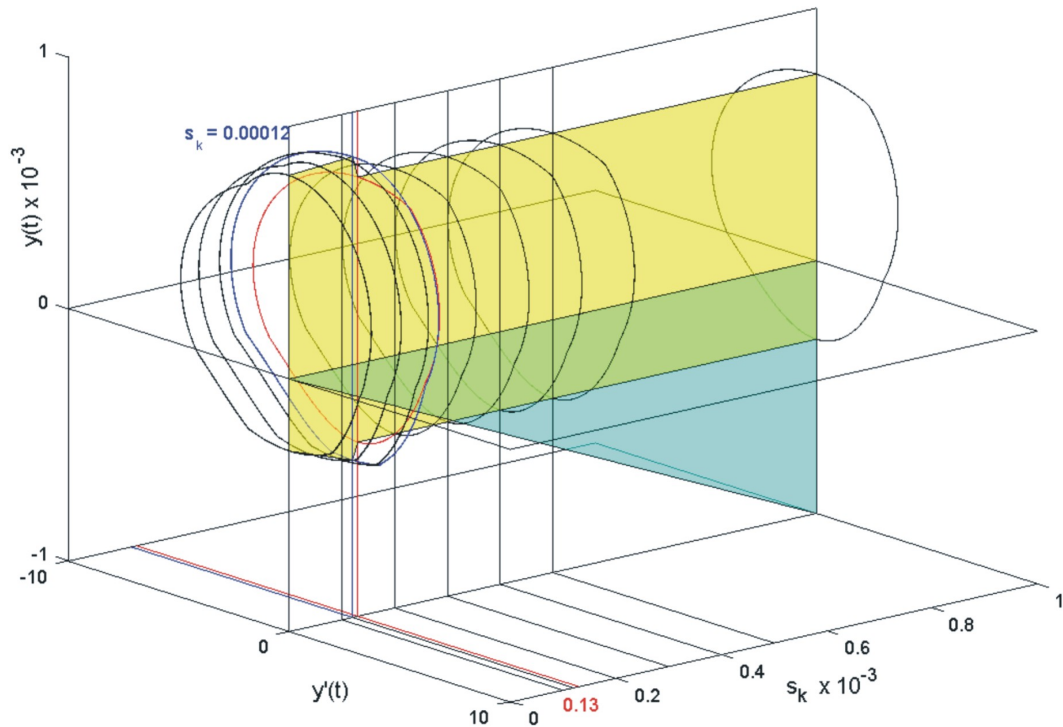
zubové vůle. Z časových průběhů relativního pohybu $y(t)$ a zubové vůle $s(t)$ je zřejmé, že pro první dvě uvedené hodnoty konstantní technologické boční zubové vůle s_k dochází soustavě páru kol i k inverznímu záběru ozubení, na rozdíl od třetí hodnoty s_k , kdy je v řešené soustavě pouze normální záběr ozubení, popř. pohyb boků zubových profilů oblastí zubové vůle. V časovém průběhu budící složky $C(t) * (H1 + H2)$ je patrná změna jejího charakteru při velikostech konstantní technologické boční zubové vůle $s_k = 0.000575$ a $s_k = 0.00058$, což má za následek i změnu dynamického chování řešené soustavy.

Dále byla provedena simulace soustavy páru kol s čelním přímým ozubením, buzená opět pouze parametrickou výslednou tuhostní funkcí $C(t)$ v záběru ozubení, s uvažováním tření, bez excentricit e_j ($j = 2, 3$) kol a s uvažováním lineárního ($k_{1m} = 2$) a kubického ($k_{3m} = 0.4$) tlumení v oblasti zubové vůle. Tuhost v uložení kol i další hodnoty parametrů soustavy byly zvoleny jako v předchozí ukázce na obr.2 a 2a. Výsledky simulace v páté otáčce soukolí jsou uvedeny v souřadnicovém systému $\{y'; y; s_k\}$ na obr.3.

Jak je z obr.3 patrné, se vzrůstající hodnotou konstantní technologické boční vůle $s_k \in \langle 0; 0.00012 \rangle$ v záběru ozubení vzrůstá opět i velikost relativního pohybu $y(t)$ a jeho rychlosti $y'(t)$ v záběru ozubení, i když ne tak výrazně jako v obr.2. S dalším nepatrným vzrůstem velikosti s_k na hodnotu $s_k = 0.00013$ nastává podobně "skokem" zmenšení relativního pohybu $y(t)$ i jeho rychlosti $y'(t)$ a dále se pro hodnoty $s_k \in \langle 0.00012; 0.001 \rangle$ neprojevují v dynamickém chování řešené soustavy změny.

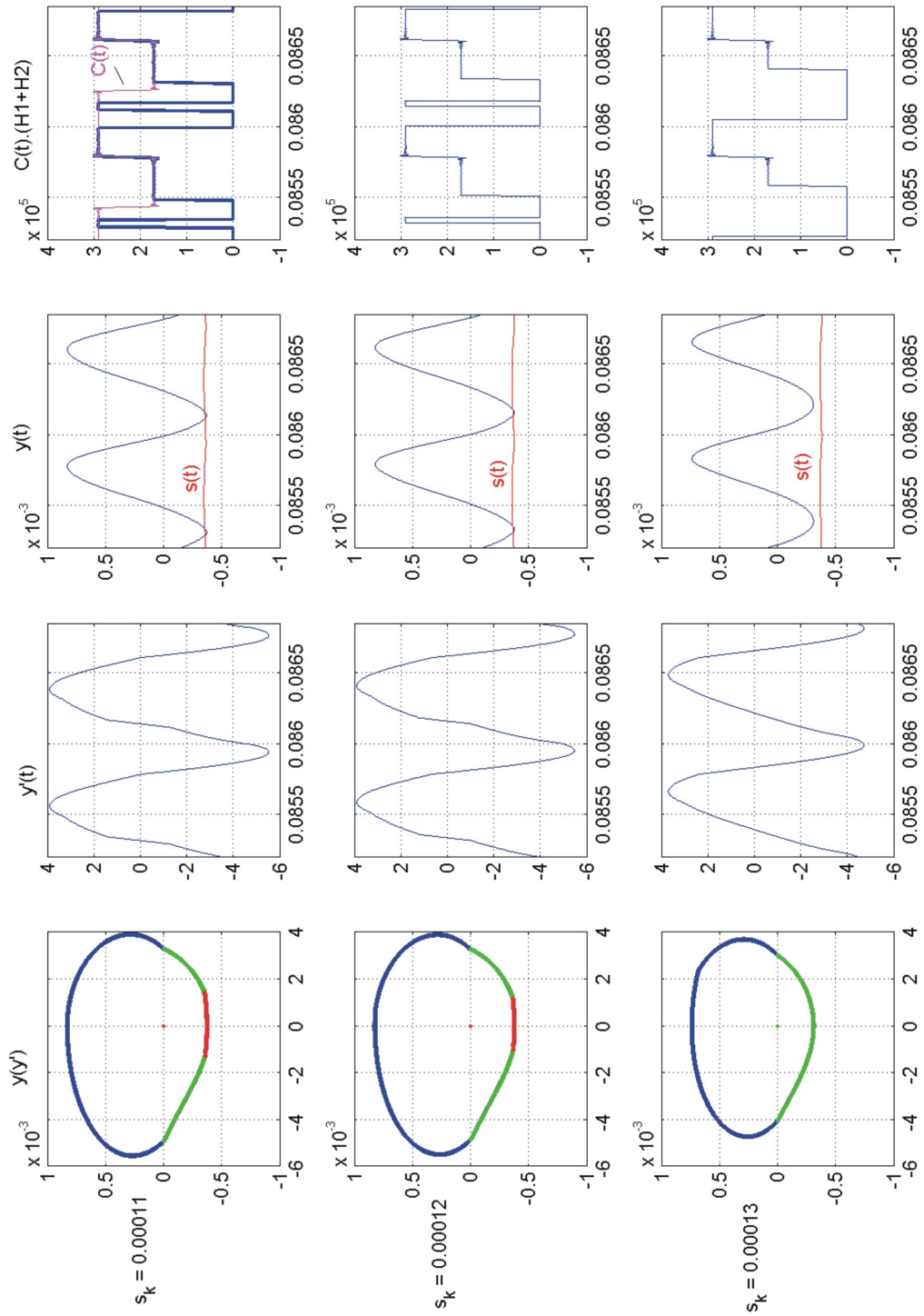


Obr.2a Fázové roviny relativního pohybu $\{\dot{y}; y\}$, časové průběhy relativního pohybu $y(t)$, rychlosti $\dot{y}(t)$, zubové vůle $s(t)$ a parametrické budící složky $C(t) * (H1 + H2)$ pro tři hodnoty konstantní technologické boční zubové vůle s_k v záběru ozubení nekonzervativní soustavy ozubených kol, netlumené v oblasti zubové vůle.



Obr.3 Závislost relativního pohybu $y(t)$ na velikosti technologické boční zubové vůle s_k v záběru ozubení nekonzervativní soustavy ozubených kol, buzené pouze parametricky s lineárním k_{1m} a kubickým k_{3m} tlumením v oblasti zubové vůle.

Na obr.3a jsou postupně pro tři hodnoty konstantní technologické boční zubové vůle $s_k = 0.00011; 0.00012; 0.00013$ uvedeny fázové roviny $\{y'; y\}$ relativního pohybu v záběru ozubení v páté otáčce soukolí (se stejným barevným odlišením jednotlivých fází záběru ozubení jako v obr.2a) a pro poslední dvě periody záběrové frekvence ω_c v této otáčce časové průběhy relativního pohybu $y(t)$, jeho rychlosti $y'(t)$, zubové vůle $s(t)$ a parametrické budící složky od výsledné tuhostní funkce v okamžité oblasti záběru ozubení $C(t) * (H1 + H2)$. Z časových průběhů relativního pohybu $y(t)$ a zubové vůle $s(t)$ je zřejmé, že pro první dvě uvedené hodnoty konstantní technologické boční zubové vůle s_k dochází v soustavě páru kol i k inverznímu záběru ozubení, na rozdíl od třetí hodnoty s_k , kdy je v řešené soustavě pouze normální záběr ozubení, či pohyb boků zubových profilů oblastí zubové vůle. To je patrné i v časových průbězích parametrické budící složky $C(t) * (H1 + H2)$ - ve změně jejího charakteru, což má za následek i změnu dynamického chování řešené soustavy.



Obr.3a. Fázové roviny relativního pohybu $\{\dot{y}; y\}$, časové průběhy relativního pohybu $y(t)$, rychlosti $\dot{y}(t)$, zubové vůle $s(t)$ a parametrické budící složky $C(t) * (H1 + H2)$ pro tři hodnoty konstantní technologické boční zubové vůle s_k v záběru ozubení nekonzervativní soustavy ozubených kol, s lineárním k_{1m} a kubickým k_{3m} tlumením v oblasti zubové vůle.

3. Závěr

Z výsledků provedené analýzy zvláštního případu řešené soustavy s uvedenými parametry se ukázalo, že růst velikosti vůle $s(t)$ v záběru ozubení se projevuje růstem relativního pohybu $y(t)$ v záběru ozubení – až do jisté velikosti zubové vůle $s(t)$, kdy nastává ”skokem” zmenšení relativního pohybu $y(t)$ a s dalším růstem zubové vůle se již dále kvantitativně neprojevuje změna dynamického chování soustavy; místa ”skoků” jsou závislá na průběhu parametrické budící složky a na tom, zda po opětovném styku boků zubů nastává jak v inverzním, tak i v normálním záběru jednopárový či dvoupárový záběr, tj. záběr na nižší či vyšší hladině výsledné tuhostní funkce v záběru; posunutí tohoto ”skoku” k nižším hodnotám zubové vůle ovlivňuje existence disipativního tlumení v zubové mezeře.

4. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory Akademie věd ČR při řešení projektu podpory cíleného výzkumu – reg. č. S2076353.

5. Literatura

- [1] Hortel, M., Škuderová, A.: Damping influence on the qualitative properties of non-linear systems with parametric nonlinearities. In Sborník Engineering Mechanics 2001, Svratka, 2001.
- [2] Škuderová, A.: K analýze vnitřní dynamiky silně nelineární parametrické soustavy s kinematickými vazbami. Dizertační práce, FSI VUT Brno, 2003.